11. Uslovne raspodele (MAST)

Profesor Milan Merkle
emerkle@etf.rs milanmerkle.etf.rs

Matematička Statistika-jesen 2019

Uvod: Uslovna verovatnoća

Uslovna verovatnoća

Događaji: $A,B,C,D,..$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$$P(ABCD) = P(A)P(B|A)P(C|AB)P(D|ABC)$$

Formula totalne verovatnoće

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$$

Bajesova formula

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)}$$

Uvod: Uslovna verovatnoća

Uslovna verovatnoća

Događaji: $A, B, C, D, ..$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$$P(ABCD) = P(A)P(B|A)P(C|AB)P(D|ABC)$$

Formula totalne verovatnoće

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$$

Bajesova formula

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)}$$

Uvod: Uslovna verovatnoća

Uslovna verovatnoća

Događaji: $A, B, C, D, ..$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$$P(ABCD) = P(A)P(B|A)P(C|AB)P(D|ABC)$$

Formula totalne verovatnoće

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$$

Bajesova formula

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)}$$

Uslovne raspodele-diskretni slučaj

Primer 178 *Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, $X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_2)$. Odrediti uslovnu raspodelu za X u odnosu na slučajnu promenljivu $S = X + Y$.*

Po modelu $P(A|B) = P(AB)/P(B)$:

$$P(X = k|S = n) = \frac{P(X = k, S = n)}{P(S = n)} = \frac{P(X = k) \cdot P(Y = n - k)}{P(S = n)}, n \geq k$$

$$P(X = k|S) = \binom{S}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Uslovna raspodela je funkcija slučajne promenljive S.

Primer 179 *Pošta ima dva šaltera za dve različite usluge. Broj osoba u redu: $X, Y \sim \mathrm{Poiss}(5)$, nezavisne Ako se zna da u oba reda ukupno ima 12 osoba, naći verovatnoću da u prvom redu ima 4 manje od 5 osoba.*

Uslovne raspodele-diskretni slučaj

Primer 178 *Neka su* X *i* Y *nezavisne slučajne promenljive,* $X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_2)$. *Odrediti uslovnu raspodelu za* X *u odnosu na slučajnu promenljivu* $S = X + Y$.

Po modelu $P(A|B) = P(AB)/P(B)$*:*

$$P(X = k|S = n) = \frac{P(X = k, S = n)}{P(S = n)} = \frac{P(X = k) \cdot P(Y = n - k)}{P(S = n)}, n \geq k$$

$$P(X = k|S) = \binom{S}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Uslovna raspodela je funkcija slučajne promenljive S.

Primer 179 *Pošta ima dva šaltera za dve različite usluge. Broj osoba u redu:* $X, Y \sim \mathrm{Poiss}(5)$, *nezavisne Ako se zna da u oba reda ukupno ima 12 osoba, naći verovatnoću da u prvom redu ima 4 manje od 5 osoba.*

Uslovne raspodele-diskretni slučaj

Primer 178 *Neka su* X *i* Y *nezavisne slučajne promenljive,* $X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_2)$. *Odrediti uslovnu raspodelu za* X *u odnosu na slučajnu promenljivu* $S = X + Y$.

Po modelu $P(A|B) = P(AB)/P(B)$:

$$P(X = k|S = n) = \frac{P(X = k, S = n)}{P(S = n)} = \frac{P(X = k) \cdot P(Y = n - k)}{P(S = n)}, n \geq k$$

$$P(X = k|S) = \binom{S}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Uslovna raspodela je funkcija slučajne promenljive S.

Primer 179 *Pošta ima dva šaltera za dve različite usluge. Broj osoba u redu:* $X, Y \sim \mathrm{Poiss}(5)$, *nezavisne Ako se zna da u oba reda ukupno ima 12 osoba, naći verovatnoću da u prvom redu ima 4 manje od 5 osoba.*

Uslov verovatnoće nula

(X, Y) - *slučajni vektor sa neprekidnom zajedničkom raspodelom (na primer, 2D normalna). Uslovna raspodela za X pod uslovom da znamo $Y = 2$? Ako imitiramo diskretni slučaj, dobijamo*

$$P(X \le x | Y = 2) = \frac{P(X \le x, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{0}{0}.$$

Pristup preko gustina i limesa (Lopital):

$$P(X \le x | Y \in [2, 2+h)) = \frac{\int_2^{2+h} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}{\int_2^{2+h} f_Y(v)\, \mathrm{d}v}$$

$$P(X \le x | Y = 2) = \lim_{h \to 0} P(X \le x | Y \in [2, 2+h)) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, 2)}{f_Y(2)}\, \mathrm{d}u$$

Ne može ako je $f_Y(2) = 0$

Uslov verovatnoće nula

(X, Y) - slučajni vektor sa neprekidnom zajedničkom raspodelom (na primer, 2D normalna). Uslovna raspodela za X pod uslovom da znamo $Y = 2$? Ako imitiramo diskretni slučaj, dobijamo

$$P(X \le x | Y = 2) = \frac{P(X \le x, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{0}{0}.$$

Pristup preko gustina i limesa (Lopital):

$$P(X \le x | Y \in [2, 2+h)) = \frac{\int_2^{2+h} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}{\int_2^{2+h} f_Y(v)\, \mathrm{d}v}$$

$$P(X \le x | Y = 2) = \lim_{h \to 0} P(X \le x | Y \in [2, 2+h)) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, 2)}{f_Y(2)}\, \mathrm{d}u$$

Ne može ako je $f_Y(2) = 0$

Uslovna gustina i uslovna funkcija raspodele

Neka su X i Y neprekidne slučajne promenljive sa zajedničkom gustinom $f(\cdot,\cdot)$ i neka je $f_Y(\cdot)$ marginalna gustina za Y.

Definicija 11.3

- Uslovna gustina slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

- Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$:

$$P(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}u\,.$$

- Uslovna gustina za X u odnosu na Y: $f_{X|Y}(x|Y)$.
  Slučajna promenljiva

Uslovna gustina i uslovna funkcija raspodele

Neka su X i Y neprekidne slučajne promenljive sa zajedničkom gustinom $f(\cdot,\cdot)$ i neka je $f_Y(\cdot)$ marginalna gustina za Y.

Definicija 11.3

- Uslovna gustina slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y=y\}$:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

- Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y=y\}$:

$$P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}u\,.$$

- Uslovna gustina za X u odnosu na Y: $f_{X|Y}(x|Y)$.
  Slučajna promenljiva

Uslovna gustina i uslovna funkcija raspodele

Neka su X i Y neprekidne slučajne promenljive sa zajedničkom gustinom $f(\cdot,\cdot)$ i neka je $f_Y(\cdot)$ marginalna gustina za Y.

Definicija 11.3

- Uslovna gustina slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

- Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$:

$$P(X \leq x | Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} \, \mathrm{d}u \, .$$

- Uslovna gustina za X u odnosu na Y: $f_{X|Y}(x|Y)$.
  Slučajna promenljiva

Normalna raspodela

Parametri: $\mu_1 = \mu_2 = 0$, σ_1^2,$\sigma_2^2 > 0$, $\rho \in (0,1)$.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\rho(\sigma_1/\sigma_2)y)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right)$$

U opštem slučaju ovo je normalna raspodela sa matematičkim očekivanjem $\mu_1 + \rho(\sigma_1/\sigma_2)(Y - \mu_2)$ i varijansom $\sigma_1^2(1-\rho^2)$.

Neprekidna verzija totalne verovatnoće i Bajesove formule

Formula totalne verovatnoće - po modelu $P(D) = \sum_k P(D|H_k)P(H_k)$.
Y *neprekidna slučajna promenljiva:*

$$P(X \in D) = \int P(X \in D | Y = y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

gde je $D \subset \mathbb{R}$ *(na primer, interval, unija intervala ili skup tačaka)*

Bajesova formula- po modelu: $P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(D|H_k)P(H_k)}$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int f_{Y|X}(y|t)f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

X*-apriorna raspodela;* $X|Y$*-aposteriorna*

Neprekidna verzija totalne verovatnoće i Bajesove formule

Formula totalne verovatnoće - po modelu $P(D) = \sum_k P(D|H_k)P(H_k)$.
Y *neprekidna slučajna promenljiva:*

$$P(X \in D) = \int P(X \in D | Y = y) f_Y(y)\, \mathrm{d}y,$$

gde je $D \subset \mathbb{R}$ *(na primer, interval, unija intervala ili skup tačaka)*

Bajesova formula- po modelu: $P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{\sum_k P(D|H_k)P(H_k)}$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int f_{Y|X}(y|t) f_X(t)\, \mathrm{d}t}$$

X*-apriorna raspodela;* $X|Y$*-aposteriorna*

Primer 181.

Signal $S \sim \mathrm{Exp}(1)$ (apriorna raspodela), Gausov šum $\mathcal{N}(0,1)$. Signal $+$ šum $:=$ $Y|S = s \sim \mathcal{N}(s,1)$, S neopservabilno. Tražimo $f_{S|Y}$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^{+\infty} f_{Y|S}(y|s) f_S(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-s)^2}{2} - s\right)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((s-y+1)^2 + (2y-1)\right)\right)\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-y+1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1-y}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = e^{-y+1/2}\Phi(y-1)
\end{aligned}$$

Uslovna gustina za S u odnosu na Y (aposteriorna raspodela)

$$f_{S|Y}(s|y) = \frac{f_{Y|S}(y|s) f_S(s)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Phi(y-1)} e^{-\frac{1}{2}(s-y+1)^2}, \quad s \geq 0. \qquad (1)$$

X neprekidna, uslov diskretan

Ako je $P(Y = y) > 0$, uslovna gustina od $X|Y$ je:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{P(Y = y|X = x)f_X(x)}{P(Y = y)} = \frac{P(Y = y|X = x)f_X(x)}{\int P(Y = y|X = t)f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Bajesovska paradigma

Klasična (frekvencionistička) parametarska statistika:

- *Verovatnoća se definiše kao relativna frekvencija, pretpostavljajući da se eksperiment može ponavljati proizvoljno mnogo puta.*
- *Parametar θ ima brojnu vrednost, koja nam je nepoznata.*
- *95% interval poverenja je slučajni interval koji sadrži stvarnu vrednost parametra u 95% slučajeva*
- *Teorija testiranja hipoteza je takođe zasnovana na relativnoj frekvenciji.*

Bajesovska paradigma

Klasična (frekvencionistička) parametarska statistika:

- *Verovatnoća se definiše kao relativna frekvencija, pretpostavljajući da se eksperiment može ponavljati proizvoljno mnogo puta.*
- *Parametar θ ima brojnu vrednost, koja nam je nepoznata.*
- *95% interval poverenja je slučajni interval koji sadrži stvarnu vrednost parametra u 95% slučajeva*
- *Teorija testiranja hipoteza je takođe zasnovana na relativnoj frekvenciji.*

Bajesovska paradigma

Klasična (frekvencionistička) parametarska statistika:

- *Verovatnoća se definiše kao relativna frekvencija, pretpostavljajući da se eksperiment može ponavljati proizvoljno mnogo puta.*
- *Parametar θ ima brojnu vrednost, koja nam je nepoznata.*
- *95% interval poverenja je slučajni interval koji sadrži stvarnu vrednost parametra u 95% slučajeva*
- *Teorija testiranja hipoteza je takođe zasnovana na relativnoj frekvenciji.*

Bajesovska paradigma

Klasična (frekvencionistička) parametarska statistika:

- *Verovatnoća se definiše kao relativna frekvencija, pretpostavljajući da se eksperiment može ponavljati proizvoljno mnogo puta.*
- *Parametar θ ima brojnu vrednost, koja nam je nepoznata.*
- 95% *interval poverenja je slučajni interval koji sadrži stvarnu vrednost parametra u* 95% *slučajeva*
- *Teorija testiranja hipoteza je takođe zasnovana na relativnoj frekvenciji.*

Bajesovska paradigma

Klasična (frekvencionistička) parametarska statistika:

- *Verovatnoća se definiše kao relativna frekvencija, pretpostavljajući da se eksperiment može ponavljati proizvoljno mnogo puta.*
- *Parametar θ ima brojnu vrednost, koja nam je nepoznata.*
- 95% *interval poverenja je slučajni interval koji sadrži stvarnu vrednost parametra u* 95% *slučajeva*
- *Teorija testiranja hipoteza je takođe zasnovana na relativnoj frekvenciji.*

Bajesovska statistika:

- *Verovatnoće se mogu definisati na razne načine, na primer subjektivno, ukoliko takav model nije protivrečan aksiomama Kolmogorova.*
- *Parametar θ je slučajna promenljiva, kojoj se dodeljuje apriorna raspodela.*
- *Ocena parametra θ je tačka maksimuma aposteriorne raspodele.*
- *Intervali pokrivanja i testiranje hipoteza su bazirani na aposteriornim raspodelama.*

Bajesovska statistika:

- *Verovatnoće se mogu definisati na razne načine, na primer subjektivno, ukoliko takav model nije protivrečan aksiomama Kolmogorova.*
- *Parametar θ je slučajna promenljiva, kojoj se dodeljuje apriorna raspodela.*
- *Ocena parametra θ je tačka maksimuma aposteriorne raspodele.*
- *Intervali pokrivanja i testiranje hipoteza su bazirani na aposteriornim raspodelama.*

Bajesovska statistika:

- *Verovatnoće se mogu definisati na razne načine, na primer subjektivno, ukoliko takav model nije protivrečan aksiomama Kolmogorova.*
- *Parametar θ je slučajna promenljiva, kojoj se dodeljuje apriorna raspodela.*
- *Ocena parametra θ je tačka maksimuma aposteriorne raspodele.*
- *Intervali pokrivanja i testiranje hipoteza su bazirani na aposteriornim raspodelama.*

Bajesovska statistika:

- *Verovatnoće se mogu definisati na razne načine, na primer subjektivno, ukoliko takav model nije protivrečan aksiomama Kolmogorova.*
- *Parametar θ je slučajna promenljiva, kojoj se dodeljuje apriorna raspodela.*
- *Ocena parametra θ je tačka maksimuma aposteriorne raspodele.*
- *Intervali pokrivanja i testiranje hipoteza su bazirani na aposteriornim raspodelama.*

Bajesovska statistika:

- *Verovatnoće se mogu definisati na razne načine, na primer subjektivno, ukoliko takav model nije protivrečan aksiomama Kolmogorova.*
- *Parametar θ je slučajna promenljiva, kojoj se dodeljuje apriorna raspodela.*
- *Ocena parametra θ je tačka maksimuma aposteriorne raspodele.*
- *Intervali pokrivanja i testiranje hipoteza su bazirani na aposteriornim raspodelama.*

Primeri 182 i 183: Bajesovsko ocenjivanje verovatnoće

Ponavljamo eksperiment n puta, od toga k uspeha. Traži se ocena verovatnoće.

- Verovatnoća uspeha je slučajna promenljiva X.
- Apriorna raspodela: $X \sim \text{Unif}\,[0,1]$ (neinformativna)
- Uslovna $Y|X$:
  $P(Y=k|X=p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$
- Totalna za Y:
  $$P(Y=k) = \int_0^1 P(Y=k|X=p) f_X(p)\,\mathrm{d}p = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k}\,\mathrm{d}p$$
  $$= \binom{n}{k} \mathrm{B}(k+1, n-k+1)$$
- Aposteriorna gustina $(X|Y)$:
  $$f_{X|Y}(p|k) = (n+1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

  Maksimum: $\hat{\mu} = \frac{k}{n}$ - isto kao i u klasičnoj statistici.

Primeri 182 i 183: Bajesovsko ocenjivanje verovatnoće

Ponavljamo eksperiment n puta, od toga k uspeha. Traži se ocena verovatnoće.

- Verovatnoća uspeha je slučajna promenljiva X.
- Apriorna raspodela: $X \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$ (neinformativna)
- Uslovna $Y|X$:
  $P(Y=k|X=p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n$
- Totalna za Y:
  $$P(Y=k) = \int_0^1 P(Y=k|X=p) f_X(p)\,\mathrm{d}p = \binom{n}{k}\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\,\mathrm{d}p$$
  $$= \binom{n}{k}\mathrm{B}(k+1, n-k+1)$$
- Aposteriorna gustina $(X|Y)$:
  $$f_{X|Y}(p|k) = (n+1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

  Maksimum: $\hat{\mu} = \frac{k}{n}$ - isto kao i u klasičnoj statistici.

Primeri 182 i 183: Bajesovsko ocenjivanje verovatnoće

Ponavljamo eksperiment n puta, od toga k uspeha. Traži se ocena verovatnoće.

- Verovatnoća uspeha je slučajna promenljiva X.
- Apriorna raspodela: $X \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$ (neinformativna)
- Uslovna $Y|X$:
  $P(Y=k|X=p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n$
- Totalna za Y:
$$P(Y=k) = \int_0^1 P(Y=k|X=p) f_X(p)\,\mathrm{d}p = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k}\,\mathrm{d}p$$
$$= \binom{n}{k} \mathrm{B}(k+1, n-k+1)$$
- Aposteriorna gustina $(X|Y)$:
$$f_{X|Y}(p|k) = (n+1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

  Maksimum: $\hat{\mu} = \frac{k}{n}$ - isto kao i u klasičnoj statistici.

Primeri 182 i 183: Bajesovsko ocenjivanje verovatnoće

Ponavljamo eksperiment n puta, od toga k uspeha. Traži se ocena verovatnoće.

- Verovatnoća uspeha je slučajna promenljiva X.
- Apriorna raspodela: $X \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$ (neinformativna)
- Uslovna $Y|X$:
  $P(Y=k|X=p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n$
- Totalna za Y:
  $$P(Y=k) = \int_0^1 P(Y=k|X=p) f_X(p)\,\mathrm{d}p = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k}\,\mathrm{d}p$$
  $$= \binom{n}{k} \mathrm{B}(k+1, n-k+1)$$
- Aposteriorna gustina $(X|Y)$:
  $$f_{X|Y}(p|k) = (n+1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
  Maksimum: $\hat{\mu} = \frac{k}{n}$ - isto kao i u klasičnoj statistici.

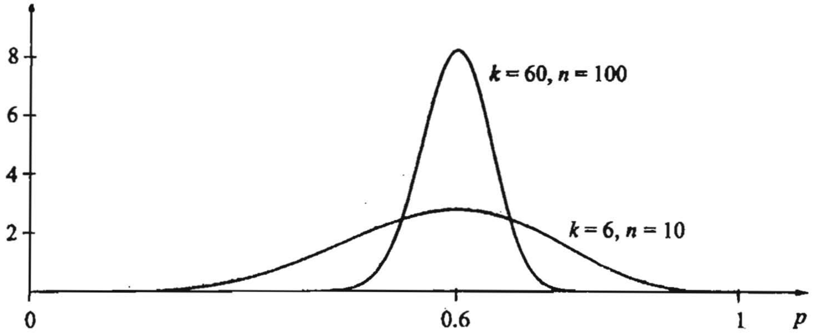
Primeri 182 i 183: Bajesovsko ocenjivanje verovatnoće

Ponavljamo eksperiment n puta, od toga k uspeha. Traži se ocena verovatnoće.

- Verovatnoća uspeha je slučajna promenljiva X.
- Apriorna raspodela: $X \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$ (neinformativna)
- Uslovna $Y|X$:
  $P(Y = k|X = p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n$
- Totalna za Y:
  $$\begin{aligned} P(Y = k) &= \int_0^1 P(Y = k|X = p) f_X(p)\,\mathrm{d}p = \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k}\,\mathrm{d}p \\ &= \binom{n}{k} \mathrm{B}(k+1, n-k+1) \end{aligned}$$
- Aposteriorna gustina $(X|Y)$:

$$f_{X|Y}(p|k) = (n+1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Maksimum: $\hat{\mu} = \frac{k}{n}$ - isto kao i u klasičnoj statistici.



Slika 38. Ako je apriorna raspodela verovatnoće uspeha uniformna i ako se uspeh dogodio u k od n eksperimenata, aposteriorna raspodela je $B(k+1, n-k+1)$.

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$ *- nezavisne. Naći* $\mathrm{E}(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - Slučajna promenljiva, funkcija od S

- $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = \mathrm{E}(X)$ ✓
- $\mathrm{E}(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}(X|Y)$ ✓
- $\mathrm{E}(g(Y)|Y) = g(Y)$ ✓

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}\,(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}\,(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}\,(n_2, p)$ - *nezavisne. Naći* $\mathrm{E}\,(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}\,(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - Slučajna promenljiva, funkcija od S

- $\mathrm{E}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X)$ ✓
- $\mathrm{E}\,(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}\,(X|Y)$ ✓
- $\mathrm{E}\,(g(Y)|Y) = g(Y)$ ✓

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}\,(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}\,(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}\,(n_2, p)$ *- nezavisne. Naći* $\mathrm{E}\,(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}\,(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - Slučajna promenljiva, funkcija od S

- $\mathrm{E}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}\,(X|Y)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(g(Y)|Y) = g(Y)\checkmark$

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}\,(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x.$
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}\,(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}\,(n_2, p)$ *- nezavisne. Naći* $\mathrm{E}\,(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}\,(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - Slučajna promenljiva, funkcija od S

- $\mathrm{E}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X)$ ✓
- $\mathrm{E}\,(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}\,(X|Y)$ ✓
- $\mathrm{E}\,(g(Y)|Y) = g(Y)$ ✓

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}\,(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}\,(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}\,(n_2, p)$ *- nezavisne. Naći* $\mathrm{E}\,(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}\,(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - Slučajna promenljiva, funkcija od S

- $\mathrm{E}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}\,(X|Y)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(g(Y)|Y) = g(Y)\checkmark$

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}\,(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x.$
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}\,(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}\,(n_2, p)$ *- nezavisne. Naći* $\mathrm{E}\,(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}\,(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - Slučajna promenljiva, funkcija od S

- $\mathrm{E}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}\,(X|Y)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(g(Y)|Y) = g(Y)\checkmark$

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$ *- nezavisne. Naći* $\mathrm{E}(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - *Slučajna promenljiva, funkcija od S*

- $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = \mathrm{E}(X)\checkmark$
- $\mathrm{E}(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}(X|Y)\checkmark$
- $\mathrm{E}(g(Y)|Y) = g(Y)\checkmark$

Uslovno matematičko očekivanje

Očekivanje uslovne raspodele: $\mathrm{E}\,(X|Y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.
Primer 184: $X \sim \mathrm{Bin}\,(n_1, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}\,(n_2, p)$ *- nezavisne. Naći* $\mathrm{E}\,(X|S)$, $S = X + Y$

- *Uslovna raspodela:* $P(X = k|S = s) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{s-k}}{\binom{n_1+n_2}{s}}$ *-hipergeometrijska.*
- *Očekivanje hipergeometrijske raspodele je* $n_1 s/(n_1 + n_2)$
- *Uslovno očekivanje:* $\mathrm{E}\,(X|S) = \frac{n_1 S}{n_1+n_2}$
  - Slučajna promenljiva, funkcija od S

- $\mathrm{E}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathrm{E}\,(X|Y)\checkmark$
- $\mathrm{E}\,(g(Y)|Y) = g(Y)\checkmark$

Uslovna varijansa

Varijansa uslovne raspodele:

$$\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X|Y))^2|Y\right) = \mathrm{E}\,(X^2|Y) - (\mathrm{E}\,(X|Y))^2$$

Slučajna promenljiva!

- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2$ ✓
- $\mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 - (\mathrm{E}\,X)^2$ ✓
- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = Var(X) - Var(E(X|Y)) \le Var(X)$ ✓
- $Var(X) = \mathrm{E}\,(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$ ✓

Primer 185. *$S_N = \sum_i^N X_i$, X_i nezavisne, ista raspodela; N- slučajna promenljiva (prirodni broj).*

$$\mathrm{E}\,(S|N) = N \cdot \mathrm{E}\,X_1, \quad \mathrm{Var}\,(S|N) = N \cdot Var(X_1)$$

$$Var(S) = \mathrm{E}\,(N) \cdot Var(X_1) + (\mathrm{E}\,X_1)^2 \cdot Var(N)$$

Uslovna varijansa

Varijansa uslovne raspodele:

$$\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X|Y))^2|Y\right) = \mathrm{E}\,(X^2|Y) - (\mathrm{E}\,(X|Y))^2$$

Slučajna promenljiva!

- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 \surd$
- $\mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 \surd$
- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = Var(X) - Var(E(X|Y)) \leq Var(X)$ $\surd$
- $Var(X) = \mathrm{E}\,(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$ $\surd$

Primer 185. $S_N = \sum_i^N X_i$, X_i *nezavisne, ista raspodela; N- slučajna promenljiva (prirodni broj).*

$$\mathrm{E}\,(S|N) = N \cdot \mathrm{E}\,X_1, \quad \mathrm{Var}\,(S|N) = N \cdot Var(X_1)$$

$$Var(S) = \mathrm{E}\,(N) \cdot Var(X_1) + (\mathrm{E}\,X_1)^2 \cdot Var(N)$$

Uslovna varijansa

Varijansa uslovne raspodele:

$$\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X|Y))^2|Y\right) = \mathrm{E}\,(X^2|Y) - (\mathrm{E}\,(X|Y))^2$$

Slučajna promenljiva!

- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2$ ✓
- $\mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 - (\mathrm{E}\,X)^2$ ✓
- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = Var(X) - Var(E(X|Y)) \leq Var(X)$ ✓
- $Var(X) = \mathrm{E}\,(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$ ✓

Primer 185. $S_N = \sum_i^N X_i$, X_i *nezavisne, ista raspodela; N- slučajna promenljiva (priroodni broj).*

$$\mathrm{E}\,(S|N) = N \cdot \mathrm{E}\,X_1, \quad \mathrm{Var}\,(S|N) = N \cdot Var(X_1)$$

$$Var(S) = \mathrm{E}\,(N) \cdot Var(X_1) + (\mathrm{E}\,X_1)^2 \cdot Var(N)$$

Uslovna varijansa

Varijansa uslovne raspodele:

$$\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X|Y))^2|Y\right) = \mathrm{E}\,(X^2|Y) - (\mathrm{E}\,(X|Y))^2$$

Slučajna promenljiva!

- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2$ ✓
- $\mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 - (\mathrm{E}\,X)^2$ ✓
- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = Var(X) - Var(E(X|Y)) \leq Var(X)$ ✓
- $Var(X) = \mathrm{E}\,(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$ ✓

Primer 185. $S_N = \sum_i^N X_i$, X_i *nezavisne, ista raspodela; N- slučajna promenljiva (priroodni broj).*

$$\mathrm{E}\,(S|N) = N \cdot \mathrm{E}\,X_1, \quad \mathrm{Var}\,(S|N) = N \cdot Var(X_1)$$

$$Var(S) = \mathrm{E}\,(N) \cdot Var(X_1) + (\mathrm{E}\,X_1)^2 \cdot Var(N)$$

Uslovna varijansa

Varijansa uslovne raspodele:

$$\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X|Y))^2|Y\right) = \mathrm{E}\,(X^2|Y) - (\mathrm{E}\,(X|Y))^2$$

Slučajna promenljiva!

- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 \checkmark$
- $\mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 \checkmark$
- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = Var(X) - Var(E(X|Y)) \leq Var(X) \checkmark$
- $Var(X) = \mathrm{E}\,(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) \checkmark$

Primer 185. $S_N = \sum_i^N X_i$, X_i *nezavisne, ista raspodela; N- slučajna promenljiva (priroodni broj).*

$$\mathrm{E}\,(S|N) = N \cdot \mathrm{E}\,X_1, \quad \mathrm{Var}\,(S|N) = N \cdot Var(X_1)$$

$$Var(S) = \mathrm{E}\,(N) \cdot Var(X_1) + (\mathrm{E}\,X_1)^2 \cdot Var(N)$$

Uslovna varijansa

Varijansa uslovne raspodele:

$$\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X|Y))^2|Y\right) = \mathrm{E}\,(X^2|Y) - (\mathrm{E}\,(X|Y))^2$$

Slučajna promenljiva!

- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2$ √
- $\mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 - (\mathrm{E}\,X)^2$ √
- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = Var(X) - Var(E(X|Y)) \leq Var(X)$ √
- $Var(X) = \mathrm{E}\,(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$ √

Primer 185. $S_N = \sum_i^N X_i$, X_i *nezavisne, ista raspodela; N- slučajna promenljiva (prirodni broj).*

$$\mathrm{E}\,(S|N) = N \cdot \mathrm{E}\,X_1, \quad \mathrm{Var}\,(S|N) = N \cdot Var(X_1)$$

$$Var(S) = \mathrm{E}\,(N) \cdot Var(X_1) + (\mathrm{E}\,X_1)^2 \cdot Var(N)$$

Uslovna varijansa

Varijansa uslovne raspodele:

$$\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}\,(X|Y))^2|Y\right) = \mathrm{E}\,(X^2|Y) - (\mathrm{E}\,(X|Y))^2$$

Slučajna promenljiva!

- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = \mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2$ $\surd$
- $\mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(X|Y)) = \mathrm{E}\,(E(X|Y))^2 - (\mathrm{E}\,X)^2$ $\surd$
- $\mathrm{E}\,(Var(X|Y)) = Var(X) - Var(E(X|Y)) \leq Var(X)$ $\surd$
- $Var(X) = \mathrm{E}\,(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$ $\surd$

Primer 185. $S_N = \sum_i^N X_i$, X_i *nezavisne, ista raspodela; N- slučajna promenljiva (priroodni broj).*

$$\mathrm{E}\,(S|N) = N \cdot \mathrm{E}\,X_1, \quad \mathrm{Var}\,(S|N) = N \cdot Var(X_1)$$

$$Var(S) = \mathrm{E}\,(N) \cdot Var(X_1) + (\mathrm{E}\,X_1)^2 \cdot Var(N)$$

Predikcija

Signal Y se ne može direktno posmatrati. Umesto Y posmatramo slučajnu promenljivu X.
Koja funkcija $g(X)$ je najbolji prediktor za Y?

Teorema 11.6

$$\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}(Y|X))^2 \le \mathrm{E}(Y - g(X))^2 ,$$

za svaku funkciju g za koju postoji matematičko očekivanje na desnoj strani.

Primer 186. Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ slučajni signal. Na mestu prijema dobija se slučajna promenljiva $Y = X + \varepsilon$, gde je $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$ Gaussov *šum, nezavisan od vrednosti signala. Naći najbolji prediktor za X na bazi Y.*

Predikcija

Signal Y se ne može direktno posmatrati. Umesto Y posmatramo slučajnu promenljivu X.
Koja funkcija $g(X)$ je najbolji prediktor za Y?

Teorema 11.6

$$\mathrm{E}\,(Y - \mathrm{E}\,(Y|X))^2 \leq \mathrm{E}\,(Y - g(X))^2\,,$$

za svaku funkciju g za koju postoji matematičko očekivanje na desnoj strani.

Primer 186. Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ slučajni signal. Na mestu prijema dobija se slučajna promenljiva $Y = X + \varepsilon$, gde je $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ Gaussov šum, nezavisan od vrednosti signala. Naći najbolji prediktor za X na bazi Y.

Predikcija

Signal Y se ne može direktno posmatrati. Umesto Y posmatramo slučajnu promenljivu X.
Koja funkcija $g(X)$ je najbolji prediktor za Y?

Teorema 11.6

$$\mathrm{E}\,(Y - \mathrm{E}\,(Y|X))^2 \leq \mathrm{E}\,(Y - g(X))^2\,,$$

za svaku funkciju g za koju postoji matematičko očekivanje na desnoj strani.

Primer 186. Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ slučajni signal. Na mestu prijema dobija se slučajna promenljiva $Y = X + \varepsilon$, gde je $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\mathrm{G{\scriptsize AUSS}}$ov šum, nezavisan od vrednosti signala. Naći najbolji prediktor za X na bazi Y.

Primer 187.

Neka je X neprekidan slučajan signal koji treba diskretizovati, tj. formirati slučajnu promenljivu Y tako da je $Y = y_j$ ako je $a_j < X \le a_{j+1}$, gde je $\{a_j\}$ dati monotono rastući niz realnih brojeva. Potrebno je odabrati vrednosti y_j tako da srednje kvadratno odstupanje $\mathrm{E}\,(X - Y)^2$ bude minimalno.

Neka je J slučajna promenljiva koja uzima vrednost j ako je $a_j < X \le a_{j+1}$. Rešenje problema su brojevi y_j određeni sa

$$y_j = \mathrm{E}\,(X|J=j) = \mathrm{E}\,(X|a_j < X \le a_{j+1}) = \int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{x f_X(x)\,\mathrm{d}x}{F_X(a_{j+1}) - F_X(a_j)},$$

gde su f_X i F_X gustina i funkcija raspodele za X.

Primer 187.

Neka je X neprekidan slučajan signal koji treba diskretizovati, tj. formirati slučajnu promenljivu Y tako da je $Y = y_j$ ako je $a_j < X \leq a_{j+1}$, gde je $\{a_j\}$ dati monotono rastući niz realnih brojeva. Potrebno je odabrati vrednosti y_j tako da srednje kvadratno odstupanje $\mathrm{E}\,(X - Y)^2$ bude minimalno.

Neka je J slučajna promenljiva koja uzima vrednost j ako je $a_j < X \leq a_{j+1}$. Rešenje problema su brojevi y_j određeni sa

$$y_j = \mathrm{E}\,(X|J = j) = \mathrm{E}\,(X|a_j < X \leq a_{j+1}) = \int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{x f_X(x)\,\mathrm{d}x}{F_X(a_{j+1}) - F_X(a_j)},$$

gde su f_X i F_X gustina i funkcija raspodele za X.

Uslovne raspodele u odnosu na slučajni vektor

$$f_{X|Y}(x|y_1, \ldots, y_n) = \frac{f(x, y_1, \ldots, y_n)}{f_Y(y_1, \ldots, y_n)}$$

$$\mathrm{E}\,(X|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y_1, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}x$$

U okviru normalne raspodele

Neka slučajni vektor $(Y, X_1, \ldots, X_n)$ ima $n+1$-dimenzionalnu normalnu raspodelu, sa $\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,X_1 = \ldots = \mathrm{E}\,X_n = 0$. Tada je

$$\mathrm{E}\,(Y|X_1, \ldots, X_n) = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$$

Koeficijenti a_i, $i = 1, \ldots, n$, dobijaju se kao rešenje sistema jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1c_{11} & + & a_2c_{12} & + & \cdots & + & a_nc_{1n} & = & \mathrm{E}\,YX_1 \\ a_1c_{21} & + & a_2c_{22} & + & \cdots & + & a_nc_{2n} & = & \mathrm{E}\,YX_2 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_1c_{n1} & + & a_2c_{n2} & + & \cdots & + & a_nc_{nn} & = & \mathrm{E}\,YX_n \end{array} \tag{2}$$

gde su c_{ij} elementi matrice kovarijanse slučajnog vektora $(X_1, \ldots, X_n)$, $c_{ij} = \mathrm{E}\,X_iX_j$.
Može i preko direktne minimizacije:

$$\mathrm{E}\left(Y - \sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right)^2 \to \min$$

$T = \sum a_iX_i$ je najbolji prediktor za Y.