7-8. OCENJIVANJE PARAMETARA RASPODELE (MAST)

Profesor Milan Merkle
emerkle@etf.rs milanmerkle.etf.rs

Matematička Statistika-proleće 2021

Uvod u statistiku

Polazi se od podataka (uzorka) iz jedne ili više raspodela (populacija)

- *Ocenjivanje parametara raspodele* $\surd$
- *Ocenjivanje raspodele (funkcija raspodele, zakon raspodele...)*$\surd$
- *Testiranje hipoteza o parametrima raspodele* $\surd$
- *Testiranje neparametarskih hipoteza* $\surd$
- *Regresija (fitovanje)*
- *Klasifikacija ...*

Uvod u statistiku

Polazi se od podataka (uzorka) iz jedne ili više raspodela (populacija)

- *Ocenjivanje parametara raspodele* $\surd$
- *Ocenjivanje raspodele (funkcija raspodele, zakon raspodele...)*$\surd$
- *Testiranje hipoteza o parametrima raspodele* $\surd$
- *Testiranje neparametarskih hipoteza* $\surd$
- *Regresija (fitovanje)*
- *Klasifikacija ...*

Uvod u statistiku

Polazi se od podataka (uzorka) iz jedne ili više raspodela (populacija)

- *Ocenjivanje parametara raspodele* $\surd$
- *Ocenjivanje raspodele (funkcija raspodele, zakon raspodele...)*$\surd$
- *Testiranje hipoteza o parametrima raspodele* $\surd$
- *Testiranje neparametarskih hipoteza* $\surd$
- *Regresija (fitovanje)*
- *Klasifikacija ...*

Uvod u statistiku

Polazi se od podataka (uzorka) iz jedne ili više raspodela (populacija)

- *Ocenjivanje parametara raspodele* $\surd$
- *Ocenjivanje raspodele (funkcija raspodele, zakon raspodele...)*$\surd$
- *Testiranje hipoteza o parametrima raspodele* $\surd$
- *Testiranje neparametarskih hipoteza* $\surd$
- *Regresija (fitovanje)*
- *Klasifikacija ...*

Uvod u statistiku

Polazi se od podataka (uzorka) iz jedne ili više raspodela (populacija)

- *Ocenjivanje parametara raspodele* $\surd$
- *Ocenjivanje raspodele (funkcija raspodele, zakon raspodele...)*$\surd$
- *Testiranje hipoteza o parametrima raspodele* $\surd$
- *Testiranje neparametarskih hipoteza* $\surd$
- *Regresija (fitovanje)*
- *Klasifikacija ...*

Uvod u statistiku

Polazi se od podataka (uzorka) iz jedne ili više raspodela (populacija)

- *Ocenjivanje parametara raspodele* $\surd$
- *Ocenjivanje raspodele (funkcija raspodele, zakon raspodele...)*$\surd$
- *Testiranje hipoteza o parametrima raspodele* $\surd$
- *Testiranje neparametarskih hipoteza* $\surd$
- *Regresija (fitovanje)*
- *Klasifikacija ...*

Uvod u statistiku

Polazi se od podataka (uzorka) iz jedne ili više raspodela (populacija)

- *Ocenjivanje parametara raspodele* $\surd$
- *Ocenjivanje raspodele (funkcija raspodele, zakon raspodele...)*$\surd$
- *Testiranje hipoteza o parametrima raspodele* $\surd$
- *Testiranje neparametarskih hipoteza* $\surd$
- *Regresija (fitovanje)*
- *Klasifikacija ...*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo* *uzorkom obima n* *iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer (μ, σ^2).*
- *U opštem slučaju: θ - parametar, Θ - skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- *$\hat{\theta}$ - ocena parametra θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$.*
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se statistika.*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo uzorkom obima n iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer* (μ, σ^2).
- *U opštem slučaju:* θ *- parametar,* Θ *- skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- $\hat{\theta}$ *- ocena parametra* θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$.
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se statistika.*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo uzorkom obima n iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer* (μ, σ^2).
- *U opštem slučaju:* θ *- parametar,* Θ *- skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- $\hat{\theta}$ *- ocena parametra* θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$.
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se statistika.*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo uzorkom obima n iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer* (μ, σ^2).
- *U opštem slučaju:* θ *- parametar,* Θ *- skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- $\hat{\theta}$ *- ocena parametra* θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$.
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se statistika.*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo uzorkom obima n iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer* (μ, σ^2).
- *U opštem slučaju:* θ *- parametar,* Θ *- skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- $\hat{\theta}$ *- ocena parametra* θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$.
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se statistika.*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo uzorkom obima n iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer* (μ, σ^2).
- *U opštem slučaju:* θ *- parametar,* Θ *- skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- $\hat{\theta}$ *- ocena parametra* θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \dots, X_n)$.
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se statistika.*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo uzorkom obima n iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer* (μ, σ^2).
- *U opštem slučaju:* θ *- parametar,* Θ *- skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- $\hat{\theta}$ *- ocena parametra* θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$.
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se statistika.*

Osnovni pojmovi

Definicija 6.2. *Skup n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom nazivamo* *uzorkom obima n* *iz te raspodele.*

- *Parametri raspodele*
- *Mogu biti i višedimenzionalni, na primer* (μ, σ^2).
- *U opštem slučaju:* θ *- parametar,* Θ *- skup mogućih vrednosti parametra*
- *Parametri se ocenjuju pomoću uzorka*
- $\hat{\theta}$ *- ocena parametra* θ, $\hat{\theta} = S(X_1, \ldots, X_n)$.
- *Funkcija koja zavisi samo od uzorka i ne sadrži nepoznate parametre, zove se* *statistika*.

Poželjne osobine ocena

- *Ocena $\hat{\theta}_n$ (iz uzorka obima n) je stabilna ako $\hat{\theta}_n \to \theta$ za svako $\theta \in \Theta$ u verovatnoći.* $\surd$
- *Ocena $\hat{\theta}$ je centrirana ili nepristrasna ako je $\mathrm{E}\,\hat{\theta} = \theta$ za svako $\theta \in \Theta$*

Primer: Ocena matematičkog očekivanja $\hat{\mu}$.

Poželjne osobine ocena

- *Ocena $\hat{\theta}_n$ (iz uzorka obima n) je stabilna ako $\hat{\theta}_n \to \theta$ za svako $\theta \in \Theta$ u verovatnoći.* $\surd$
- *Ocena $\hat{\theta}$ je centrirana ili nepristrasna ako je $\mathrm{E}\,\hat{\theta} = \theta$ za svako $\theta \in \Theta$*

Primer: Ocena matematičkog očekivanja $\hat{\mu}$.

Poželjne osobine ocena

- *Ocena* $\hat{\theta}_n$ *(iz uzorka obima n) je stabilna ako* $\hat{\theta}_n \to \theta$ *za svako* $\theta \in \Theta$ *u verovatnoći.* $\checkmark$
- *Ocena* $\hat{\theta}$ *je centrirana ili nepristrasna ako je* $\mathrm{E}\,\hat{\theta} = \theta$ *za svako* $\theta \in \Theta$

Primer: Ocena matematičkog očekivanja $\hat{\mu}$.

Poređenje ocena

Kriterijum srednjeg kvadratnog odstupanja.
Od dve centrirane ocene parametra θ bolja je ona koja ima manju varijansu.

Primer. *Imamo uzorak $X_1, X_2, \dots, X_n$ iz raspodele sa matematičkim očekivanjem μ i varijansom σ^2. Definišimo:*

$$\hat{\mu} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \quad \mu^* = \frac{X_1 + 2X_2 + \cdots nX_n}{n(n+1)/2}.$$

Obe ocene su nepristrasne i stabilne, ali $\mathrm{Var}(\hat{\mu}) < \mathrm{Var}(\mu^*)$, za svako n.

Poređenje ocena

Kriterijum srednjeg kvadratnog odstupanja.
Od dve centrirane ocene parametra θ bolja je ona koja ima manju varijansu.

Primer. *Imamo uzorak $X_1, X_2, \dots, X_n$ iz raspodele sa matematičkim očekivanjem μ i varijansom σ^2. Definišimo:*

$$\hat{\mu} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \quad \mu^* = \frac{X_1 + 2X_2 + \cdots nX_n}{n(n+1)/2}.$$

Obe ocene su nepristrasne i stabilne, ali $\mathrm{Var}\,(\hat{\mu}) < \mathrm{Var}\,(\mu^*)$, za svako n.

Preciznost ocene

Za parametar θ i ocenu $\hat{\theta}$ definišemo maksimalnu grešku $\varepsilon > 0$ (koju možemo da tolerišemo u većini slučajeva) i verovatnoću $\alpha \in (0,1)$ da greška bude veća od ε.

$$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad |\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon \quad \text{sa verovatnoćom } 1 - \alpha \text{ ili većom}$$

Potreban obim uzorka (n_0) može se naći:

1. *Ako je $\hat{\theta}$ nepristrasna ocena i ako znamo njenu varijansu, preko nejednakosti Čebiševa.*
2. *Ako raspodela za $\hat{\theta} - \theta$ ne zavisi od θ i poznata je.*
3. *Ako znamo aproksimativnu raspodelu za $\hat{\theta} - \theta$*

Šta ako ne možemo da biramo obim uzorka n? (Primeri...)

Preciznost ocene

Za parametar θ i ocenu $\hat{\theta}$ definišemo maksimalnu grešku $\varepsilon > 0$ (koju možemo da tolerišemo u većini slučajeva) i verovatnoću $\alpha \in (0,1)$ da greška bude veća od ε.

$$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad |\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon \quad \textit{sa verovatnoćom } 1 - \alpha \textit{ ili većom}$$

Potreban obim uzorka (n_0) može se naći:

1. *Ako je $\hat{\theta}$ nepristrasna ocena i ako znamo njenu varijansu, preko nejednakosti Čebiševa.*
2. *Ako raspodela za $\hat{\theta} - \theta$ ne zavisi od θ i poznata je.*
3. *Ako znamo aproksimativnu raspodelu za $\hat{\theta} - \theta$*

Šta ako ne možemo da biramo obim uzorka n? (Primeri...)

Preciznost ocene

Za parametar θ i ocenu $\hat{\theta}$ definišemo maksimalnu grešku $\varepsilon > 0$ (koju možemo da tolerišemo u većini slučajeva) i verovatnoću $\alpha \in (0,1)$ da greška bude veća od ε.

$$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad |\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon \quad \text{sa verovatnoćom } 1 - \alpha \text{ ili većom}$$

Potreban obim uzorka (n_0) može se naći:

1. *Ako je $\hat{\theta}$ nepristrasna ocena i ako znamo njenu varijansu, preko nejednakosti Čebiševa.*
2. *Ako raspodela za $\hat{\theta} - \theta$ ne zavisi od θ i poznata je.*
3. *Ako znamo aproksimativnu raspodelu za $\hat{\theta} - \theta$*

Šta ako ne možemo da biramo obim uzorka n? (Primeri...)

Preciznost ocene

Za parametar θ i ocenu $\hat{\theta}$ definišemo maksimalnu grešku $\varepsilon > 0$ (koju možemo da tolerišemo u većini slučajeva) i verovatnoću $\alpha \in (0,1)$ da greška bude veća od ε.

$$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad |\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon \quad \text{sa verovatnoćom } 1-\alpha \text{ ili većom}$$

Potreban obim uzorka (n_0) može se naći:

1. *Ako je $\hat{\theta}$ nepristrasna ocena i ako znamo njenu varijansu, preko nejednakosti Čebiševa.*
2. *Ako raspodela za $\hat{\theta} - \theta$ ne zavisi od θ i poznata je.*
3. *Ako znamo aproksimativnu raspodelu za $\hat{\theta} - \theta$*

Šta ako ne možemo da biramo obim uzorka n? (Primeri...)

Preciznost ocene

Za parametar θ i ocenu $\hat{\theta}$ definišemo maksimalnu grešku $\varepsilon > 0$ (koju možemo da tolerišemo u većini slučajeva) i verovatnoću $\alpha \in (0,1)$ da greška bude veća od ε.

$$\exists n_0\ \forall n \geq n_0 \quad |\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon \quad \text{sa verovatnoćom } 1 - \alpha \text{ ili većom}$$

Potreban obim uzorka (n_0) može se naći:

1. *Ako je $\hat{\theta}$ nepristrasna ocena i ako znamo njenu varijansu, preko nejednakosti Čebiševa.*
2. *Ako raspodela za $\hat{\theta} - \theta$ ne zavisi od θ i poznata je.*
3. *Ako znamo aproksimativnu raspodelu za $\hat{\theta} - \theta$*

Šta ako ne možemo da biramo obim uzorka n? (Primeri...)

Intervali poverenja

Definicija 8.5 *Sa uzorkom iz raspodele sa nepoznatim parametrom θ, interval poverenja za θ sa nivoom poverenja $1-\alpha$ je interval koji sa verovatnoćom $1-\alpha$ sadrži θ.*
Standardne vrednosti su $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$, odnosno $90\%, 95\%, 99\%$ intervali poverenja.

Primer 138 *Dat je uzorak $X_1, \ldots, X_n$, $n = 100$ iz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1/4$, μ je nepoznato. Naći 90% i 95% interval poverenja za μ.*

Polazimo od

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

R: $[\hat{\mu} - 0.08, \hat{\mu} + 0.08]$, $[\hat{\mu} - 0.1, \hat{\mu} + 0.1]$

Za $\hat{\mu} = 3$, dobija se interval $[2.92, 3.08]$. Da li je μ unutar ovog intervala sa verovatnoćom 0.9?

Intervali poverenja

Definicija 8.5 *Sa uzorkom iz raspodele sa nepoznatim parametrom* θ, *interval poverenja za* θ *sa nivoom poverenja* $1-\alpha$ *je interval koji sa verovatnoćom* $1-\alpha$ *sadrži* θ.
Standardne vrednosti su $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$, *odnosno* 90%, 95%, 99% *intervali poverenja.*

Primer 138 *Dat je uzorak* $X_1, \ldots, X_n$, $n = 100$ *iz* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1/4$, μ *je nepoznato. Naći* 90% *i* 95% *interval poverenja za* μ.

Polazimo od

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

R: $[\hat{\mu} - 0.08, \hat{\mu} + 0.08]$, $[\hat{\mu} - 0.1, \hat{\mu} + 0.1]$

Za $\hat{\mu} = 3$, *dobija se interval* $[2.92, 3.08]$. *Da li je* μ *unutar ovog intervala sa verovatnoćom* 0.9?

Intervali poverenja

Definicija 8.5 *Sa uzorkom iz raspodele sa nepoznatim parametrom θ, interval poverenja za θ sa nivoom poverenja $1-\alpha$ je interval koji sa verovatnoćom $1-\alpha$ sadrži θ.*
Standardne vrednosti su $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$, odnosno $90\%, 95\%, 99\%$ intervali poverenja.

Primer 138 *Dat je uzorak $X_1, \ldots, X_n$, $n = 100$ iz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1/4$, μ je nepoznato. Naći 90% i 95% interval poverenja za μ.*

Polazimo od

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

R: $[\hat{\mu} - 0.08, \hat{\mu} + 0.08]$, $[\hat{\mu} - 0.1, \hat{\mu} + 0.1]$

Za $\hat{\mu} = 3$, dobija se interval $[2.92, 3.08]$. Da li je μ unutar ovog intervala sa verovatnoćom 0.9?

Interval poverenja za μ

Za uzorak obima n iz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sa poznatim parametrom σ,

$$P\left(\mu \in \left[\hat{\mu} - \varepsilon_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + \varepsilon_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha\,.$$

Dužina intervala poverenja: $2\varepsilon_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 0$ *kad* $n \to +\infty$ $\checkmark$

Interval poverenja je centriran u $\hat{\mu}$ jer takav interval ima najmanju dužinu za fiksirano n i nivo $1 - \alpha$. $\checkmark$

Interval poverenja za μ

Za uzorak obima n iz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *sa poznatim parametrom* σ*,*

$$P\left(\mu \in \left[\hat{\mu} - \varepsilon_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + \varepsilon_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha\,.$$

Dužina intervala poverenja: $2\varepsilon_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 0$ *kad* $n \to +\infty$ $\checkmark$

Interval poverenja je centriran u $\hat{\mu}$ *jer takav interval ima najmanju dužinu za fiksirano n i nivo* $1 - \alpha$. $\checkmark$

Tri oblika intervala poverenja

Interval oblika $[A, B]$ *zove se dvostrani interval poverenja (A i B su slučajne promenljive).*
Jednostrani intervali su oblika $[A, +\infty)$ *ili* $(-\infty, B)$ *(umesto* $\pm\infty$ *mogu da budu i minimalna, odnosno maksimalna moguća vrednost parametra ako ima smisla).*
Za jednostrane intervale parametra μ *polazimo od činjenice da slučajne promenljive*

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ ili } \frac{\mu - \hat{\mu}}{\sigma/\sqrt{n}}$$

imaju $\mathcal{N}(0, 1)$ *raspodelu, i nalazimo kvantil* $\varepsilon_{1-\alpha}$.

Ocene varijanse

Za poznato μ (redak slučaj) treba naći ocenu matematičkog očekivanja slučajne promenljive $Y = (X-\mu)^2$:

$$s_0{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2$$

Centrirana i stabilna ocena varijanse (u slučaju da je μ nepoznato)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\hat{\mu})^2$$

Studentova t raspodela

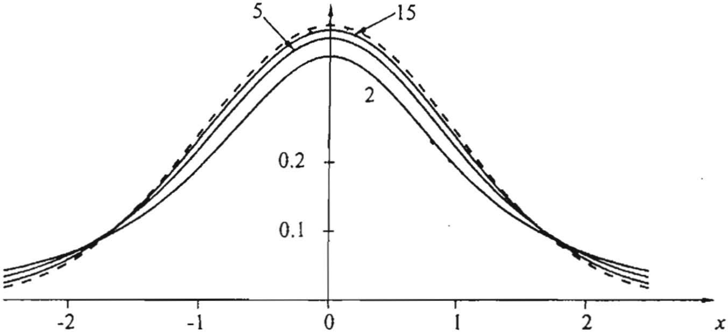
Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ raspodelom. U slučaju kad su oba parametra nepoznata, za nalaženje intervala poverenja koristi se statistika

$$t_n = \frac{\hat{\mu} - \mu}{s/\sqrt{n}}, \qquad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{\mu})^2}$$

čija raspodela je poznata pod nazivom t raspodela, ili Studentova raspodela (William Gosset)

Studentova raspodela

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, n > 0$$



Slika 34. Gustine $t(n)$ raspodele za $n = 2, 5, 15$ u poređenju sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom (isprekidana linija).

Intervali poverenja za μ sa nepoznatim σ^2

Primenjuje se isti postupak kao i u slučaju poznate varijanse s tim da se umesto σ^2 uzima s^2, a kvantili se nalaze iz tablica Studentove raspodele $t(n-1)$

Za $n-1>30$ *uzimaju se kvantili iz standardne normalne raspodele*

Intervali poverenja za μ sa nepoznatim σ^2

Primenjuje se isti postupak kao i u slučaju poznate varijanse s tim da se umesto σ^2 uzima s^2, a kvantili se nalaze iz tablica Studentove raspodele $t(n-1)$

Za $n-1>30$ *uzimaju se kvantili iz standardne normalne raspodele*

Hi kvadrat raspodela

Raspodela zbira kvadrata n nezavisnih slučajnih promenljivih sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom zove se Hi kvadrat raspodela sa n stepeni slobode

$$Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$$

Teorema 7.5 *Za nezavisne* $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*:*

1. $\dfrac{n \cdot {s_0}^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 \sim \chi^2(n),$
2. $\dfrac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \hat{\mu})^2 \sim \chi^2(n-1).$

Hi kvadrat raspodela

Raspodela zbira kvadrata n nezavisnih slučajnih promenljivih sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom zove se Hi kvadrat raspodela sa n stepeni slobode

$$Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$$

Teorema 7.5 *Za nezavisne $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:*

1. $$\frac{n \cdot {s_0}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 \sim \chi^2(n),$$
2. $$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \hat{\mu})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

Hi kvadrat raspodela

Raspodela zbira kvadrata n nezavisnih slučajnih promenljivih sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom zove se Hi kvadrat raspodela sa n stepeni slobode

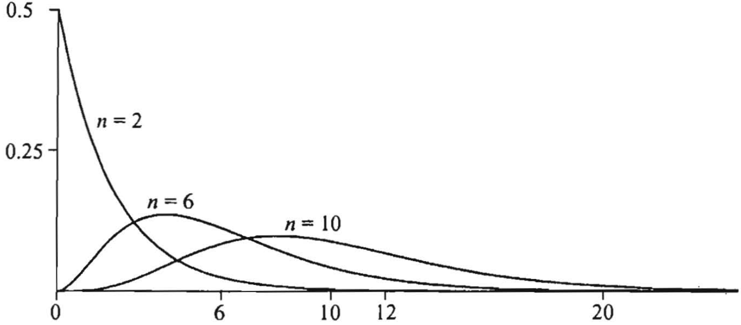
$$Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$$

Teorema 7.5 *Za nezavisne* $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*:*

1. $$\frac{n \cdot {s_0}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 \sim \chi^2(n),$$
2. $$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \hat{\mu})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

Hi kvadrat raspodela

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad (x > 0)$$



Slika 33. Gustine hi kvadrat raspodele

Intervali poverenja za varijansu

$X_1, \dots, X_n$ - uzorak iz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sa nepoznatim μ i σ^2.
Dvostrani interval poverenja *za σ^2 (Teorema 7.5.-2)*

$$P\left(\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_{\alpha/2}}\right]\right) = 1 - \alpha,$$

gde je ε kvantil iz $\chi^2(n-1)$.
Interval je simetričan u smislu da "repovi" imaju istu verovatnoću, $\varepsilon/2$.

Ako je μ poznato, onda je, prema teoremi 7.5.-1:

$$P\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n{s_0}^2}{\varepsilon_{1-\alpha/2}}, \frac{n{s_0}^2}{\varepsilon_{\alpha/2}}\right]\right) = 1 - \alpha,$$

gde je ε kvantil iz $\chi^2(n)$.

Intervali poverenja za varijansu

$X_1, \ldots, X_n$ - uzorak iz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sa nepoznatim μ i σ^2.
Dvostrani interval poverenja *za σ^2 (Teorema 7.5.-2)*

$$P\left(\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_{\alpha/2}}\right]\right) = 1 - \alpha,$$

gde je ε kvantil iz $\chi^2(n-1)$.
Interval je simetričan u smislu da "repovi" imaju istu verovatnoću, $\varepsilon/2$.

Ako je μ poznato, onda je, prema teoremi 7.5.-1:

$$P\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n{s_0}^2}{\varepsilon_{1-\alpha/2}}, \frac{n{s_0}^2}{\varepsilon_{\alpha/2}}\right]\right) = 1 - \alpha,$$

gde je ε kvantil iz $\chi^2(n)$.

Šta ako raspodela nije normalna?

Za uzorke obima većeg od 30 - aproksimativni intervali poverenja za μ i σ^2 koristeći iste formule kao za normalnu raspodelu (na osnovu CGT)

Još dva parametra:

- *Verovatnoća događaja: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$)-* **8.3.1** *ili egzaktni metod* **8.3.2**-*neobavezno*
- *Parametar λ Puasonove raspodele: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$, $n\lambda > 10$)* **8.4.2** *ili egzaktni metod - neobavezno*

Šta ako raspodela nije normalna?

Za uzorke obima većeg od 30 - aproksimativni intervali poverenja za μ i σ^2 koristeći iste formule kao za normalnu raspodelu (na osnovu CGT)

Još dva parametra:

1. *Verovatnoća događaja: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$)-* **8.3.1** *ili egzaktni metod* **8.3.2***-neobavezno*
2. *Parametar λ Puasonove raspodele: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$, $n\lambda > 10$)* **8.4.2** *ili egzaktni metod - neobavezno*

Šta ako raspodela nije normalna?

Za uzorke obima većeg od 30 - aproksimativni intervali poverenja za μ i σ^2 koristeći iste formule kao za normalnu raspodelu (na osnovu CGT)

Još dva parametra:

1. *Verovatnoća događaja: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$)-* **8.3.1** *ili egzaktni metod* **8.3.2***-neobavezno*
2. *Parametar λ Puasonove raspodele: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$, $n\lambda > 10$)* **8.4.2** *ili egzaktni metod - neobavezno*

Šta ako raspodela nije normalna?

Za uzorke obima većeg od 30 - aproksimativni intervali poverenja za μ i σ^2 koristeći iste formule kao za normalnu raspodelu (na osnovu CGT)

Još dva parametra:

1. *Verovatnoća događaja: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$)-* **8.3.1** *ili egzaktni metod* **8.3.2***-neobavezno*
2. *Parametar λ Puasonove raspodele: Aproksimativni metod preko CGT ($n > 30$, $n\lambda > 10$)* **8.4.2** *ili egzaktni metod - neobavezno*

Kako se dobijaju ocene parametra?

Metod momenata:

- *Uzorak obima n:* $X_1, \ldots, X_n$.
- *Moment reda k:* $\mu_k = \mathrm{E}\, X^k$, $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$
- *Ako se parametar* θ *može izraziti preko momenata kao* $\theta = g(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, $k << n$, *ocena parametra* θ *po metodi momenata je* $\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k)$

Primer: $\sigma^2 = \mathrm{E}\,(X^2) - (\mathrm{E}\, X)^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \implies \hat{\sigma^2} = \hat{\mu}_2 - (\hat{\mu}_1)^2 = s_0^2$
.

Kako se dobijaju ocene parametra?

Metod momenata:

- *Uzorak obima n:* $X_1, \ldots, X_n$.
- *Moment reda k:* $\mu_k = \mathrm{E}\, X^k$, $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$
- *Ako se parametar* θ *može izraziti preko momenata kao* $\theta = g(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, $k << n$, *ocena parametra* θ *po metodi momenata je* $\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k)$

Primer: $\sigma^2 = \mathrm{E}\,(X^2) - (\mathrm{E}\, X)^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \implies \widehat{\sigma^2} = \hat{\mu}_2 - (\hat{\mu}_1)^2 = s_0^2$

.

Kako se dobijaju ocene parametra?

Metod momenata:

- *Uzorak obima n:* $X_1, \ldots, X_n$.
- *Moment reda k:* $\mu_k = \mathrm{E}\, X^k$, $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$
- *Ako se parametar* θ *može izraziti preko momenata kao* $\theta = g(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, $k << n$, *ocena parametra* θ *po metodi momenata je* $\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k)$

Primer: $\sigma^2 = \mathrm{E}\,(X^2) - (\mathrm{E}\, X)^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \implies \hat{\sigma^2} = \hat{\mu}_2 - (\hat{\mu}_1)^2 = s_0^2$

.

Kako se dobijaju ocene parametra?

Metod momenata:

- *Uzorak obima n:* $X_1, \dots, X_n$.
- *Moment reda k:* $\mu_k = \mathrm{E}\, X^k$, $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$
- *Ako se parametar* θ *može izraziti preko momenata kao* $\theta = g(\mu_1, \dots, \mu_k)$, $k << n$, *ocena parametra* θ *po metodi momenata je* $\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_k)$

Primer: $\sigma^2 = \mathrm{E}\,(X^2) - (\mathrm{E}\, X)^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \implies \hat{\sigma^2} = \hat{\mu}_2 - (\hat{\mu}_1)^2 = s_0^2$

.

Kako se dobijaju ocene parametra?

Metod momenata:

- *Uzorak obima n:* $X_1, \ldots, X_n$.
- *Moment reda k:* $\mu_k = \mathrm{E}\, X^k$, $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$
- *Ako se parametar* θ *može izraziti preko momenata kao* $\theta = g(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, $k << n$, *ocena parametra* θ *po metodi momenata je* $\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k)$

Primer: $\sigma^2 = \mathrm{E}\,(X^2) - (\mathrm{E}\, X)^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \implies \widehat{\sigma^2} = \hat{\mu}_2 - (\hat{\mu}_1)^2 = s_0^2$

.

Metod maksimalne verodostojnosti

- *Raspodela P_θ, nepoznati parametar θ - skalar ili višedimenzionalni.*
- *Uzorak obima n: $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.*
- *Funkcija verodostojnosti:- diskretna raspodela*

$$L(\theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P_\theta(x_1) \cdots P_\theta(x_n)$$

- *Funkcija verodostojnosti:- neprekidna raspodela*

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n)$$

- *Ocena po metodi maksimalne verodostojnosti: $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.*

Metod maksimalne verodostojnosti

- *Raspodela P_θ, nepoznati parametar θ - skalar ili višedimenzionalni.*
- *Uzorak obima n: $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.*
- *Funkcija verodostojnosti:- diskretna raspodela*

$$L(\theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P_\theta(x_1) \cdots P_\theta(x_n)$$

- *Funkcija verodostojnosti:- neprekidna raspodela*

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n)$$

- *Ocena po metodi maksimalne verodostojnosti: $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.*

Metod maksimalne verodostojnosti

- *Raspodela P_θ, nepoznati parametar θ - skalar ili višedimenzionalni.*
- *Uzorak obima n: $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.*
- *Funkcija verodostojnosti:- diskretna raspodela*

$$L(\theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P_\theta(x_1) \cdots P_\theta(x_n)$$

- *Funkcija verodostojnosti:- neprekidna raspodela*

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n)$$

- *Ocena po metodi maksimalne verodostojnosti: $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.*

Metod maksimalne verodostojnosti

- *Raspodela P_θ, nepoznati parametar θ - skalar ili višedimenzionalni.*
- *Uzorak obima n: $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.*
- *Funkcija verodostojnosti:- diskretna raspodela*

$$L(\theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P_\theta(x_1) \cdots P_\theta(x_n)$$

- *Funkcija verodostojnosti:- neprekidna raspodela*

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n)$$

- *Ocena po metodi maksimalne verodostojnosti: $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.*

Metod maksimalne verodostojnosti

- *Raspodela P_θ, nepoznati parametar θ - skalar ili višedimenzionalni.*
- *Uzorak obima n: $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$.*
- *Funkcija verodostojnosti:- diskretna raspodela*

$$L(\theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P_\theta(x_1) \cdots P_\theta(x_n)$$

- *Funkcija verodostojnosti:- neprekidna raspodela*

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n)$$

- *Ocena po metodi maksimalne verodostojnosti: $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.*

Metod maksimalne verodostojnosti

- *Raspodela* P_θ*, nepoznati parametar* θ *- skalar ili višedimenzionalni.*
- *Uzorak obima n:* $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
- *Funkcija verodostojnosti:- diskretna raspodela*

$$L(\theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P_\theta(x_1) \cdots P_\theta(x_n)$$

- *Funkcija verodostojnosti:- neprekidna raspodela*

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n)$$

- *Ocena po metodi maksimalne verodostojnosti:* $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.

Metod maksimalne verodostojnosti-primeri

Primer 149. *Ocena verovatnoće, parametar p u Bernulijevoj raspodeli: Neka je $X_1 + \cdots + X_n = k$.*

$$L(p) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Maksimum za $p = k/n$

Primer 150.

Normalna raspodela, parametar $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Funkcija verodostojnosti:

$$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(- \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) .$$

Logaritmujemo i odbacujemo sve sabirke koji ne zavise od parametara:

$$l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (x_i - \mu)^2 , \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 ,$$

Tražimo maksimum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu) = 0 , \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 = 0 . \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k , \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 .$$

Primer 153. $X_1, \ldots, X_n$ - nezavisan uzorak iz $\mathrm{Unif}\,[0, \theta]$.

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}\,, & x_1, \ldots, x_n \le \theta\,, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Za vežbu: Primeri 139, 140, 141 $\checkmark$, Zadaci 144, 145, 146, 147, 149, 151-161