6. Granične teoreme i njihove primene

Profesor Milan Merkle
emerkle@etf.rs milanmerkle.etf.rs

Matematička statistika- proleće 2021

Konvergencija i aproksimacija u matematici

U primenama matematike konvergencija se koristi za aproksimaciju. Na primer, iz

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

sledi da je

$$(1+3/100)^{100} \approx e^3 \quad \text{ili} \quad e^3 \approx (1+3/100)^{100}$$

Kod slučajnih promenljivih imamo komplikovaniju situaciju zbog toga što bliskost slučajnih promenljivih može da se posmatra u smislu bliskosti njihovih vrednosti, u smislu bliskosti njihovih raspodela ili još na neke druge definicije bliskosti.

U teoriji verovatnoće i statistike koristi se nekoliko različitih definicija konvergencije niza slučajnih promenljivih, a termin Granične teoreme *koristi se za teoreme koje pod određenim uslovima obezbeđuju konvergenciju niza slučajnih promenljivih kad obim uzorka (podataka) raste ka $+\infty$.*

Konvergencija i aproksimacija u matematici

U primenama matematike konvergencija se koristi za aproksimaciju. Na primer, iz

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

sledi da je

$$(1+3/100)^{100}\approx e^3 \quad \text{ili} \quad e^3\approx(1+3/100)^{100}$$

Kod slučajnih promenljivih imamo komplikovaniju situaciju zbog toga što bliskost slučajnih promenljivih može da se posmatra u smislu bliskosti njihovih vrednosti, u smislu bliskosti njihovih raspodela ili još na neke druge definicije bliskosti.

U teoriji verovatnoće i statistike koristi se nekoliko različitih definicija konvergencije niza slučajnih promenljivih, a termin Granične teoreme *koristi se za teoreme koje pod određenim uslovima obezbeđuju konvergenciju niza slučajnih promenljivih kad obim uzorka (podataka) raste ka $+\infty$.*

Konvergencija i aproksimacija u matematici

U primenama matematike konvergencija se koristi za aproksimaciju. Na primer, iz

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

sledi da je

$$(1+3/100)^{100} \approx e^3 \quad \text{ili} \quad e^3 \approx (1+3/100)^{100}$$

Kod slučajnih promenljivih imamo komplikovaniju situaciju zbog toga što bliskost slučajnih promenljivih može da se posmatra u smislu bliskosti njihovih vrednosti, u smislu bliskosti njihovih raspodela ili još na neke druge definicije bliskosti.

U teoriji verovatnoće i statistike koristi se nekoliko različitih definicija konvergencije niza slučajnih promenljivih, a termin Granične teoreme *koristi se za teoreme koje pod određenim uslovima obezbeđuju konvergenciju niza slučajnih promenljivih kad obim uzorka (podataka) raste ka* $+\infty$.

Konvergencija i aproksimacija u matematici

U primenama matematike konvergencija se koristi za aproksimaciju. Na primer, iz

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

sledi da je

$$(1+3/100)^{100} \approx e^3 \quad \text{ili} \quad e^3 \approx (1+3/100)^{100}$$

Kod slučajnih promenljivih imamo komplikovaniju situaciju zbog toga što bliskost slučajnih promenljivih može da se posmatra u smislu bliskosti njihovih vrednosti, u smislu bliskosti njihovih raspodela ili još na neke druge definicije bliskosti.

U teoriji verovatnoće i statistike koristi se nekoliko različitih definicija konvergencije niza slučajnih promenljivih, a termin Granične teoreme *koristi se za teoreme koje pod određenim uslovima obezbeđuju konvergenciju niza slučajnih promenljivih kad obim uzorka (podataka) raste ka* $+\infty$.

Konvergencija i aproksimacija u matematici

U primenama matematike konvergencija se koristi za aproksimaciju. Na primer, iz

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

sledi da je

$$(1+3/100)^{100} \approx e^3 \quad \text{ili} \quad e^3 \approx (1+3/100)^{100}$$

Kod slučajnih promenljivih imamo komplikovaniju situaciju zbog toga što bliskost slučajnih promenljivih može da se posmatra u smislu bliskosti njihovih vrednosti, u smislu bliskosti njihovih raspodela ili još na neke druge definicije bliskosti.

U teoriji verovatnoće i statistike koristi se nekoliko različitih definicija konvergencije niza slučajnih promenljivih, a termin Granične teoreme *koristi se za teoreme koje pod određenim uslovima obezbeđuju konvergenciju niza slučajnih promenljivih kad obim uzorka (podataka) raste ka $+\infty$.*

Konvergencija i aproksimacija u matematici

U primenama matematike konvergencija se koristi za aproksimaciju. Na primer, iz

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

sledi da je

$$(1+3/100)^{100} \approx e^3 \quad \text{ili} \quad e^3 \approx (1+3/100)^{100}$$

Kod slučajnih promenljivih imamo komplikovaniju situaciju zbog toga što bliskost slučajnih promenljivih može da se posmatra u smislu bliskosti njihovih vrednosti, u smislu bliskosti njihovih raspodela ili još na neke druge definicije bliskosti.

U teoriji verovatnoće i statistike koristi se nekoliko različitih definicija konvergencije niza slučajnih promenljivih, a termin Granične teoreme *koristi se za teoreme koje pod određenim uslovima obezbeđuju konvergenciju niza slučajnih promenljivih kad obim uzorka (podataka) raste ka* $+\infty$.

Konvergencija u strogom smislu

- *Konvergencija skoro svuda-stroga konvergencija:*

$$P(\lim_{n\to+\infty} X_n = X) = 1,$$

gde je limes definisan kao u matematici.

U primenama se češće koriste alternativni koncepti bliskosti slučajnih promenljivih, od kojih ćemo nekoliko definisati i koristiti u onome što sledi.

Konvergencija u strogom smislu

- *Konvergencija skoro svuda-stroga konvergencija:*

$$P(\lim_{n \to +\infty} X_n = X) = 1,$$

gde je limes definisan kao u matematici.

U primenama se češće koriste alternativni koncepti bliskosti slučajnih promenljivih, od kojih ćemo nekoliko definisati i koristiti u onome što sledi.

Konvergencija u strogom smislu

- *Konvergencija skoro svuda-stroga konvergencija:*

$$P(\lim_{n\to+\infty} X_n = X) = 1,$$

gde je limes definisan kao u matematici.

U primenama se češće koriste alternativni koncepti bliskosti slučajnih promenljivih, od kojih ćemo nekoliko definisati i koristiti u onome što sledi.

Konvergencija u strogom smislu

- *Konvergencija skoro svuda-stroga konvergencija:*

$$P(\lim_{n\to+\infty} X_n = X) = 1,$$

gde je limes definisan kao u matematici.

U primenama se češće koriste alternativni koncepti bliskosti slučajnih promenljivih, od kojih ćemo nekoliko definisati i koristiti u onome što sledi.

Konvergencija u raspodeli

$X_n \sim F_n, n = 1, 2, \ldots; X \sim F$.

Definicija 6.1. *Kažemo da niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako važi:*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \big(F_n = P(X_n \leq x), F(x) = P(X \leq x)\big)$$

u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ u kojoj je funkcija F neprekidna.

Teorema 6.2 *(teorema o neprekidnosti, Lévy continuity theorem).* *Niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako i samo ako je*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \quad \text{za svako } t \in \mathbb{R}. \ \checkmark \ ,$$

gde su φ i φ_n karakteristične funkcije za X_n i X $\left(\varphi_X(t) = \mathrm{E}\, e^{itX}\right)$.

Konvergencija u raspodeli

$X_n \sim F_n, n = 1, 2, \ldots; X \sim F$.

Definicija 6.1. *Kažemo da niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako važi:*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \big(F_n = P(X_n \leq x), F(x) = P(X \leq x)\big)$$

u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ u kojoj je funkcija F neprekidna.

Teorema 6.2 *(teorema o neprekidnosti, Lévy continuity theorem).* *Niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako i samo ako je*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \quad \text{za svako } t \in \mathbb{R}. \checkmark ,$$

gde su φ i φ_n karakteristične funkcije za X_n i X $(\varphi_X(t) = \mathrm{E}\, e^{itX})$.

Konvergencija u raspodeli

$X_n \sim F_n, n = 1, 2, \ldots; X \sim F$.

Definicija 6.1. Kažemo da niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako važi:

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \big(F_n = P(X_n \leq x), F(x) = P(X \leq x)\big)$$

u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ u kojoj je funkcija F neprekidna.

Teorema 6.2 *(teorema o neprekidnosti, Lévy continuity theorem).* *Niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako i samo ako je*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \quad \text{za svako } t \in \mathbb{R}. \ \checkmark \ ,$$

gde su φ i φ_n karakteristične funkcije za X_n i X $(\varphi_X(t) = \mathrm{E}\, e^{itX})$.

Konvergencija u raspodeli

$X_n \sim F_n, n = 1, 2, \ldots; X \sim F.$

Definicija 6.1. *Kažemo da niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako važi:*

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \big(F_n = P(X_n \leq x), F(x) = P(X \leq x)\big)$$

u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ u kojoj je funkcija F neprekidna.

Teorema 6.2 *(teorema o neprekidnosti, Lévy continuity theorem).* *Niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako i samo ako je*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \quad \text{za svako } t \in \mathbb{R}. \ \checkmark \ ,$$

gde su φ i φ_n karakteristične funkcije za X_n i X $(\varphi_X(t) = \mathrm{E}\, e^{itX})$.

Konvergencija u raspodeli

$X_n \sim F_n, n = 1, 2, \ldots; X \sim F$.

Definicija 6.1. *Kažemo da niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako važi:*

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \big(F_n = P(X_n \leq x), F(x) = P(X \leq x)\big)$$

u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ u kojoj je funkcija F neprekidna.

Teorema 6.2 *(teorema o neprekidnosti, Lévy continuity theorem).* *Niz slučajnih promenljivih X_n konvergira u raspodeli ka X ako i samo ako je*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \quad \text{za svako } t \in \mathbb{R}. \ \checkmark \ ,$$

gde su φ i φ_n karakteristične funkcije za X_n i X $(\varphi_X(t) = \mathrm{E}\, e^{itX})$.

Aproksimacija binomne raspodele Puasonovom $\surd$

Primer 121. *Za* $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{itk} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \left(1 + p_n\left(e^{it} - 1\right)\right)^n$$

Ako $n \to \infty$ *i* $np_n \to \lambda > 0$*:*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right) = \varphi_X, \ X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$$

Teorema o neprekidnosti: $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Empirijsko pravilo: *Za veliko* n *i* $np \le 5$, $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$*:*

$$P(X = k) \approx e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} \ \surd$$

Aproksimacija binomne raspodele Puasonovom $\surd$

Primer 121. *Za* $X_n \sim \mathrm{Bin}\,(n, p_n)$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{itk} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \left(1 + p_n\left(e^{it}-1\right)\right)^n$$

Ako $n \to \infty$ *i* $np_n \to \lambda > 0$:

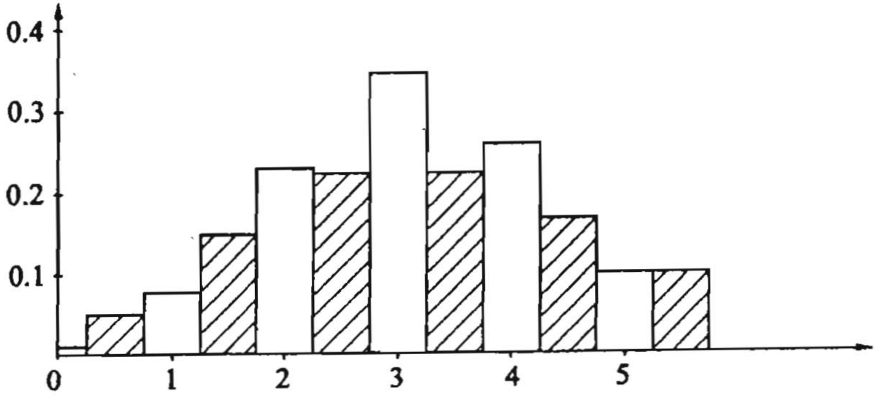
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \exp\left(\lambda\left(e^{it}-1\right)\right) = \varphi_X,\ \ X \sim \mathrm{Poiss}\,(\lambda)$$

Teorema o neprekidnosti: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Empirijsko pravilo: *Za veliko* n *i* $np \leq 5$, $X \sim \mathrm{Bin}\,(n, p)$:

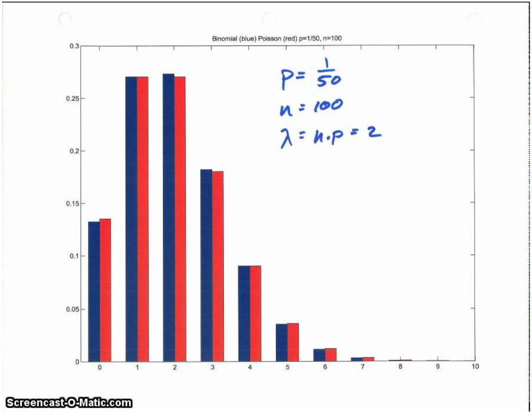
$$P(X = k) \approx e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} \quad \surd$$

Primer



Slika 28. Binomna raspodela ($n = 5, p = 3/5$) i njena Poissonova aproksimacija (osenčeno).

Primer



Slika 117. Histogrami binomne raspodele (plavo) i Puasonove aproksimacije za $n = 100$ i $np = 2$

Limes u verovatnoći i u srednjem kvadratnom smislu

Niz slučajnih promenljivih X_n

- Konvergencija u verovatnoći:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

- Srednja kvadratna konvergencija:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}\,(X_n - X)^2 = 0$$

Primer: $\mathrm{E}\,(\hat{\mu}_n - \mu)^2 = \mathrm{Var}\,(\hat{\mu}_n) \to 0$ (model merenja).

Srednja kvadratna $\Longrightarrow$ u verovatnoći $\Longrightarrow$ u raspodeli

Konvergencija se koristi za aproksimacije raspodela i njihovih momenata. Teoreme koje se odnose na konvergenciju (granične teoreme) utvrđuju uslove pod kojima se aproksimacija može primeniti.

Limes u verovatnoći i u srednjem kvadratnom smislu

Niz slučajnih promenljivih X_n

- Konvergencija u verovatnoći:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

- Srednja kvadratna konvergencija:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}\,(X_n - X)^2 = 0$$

Primer: $\mathrm{E}\,(\hat{\mu}_n - \mu)^2 = \mathrm{Var}\,(\hat{\mu}_n) \to 0$ (model merenja).

Srednja kvadratna $\Longrightarrow$ u verovatnoći $\Longrightarrow$ u raspodeli

Konvergencija se koristi za aproksimacije raspodela i njihovih momenata. Teoreme koje se odnose na konvergenciju (granične teoreme)utvrđuju uslove pod kojima se aproksimacija može primeniti.

Limes u verovatnoći i u srednjem kvadratnom smislu

Niz slučajnih promenljivih X_n

- Konvergencija u verovatnoći:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

- Srednja kvadratna konvergencija:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}\,(X_n - X)^2 = 0$$

Primer: $\mathrm{E}\,(\hat{\mu}_n - \mu)^2 = \mathrm{Var}\,(\hat{\mu}_n) \to 0$ (model merenja).

Srednja kvadratna $\Longrightarrow$ u verovatnoći $\Longrightarrow$ u raspodeli

Konvergencija se koristi za aproksimacije raspodela i njihovih momenata. Teoreme koje se odnose na konvergenciju (granične teoreme)utvrđuju uslove pod kojima se aproksimacija može primeniti.

Limes u verovatnoći i u srednjem kvadratnom smislu

Niz slučajnih promenljivih X_n

- Konvergencija u verovatnoći:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

- Srednja kvadratna konvergencija:-bliskost vrednosti X_n i X za veliko n.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}\,(X_n - X)^2 = 0$$

Primer: $\mathrm{E}\,(\hat{\mu}_n - \mu)^2 = \mathrm{Var}\,(\hat{\mu}_n) \to 0$ (model merenja).

Srednja kvadratna $\Longrightarrow$ u verovatnoći $\Longrightarrow$ u raspodeli

Konvergencija se koristi za aproksimacije raspodela i njihovih momenata. Teoreme koje se odnose na konvergenciju (granične teoreme)utvrđuju uslove pod kojima se aproksimacija može primeniti.

Nejednakosti Markova i Čebiševa

Teorema 6.3 (Markov) *Ako je $X \geq 0$ i postoji $\mathrm{E}\, X$:*

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}\,(X)}{\varepsilon} \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

Teorema 6.4 (Čebišev) *Za svaku slučajnu promenljivu X koja ima varijansu,*

$$P(|X - \mathrm{E}\, X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\, X}{\varepsilon^2} \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

Univerzalno pravilo tri sigme

Za $\varepsilon = 3\sqrt{VarX} = 3\sigma$:

$$P(|X - \mathrm{E}\, X| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} = 0.89$$

Važi za svaku raspodelu koja ima varijansu.

Nejednakosti Markova i Čebiševa

Teorema 6.3 (Markov) *Ako je $X \geq 0$ i postoji $\mathrm{E}\,X$:*

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}\,(X)}{\varepsilon} \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

Teorema 6.4 (Čebišev) *Za svaku slučajnu promenljivu X koja ima varijansu,*

$$P(|X - \mathrm{E}\,X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\,X}{\varepsilon^2} \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

Univerzalno pravilo tri sigme

Za $\varepsilon = 3\sqrt{VarX} = 3\sigma$:

$$P(|X - \mathrm{E}\,X| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} = 0.89$$

Važi za svaku raspodelu koja ima varijansu.

Nejednakosti Markova i Čebiševa

Teorema 6.3 (Markov) *Ako je $X \geq 0$ i postoji $\mathrm{E}\, X$:*

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}\,(X)}{\varepsilon} \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

Teorema 6.4 (Čebišev) *Za svaku slučajnu promenljivu X koja ima varijansu,*

$$P(|X - \mathrm{E}\, X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\, X}{\varepsilon^2} \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

Univerzalno pravilo tri sigme

Za $\varepsilon = 3\sqrt{VarX} = 3\sigma$:

$$P(|X - \mathrm{E}\, X| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} = 0.89$$

Važi za svaku raspodelu koja ima varijansu.

Zakon velikih brojeva

Teorema 6.5 (Slabi zakon velikih brojeva) *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne slučajne promenljive sa* $\mathrm{E}\, X_k = \mu$ *i neka postoji konstanta* V *takva da je* $\mathrm{Var}\, X_k \leq V$ *za svako* k*. Tada niz aritmetičkih sredina* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *konvergira u verovatnoći ka* μ*, tj.*

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\,\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{za svako } \varepsilon > 0. \checkmark$$

Dokaz preko nejednakosti Čebiševa.

- $\hat{\mu}_n$ je ocena matematičkog očekivanja μ.
- Obratite pažnju da X_i mogu imati različite raspodele.

Zakon velikih brojeva

Teorema 6.5 (Slabi zakon velikih brojeva) *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne slučajne promenljive sa* $\mathrm{E}\, X_k = \mu$ *i neka postoji konstanta* V *takva da je* $\mathrm{Var}\, X_k \le V$ *za svako* k*. Tada niz aritmetičkih sredina* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *konvergira u verovatnoći ka* μ*, tj.*

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\,\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \quad \textit{za svako } \varepsilon > 0. \checkmark$$

Dokaz preko nejednakosti Čebiševa.

- $\hat{\mu}_n$ je *ocena matematičkog očekivanja* μ
- *Obratite pažnju da* X_i *mogu imati različite raspodele.*

Zakon velikih brojeva

Teorema 6.5 (Slabi zakon velikih brojeva) *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne slučajne promenljive sa* $\mathrm{E}\, X_k = \mu$ *i neka postoji konstanta* V *takva da je* $\mathrm{Var}\, X_k \leq V$ *za svako* k. *Tada niz aritmetičkih sredina* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *konvergira u verovatnoći ka* μ, *tj.*

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\,\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{za svako } \varepsilon > 0. \checkmark$$

Dokaz preko nejednakosti Čebiševa.

- $\hat{\mu}_n$ *je ocena matematičkog očekivanja* μ
- *Obratite pažnju da* X_i *mogu imati različite raspodele.*

Zakon velikih brojeva

Teorema 6.5 (Slabi zakon velikih brojeva) *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne slučajne promenljive sa* $\mathrm{E}\, X_k = \mu$ *i neka postoji konstanta* V *takva da je* $\mathrm{Var}\, X_k \le V$ *za svako* k. *Tada niz aritmetičkih sredina* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *konvergira u verovatnoći ka* μ, *tj.*

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\,\hat{\mu}_n - \mu| \ge \varepsilon) = 0 \quad \text{za svako } \varepsilon > 0. \ \checkmark$$

Dokaz preko nejednakosti Čebiševa.

- $\hat{\mu}_n$ *je ocena matematičkog očekivanja* μ
- *Obratite pažnju da* X_i *mogu imati različite raspodele.*

Konvergencija skoro svuda?

Teorema 6.8-Strogi zakon velikih brojeva Kolmogorova.

Neka je $X_1, X_2, \dots X_n$ nezavisni uzorak iz raspodele slučajne promenljive X i $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, $n = 1, 2, \dots$.

1. **a)** $\mathrm{E}\, X = \mu$ *ako i samo ako*

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\mu}_n = \mu \quad \textit{skoro svuda.}$$

2. **b)** $\mathrm{E}\, X$ *ne postoji ako i samo ako $\hat{\mu}_n$ divergira skoro svuda.*

U primenama:

1. *Posmatramo niz $\hat{\mu}_n$ za rastuće vrednosti n*
2. *Ako iz niza $\hat{\mu}_n$ može zaključiti da postoji $\lim \hat{\mu}_n$, onda $\mu \approx \hat{\mu}_n$ za dovoljno veliko n*
3. *Ako postoje indikacije da niz ne konvergira, onda zaključujemo da raspodela nema matematičko očekivanje.*

Konvergencija skoro svuda?

Teorema 6.8-Strogi zakon velikih brojeva Kolmogorova.

Neka je $X_1, X_2, \dots X_n$ *nezavisni uzorak iz raspodele slučajne promenljive* X *i* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, $n = 1, 2, \dots$ *.*

1. **a)** $\mathrm{E}\, X = \mu$ *ako i samo ako*

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\mu}_n = \mu \quad \textit{skoro svuda.}$$

2. **b)** $\mathrm{E}\, X$ *ne postoji ako i samo ako* $\hat{\mu}_n$ *divergira skoro svuda.*

U primenama:

1. *Posmatramo niz* $\hat{\mu}_n$ *za rastuće vrednosti* n
2. *Ako iz niza* $\hat{\mu}_n$ *može zaključiti da postoji* $\lim \hat{\mu}_n$, *onda* $\mu \approx \hat{\mu}_n$ *za dovoljno veliko* n
3. *Ako postoje indikacije da niz ne konvergira, onda zaključujemo da raspodela nema matematičko očekivanje.*

Konvergencija skoro svuda?

Teorema 6.8-Strogi zakon velikih brojeva Kolmogorova.

Neka je $X_1, X_2, \ldots X_n$ nezavisni uzorak iz raspodele slučajne promenljive X i $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

1. **a)** $\mathrm{E}\, X = \mu$ *ako i samo ako*

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\mu}_n = \mu \quad \text{skoro svuda.}$$

2. **b)** $\mathrm{E}\, X$ *ne postoji ako i samo ako $\hat{\mu}_n$ divergira skoro svuda.*

U primenama:

1. *Posmatramo niz $\hat{\mu}_n$ za rastuće vrednosti n*
2. *Ako iz niza $\hat{\mu}_n$ može zaključiti da postoji $\lim \hat{\mu}_n$, onda $\mu \approx \hat{\mu}_n$ za dovoljno veliko n*
3. *Ako postoje indikacije da niz ne konvergira, onda zaključujemo da raspodela nema matematičko očekivanje.*

Konvergencija skoro svuda?

Teorema 6.8-Strogi zakon velikih brojeva Kolmogorova.

Neka je $X_1, X_2, \ldots X_n$ *nezavisni uzorak iz raspodele slučajne promenljive* X *i* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

1. **a)** $\mathrm{E}\, X = \mu$ *ako i samo ako*

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\mu}_n = \mu \quad \text{skoro svuda.}$$

2. **b)** $\mathrm{E}\, X$ *ne postoji ako i samo ako* $\hat{\mu}_n$ *divergira skoro svuda.*

U primenama:

1. *Posmatramo niz* $\hat{\mu}_n$ *za rastuće vrednosti* n
2. *Ako iz niza* $\hat{\mu}_n$ *može zaključiti da postoji* $\lim \hat{\mu}_n$, *onda* $\mu \approx \hat{\mu}_n$ *za dovoljno veliko* n
3. *Ako postoje indikacije da niz ne konvergira, onda zaključujemo da raspodela nema matematičko očekivanje.*

Konvergencija skoro svuda?

Teorema 6.8-Strogi zakon velikih brojeva Kolmogorova.

Neka je $X_1, X_2, \dots X_n$ *nezavisni uzorak iz raspodele slučajne promenljive* X *i* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, $n = 1, 2, \dots$.

1. **a)** $\mathrm{E}\, X = \mu$ *ako i samo ako*

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{\mu}_n = \mu \quad \text{skoro svuda.}$$

2. **b)** $\mathrm{E}\, X$ *ne postoji ako i samo ako* $\hat{\mu}_n$ *divergira skoro svuda.*

U primenama:

1. *Posmatramo niz* $\hat{\mu}_n$ *za rastuće vrednosti* n
2. *Ako iz niza* $\hat{\mu}_n$ *može zaključiti da postoji* $\lim \hat{\mu}_n$, *onda* $\mu \approx \hat{\mu}_n$ *za dovoljno veliko* n
3. *Ako postoje indikacije da niz ne konvergira, onda zaključujemo da raspodela nema matematičko očekivanje.*

Konvergencija skoro svuda?

Teorema 6.8-Strogi zakon velikih brojeva Kolmogorova.

Neka je $X_1, X_2, \ldots X_n$ *nezavisni uzorak iz raspodele slučajne promenljive* X *i* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *.*

1. **a)** $\mathrm{E}\, X = \mu$ *ako i samo ako*

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\mu}_n = \mu \quad \textit{skoro svuda.}$$

2. **b)** $\mathrm{E}\, X$ *ne postoji ako i samo ako* $\hat{\mu}_n$ *divergira skoro svuda.*

U primenama:

1. *Posmatramo niz* $\hat{\mu}_n$ *za rastuće vrednosti* n
2. *Ako iz niza* $\hat{\mu}_n$ *može zaključiti da postoji* $\lim \hat{\mu}_n$*, onda* $\mu \approx \hat{\mu}_n$ *za dovoljno veliko* n
3. *Ako postoje indikacije da niz ne konvergira, onda zaključujemo da raspodela nema matematičko očekivanje.*

Konvergencija skoro svuda?

Teorema 6.8-Strogi zakon velikih brojeva Kolmogorova.

Neka je $X_1, X_2, \dots X_n$ *nezavisni uzorak iz raspodele slučajne promenljive* X *i* $\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, $n = 1, 2, \dots$.

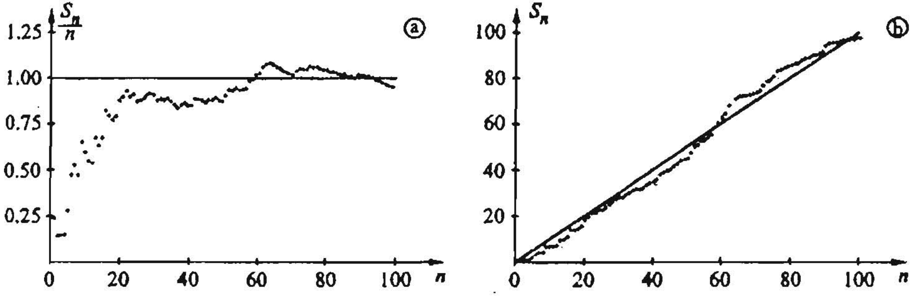
1. **a)** $\mathrm{E}\, X = \mu$ *ako i samo ako*

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{\mu}_n = \mu \quad \text{skoro svuda.}$$

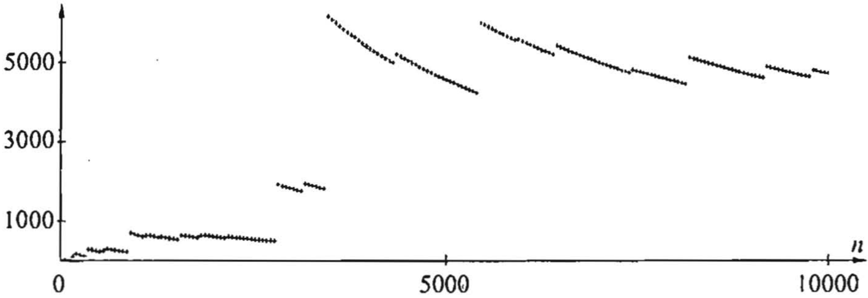
2. **b)** $\mathrm{E}\, X$ *ne postoji ako i samo ako* $\hat{\mu}_n$ *divergira skoro svuda.*

U primenama:

1. *Posmatramo niz* $\hat{\mu}_n$ *za rastuće vrednosti* n
2. *Ako iz niza* $\hat{\mu}_n$ *može zaključiti da postoji* $\lim \hat{\mu}_n$, *onda* $\mu \approx \hat{\mu}_n$ *za dovoljno veliko* n
3. *Ako postoje indikacije da niz ne konvergira, onda zaključujemo da raspodela nema matematičko očekivanje.*



Slika 29. Ponašanje $\hat{\mu}_n$ *i* S_n *za eksponencijalnu raspodelu sa parametrom* 1 *(računarska simulacija).*



Slika 30. Ponašanje ocene drugog momenta CAUCHY*jeve raspodele (računarska simulacija).*

Statistička definicija verovatnoće preko ZVB

- *Radi ocene verovatnoće događaja A sa nepoznatom verovatnoćom $p = P(A)$, eksperiment se ponavlja n puta.*
- *Neka je $X_i = I_A$ indikator događaja A u i-tom ponavljanju.*
- *Definišemo $m_n = X_1 + \cdots + X_n$ (broj realizacija događaja A u n ponavljanja.*
- $\hat{p}_n = \dfrac{m_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdot + X_n}{n}$ *je ocena nepoznate verovatnoće p*
- *ZVB $\implies$ $\hat{p}_n \to p$ u verovatnoći*

Statistička definicija verovatnoće preko ZVB

- *Radi ocene verovatnoće događaja A sa nepoznatom verovatnoćom $p = P(A)$, eksperiment se ponavlja n puta.*
- *Neka je $X_i = I_A$ indikator događaja A u i-tom ponavljanju.*
- *Definišemo $m_n = X_1 + \cdots + X_n$ (broj realizacija događaja A u n ponavljanja.*
- $\hat{p}_n = \dfrac{m_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdot + X_n}{n}$ *je ocena nepoznate verovatnoće p*
- *ZVB $\Longrightarrow$ $\hat{p}_n \to p$ u verovatnoći*

Statistička definicija verovatnoće preko ZVB

- *Radi ocene verovatnoće događaja A sa nepoznatom verovatnoćom $p = P(A)$, eksperiment se ponavlja n puta.*
- *Neka je $X_i = I_A$ indikator događaja A u i-tom ponavljanju.*
- *Definišemo $m_n = X_1 + \cdots + X_n$ (broj realizacija događaja A u n ponavljanja.*
- $\hat{p}_n = \dfrac{m_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdot + X_n}{n}$ *je ocena nepoznate verovatnoće p*
- *ZVB $\implies$ $\hat{p}_n \to p$ u verovatnoći*

Statistička definicija verovatnoće preko ZVB

- *Radi ocene verovatnoće događaja A sa nepoznatom verovatnoćom $p = P(A)$, eksperiment se ponavlja n puta.*
- *Neka je $X_i = I_A$ indikator događaja A u i-tom ponavljanju.*
- *Definišemo $m_n = X_1 + \cdots + X_n$ (broj realizacija događaja A u n ponavljanja.*
- $\hat{p}_n = \dfrac{m_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdot + X_n}{n}$ *je ocena nepoznate verovatnoće p*
- *ZVB $\implies$ $\hat{p}_n \to p$ u verovatnoći*

Statistička definicija verovatnoće preko ZVB

- *Radi ocene verovatnoće događaja A sa nepoznatom verovatnoćom $p = P(A)$, eksperiment se ponavlja n puta.*
- *Neka je $X_i = I_A$ indikator događaja A u i-tom ponavljanju.*
- *Definišemo $m_n = X_1 + \cdots + X_n$ (broj realizacija događaja A u n ponavljanja.*
- $\hat{p}_n = \dfrac{m_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdot + X_n}{n}$ *je ocena nepoznate verovatnoće p*
- *ZVB $\Longrightarrow$ $\hat{p}_n \to p$ u verovatnoći*

Statistička definicija verovatnoće preko ZVB

- *Radi ocene verovatnoće događaja A sa nepoznatom verovatnoćom $p = P(A)$, eksperiment se ponavlja n puta.*
- *Neka je $X_i = I_A$ indikator događaja A u i-tom ponavljanju.*
- *Definišemo $m_n = X_1 + \cdots + X_n$ (broj realizacija događaja A u n ponavljanja.*
- $\hat{p}_n = \dfrac{m_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdot + X_n}{n}$ *je ocena nepoznate verovatnoće p*
- *ZVB* $\Longrightarrow$ $\hat{p}_n \to p$ *u verovatnoći*

Koliko veliko *n* treba da bude?

Iz ZVB sledi da je, za dato $\varepsilon > 0$ *i za svako* $\alpha \in (0,1)$ *postoji n takvo da je* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

- *Čebišev:* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V}{n\varepsilon^2}$
- $n \geq \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot \alpha}$ *ali granica za n je prevelika!*

- *U slučaju ocene verovatnoće,* $V = p(1-p)$ *zavisi od p. Tada uzimamo najveću vrednost* $V = 1/4$, *ili aproksimaciju* $V \approx \hat{p}_n(1-\hat{p}_n$.
- *Slično se postupa i kod ocene očekivanja ako varijansa zavisi od* μ.

Koliko veliko n treba da bude?

Iz ZVB sledi da je, za dato $\varepsilon > 0$ i za svako $\alpha \in (0,1)$ postoji n takvo da je $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

- *Čebišev:* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{n\varepsilon^2}$
- $n \geq \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot \alpha}$ *ali granica za n je prevelika!*

- *U slučaju ocene verovatnoće, $V = p(1-p)$ zavisi od p. Tada uzimamo najveću vrednost $V = 1/4$, ili aproksimaciju $V \approx \hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$.*
- *Slično se postupa i kod ocene očekivanja ako varijansa zavisi od μ.*

Koliko veliko n treba da bude?

Iz ZVB sledi da je, za dato $\varepsilon > 0$ i za svako $\alpha \in (0,1)$ postoji n takvo da je $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

- *Čebišev:* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{n\varepsilon^2}$
- $n \geq \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot \alpha}$ *ali granica za n je prevelika!*

- *U slučaju ocene verovatnoće, $V = p(1-p)$ zavisi od p. Tada uzimamo najveću vrednost $V = 1/4$, ili aproksimaciju $V \approx \hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$.*
- *Slično se postupa i kod ocene očekivanja ako varijansa zavisi od μ.*

Koliko veliko n treba da bude?

Iz ZVB sledi da je, za dato $\varepsilon > 0$ i za svako $\alpha \in (0,1)$ postoji n takvo da je $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

- *Čebišev:* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{n\varepsilon^2}$
- $n \geq \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot \alpha}$ *ali granica za n je prevelika!*

- *U slučaju ocene verovatnoće, $V = p(1-p)$ zavisi od p. Tada uzimamo najveću vrednost $V = 1/4$, ili aproksimaciju $V \approx \hat{p}_n(1 - \hat{p}_n$.*
- *Slično se postupa i kod ocene očekivanja ako varijansa zavisi od μ.*

Koliko veliko n treba da bude?

Iz ZVB sledi da je, za dato $\varepsilon > 0$ i za svako $\alpha \in (0,1)$ postoji n takvo da je $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

- *Čebišev:* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{n\varepsilon^2}$
- $n \geq \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot \alpha}$ *ali granica za n je prevelika!*

- *U slučaju ocene verovatnoće, $V = p(1-p)$ zavisi od p. Tada uzimamo najveću vrednost $V = 1/4$, ili aproksimaciju $V \approx \hat{p}_n(1 - \hat{p}_n$.*
- *Slično se postupa i kod ocene očekivanja ako varijansa zavisi od μ.*

Koliko veliko n treba da bude?

Iz ZVB sledi da je, za dato $\varepsilon > 0$ i za svako $\alpha \in (0,1)$ postoji n takvo da je $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

- *Čebišev:* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{n\varepsilon^2}$
- $n \geq \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot \alpha}$ *ali granica za n je prevelika!*

- *U slučaju ocene verovatnoće, $V = p(1-p)$ zavisi od p. Tada uzimamo najveću vrednost $V = 1/4$, ili aproksimaciju $V \approx \hat{p}_n(1-\hat{p}_n$.*
- *Slično se postupa i kod ocene očekivanja ako varijansa zavisi od μ.*

Koliko veliko n treba da bude?

Iz ZVB sledi da je, za dato $\varepsilon > 0$ i za svako $\alpha \in (0,1)$ postoji n takvo da je $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$.

- *Čebišev:* $P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{n\varepsilon^2}$
- $n \geq \frac{V}{\varepsilon^2 \cdot \alpha}$ *ali granica za n je prevelika!*

- *U slučaju ocene verovatnoće,* $V = p(1-p)$ *zavisi od* p. *Tada uzimamo najveću vrednost* $V = 1/4$, *ili aproksimaciju* $V \approx \hat{p}_n(1 - \hat{p}_n$.
- *Slično se postupa i kod ocene očekivanja ako varijansa zavisi od* μ.

Centralna granična teorema

Neka je X_i, $i = 1, 2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom, $\mathrm{E}\,X = \mu$, $\mathrm{Var}\,X = \sigma^2$. *Normirani zbir*

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

ima $\mathrm{E}\,Z_n = 0$, $\mathrm{Var}\,Z_n = 1$.

Teorema 6.9 *Niz Z_n konvergira u raspodeli ka $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, tj.*

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Centralna granična teorema

Neka je X_i*,* $i = 1, 2, \ldots$ *niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom,* $\mathrm{E}\,X = \mu$*,* $\mathrm{Var}\,X = \sigma^2$*. Normirani zbir*

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

ima $\mathrm{E}\,Z_n = 0$*,* $\mathrm{Var}\,Z_n$*=1.*

Teorema 6.9 *Niz* Z_n *konvergira u raspodeli ka* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$*, tj.*

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

za svako $x \in \mathbb{R}$*.*

CGT - dokaz

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{(X_1 - \mu) + \cdots + (X_n - mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

- Možemo pretpostaviti da je $\mu = 0$. Karakteristična funkcija za Z_n je $\varphi_n(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$.
- Treba dokazati da je $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = e^{-t^2/2}$, za svako $t \in \mathbb{R}$.
- Smena: $\tau = \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$; $\Psi(\tau) = \log(\varphi_n(t))$
- $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = e^{-t^2/2} \iff \lim_{\tau\to 0} \Psi(\tau) = -t^2/2$
- $\Psi(\tau) = \Psi(0) + \Psi'(0)\tau + \Psi''(0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2)$ $(\tau \to 0)$
- $\Psi(0) = 0$, $\Psi'(0) = 0$, $\Psi''(0) = -n\sigma^2$.
- $\Psi(\tau) = -n\sigma^2 \cdot \tau^2 + o(\tau^2) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2/\sigma^2 n)$ $(n \to +\infty)$
- Dokazano!

Procena greške

Za fiksno n, neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom, i neka je F_n funkcija raspodele slučajne promenljive Z_n (normiranog zbira). CGT tvrdi da $F_n(t) \to \Phi(t)$ za svako t. To znači da za veliko n možemo da kažemo da je $F_n(t) \approx \Phi(t)$. Koliko n treba da bude da bi se greška aproksimacija bila ispod zadatog nivoa?

Teorema 6.12 (Berry-Eseén) *Neka je $m_3 = \mathrm{E}\,|X_1 - \mu|^3$. Tada je*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \cdot \frac{m_3}{\sigma^3 \sqrt{n}},$$

gde je $C < \frac{1}{2}$ konstanta koja ne zavisi od raspodele za X_k.

Procena greške

Za fiksno n, neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom, i neka je F_n funkcija raspodele slučajne promenljive Z_n (normiranog zbira). CGT tvrdi da $F_n(t) \to \Phi(t)$ za svako t. To znači da za veliko n možemo da kažemo da je $F_n(t) \approx \Phi(t)$. Koliko n treba da bude da bi se greška aproksimacija bila ispod zadatog nivoa?

Teorema 6.12 (Berry-Eseén) *Neka je $m_3 = \mathrm{E}\,|X_1 - \mu|^3$. Tada je*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \le C \cdot \frac{m_3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

gde je $C < \frac{1}{2}$ konstanta koja ne zavisi od raspodele za X_k.

Aproksimacije preko CGT

Za bilo koju početnu raspodelu i za $n \geq 20$ (empirijsko pravilo):

Normirani zbir Z_n

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Zbir

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Aritmetička sredina

$$\hat{\mu}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{\hat{\mu}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Aproksimacije preko CGT

Za bilo koju početnu raspodelu i za $n \geq 20$ (empirijsko pravilo):

Normirani zbir Z_n

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Zbir

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Aritmetička sredina

$$\hat{\mu}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{\hat{\mu}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Aproksimacije preko CGT

Za bilo koju početnu raspodelu i za $n \geq 20$ (empirijsko pravilo):

Normirani zbir Z_n

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Zbir

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Aritmetička sredina

$$\hat{\mu}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \qquad \frac{\hat{\mu}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Koliko n treba da bude?

Primer 126. *Uzimamo uzorak* $X_1, \ldots, X_n$ *iz raspodele sa (nepoznatim) matematičkim očekivanjem* μ *i (poznatom) varijansom* σ^2 *i računamo ocenu* $\hat{\mu}$. *Koliko n treba da bude da bi bio zadovoljen uslov*

$$P(|\hat{\mu}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$$

za date parametre $\varepsilon > 0$ *i* $\alpha \in [0,1]$? *Naći brojnu vrednost za n sa* $\sigma^2 = 4$, $\varepsilon = 0.1$ *i* $\alpha = 0.1$

R: Preko CGT: $n \geq \dfrac{\sigma^2 K^2_{1-\alpha/2}}{\varepsilon^2} = 1100$ *Preko Čebiševa:* $n \geq \dfrac{\sigma^2}{\alpha\varepsilon^2} = 4000$

Aproksimacije raspodela preko CGT

Binomna raspodela
Ako je početna raspodela Bernulijeva sa verovatnoćom uspeha p*, onda je raspodela zbira* $\mathrm{Bin}\,(n,p)$*.*

$$\mathrm{Bin}\,(n,p) \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

za $n \geq 20$*. Ova aproksimacija primenjuje se za* $np > 5$ *(za* $np < 5$ *- Puasonova aproksimacija).*

Primer 128 *Ako je* $X \sim \mathrm{Bin}\,(100, 1/2)$*, naći približnu vrednost verovatnoća:* **a)** $P(X > 60)$, **b)** $P(40 < X < 60)$, **c)** $P(X = 50)$.

Aproksimacije raspodela preko CGT

Binomna raspodela

Ako je početna raspodela Bernulijeva sa verovatnoćom uspeha p, onda je raspodela zbira $\mathrm{Bin}\,(n, p)$.

$$\mathrm{Bin}\,(n, p) \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

za $n \geq 20$. *Ova aproksimacija primenjuje se za* $np > 5$ *(za* $np < 5$ *- Puasonova aproksimacija).*

Primer 128 *Ako je* $X \sim \mathrm{Bin}\,(100, 1/2)$, *naći približnu vrednost verovatnoća:* **a)** $P(X > 60)$, **b)** $P(40 < X < 60)$, **c)** $P(X = 50)$.

Aproksimacije raspodela preko CGT-nastavak

Puasonova raspodela

Ako je početna raspodela $\mathrm{Poiss}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$, *onda je raspodela zbira* $\mathrm{Poiss}\left(\lambda\right)$.

$$\mathrm{Poiss}\left(\lambda\right) \sim \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

Ova aproksimacija koristi se za $\lambda \geq 10$ *(za male vrednosti* λ *nema ni potrebe za aproksimacijom).*

Za vežbu: Primeri 126,128,129. Zadaci: 125-139, 307-311.