Numeričke karakteristike i normalna raspodela u više dimenzija

Profesor Milan Merkle
emerkle@etf.rs milanmerkle.etf.rs

Matematička statistika-Master studije

Matematičko očekivanje slučajnog vektora

- *Vektor predstavljamo kao matricu-vrstu:* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- *Skalarni proizvod vektora :* $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots a_n b_n$.

Matematičko očekivanje vektora $X = (X_1, \ldots X_n)$ *definiše se kao* $\mathrm{E}(X) = (\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2, \ldots, \mathrm{E}\, X_n)$.

Matematičko očekivanje slučajnog vektora

- *Vektor predstavljamo kao matricu-vrstu:* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- *Skalarni proizvod vektora :* $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots a_n b_n$.

Matematičko očekivanje vektora $X = (X_1, \ldots X_n)$ *definiše se kao* $\mathrm{E}(X) = (\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2, \ldots, \mathrm{E}\, X_n)$.

Matematičko očekivanje slučajnog vektora

- *Vektor predstavljamo kao matricu-vrstu:* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- *Skalarni proizvod vektora :* $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots a_n b_n$.

Matematičko očekivanje vektora $X = (X_1, \ldots X_n)$ *definiše se kao* $\mathrm{E}(X) = (\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2, \ldots, \mathrm{E}\, X_n)$.

Matematičko očekivanje slučajnog vektora

- *Vektor predstavljamo kao matricu-vrstu:* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- *Skalarni proizvod vektora :* $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots a_n b_n$.

Matematičko očekivanje vektora $X = (X_1, \ldots X_n)$ *definiše se kao*
$\mathrm{E}(X) = (\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2, \ldots, \mathrm{E}\, X_n)$.

Matrica kovarijanse

Slučajni vektor: $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$ sa varijansama $\sigma_i > 0$.

$$\text{matrica kovarijanse:} \quad C(X) = \|\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)\|_{i,j=1}^{n}$$

$$\text{2D primer} : X = (X_1, X_2) : \quad C(X) = \begin{Vmatrix} \mathrm{Var}\,(X_1) & \mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}\,(X_2, X_1) & \mathrm{Var}\,(X_2) \end{Vmatrix}$$

$$\text{2D primer} : X = (X_1, X_2) : \quad C(X) = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}$$

Determinanta matrice iz primera je:

$$\sigma_1\sigma_2 \begin{vmatrix} \sigma_1 & \rho_{1,2}\sigma_2 \\ \rho_{1,2}\sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_{1,2}^2)$$

Osobine matrice kovarijanse

- Matrica kovarijanse je pozitivno definitna [pozitivna semi-definitna] za svaki vektor a dimenzije n važi da je $\langle a, C(X)a \rangle \geq 0$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j \geq 0$$

Ekvivalentno: Sve sopstvene vrednosti su nenegativne.

- Determinanta matrice kovarijanse je ≥ 0.
- Matrica kovarijanse za afinu transformaciju:
Slučajni vektor $X_{n\times 1}$, matrica $A_{n\times n}$, vektor $b_{n\times 1}$:
$C(AX+b) = AC(X)A^T$
(za $n=1$: $\mathrm{Var}\,(aX) = aXa = a^2 X$)
- Za svaku simetričnu i pozitivno definitnu matricu C postoji slučajni vektor X sa matricom kovarijanse C (nije jedinstvena raspodela).
Dokaz: strana 103.

Osobine matrice kovarijanse

- Matrica kovarijanse je pozitivno definitna [pozitivna semi-definitna] za svaki vektor a dimenzije n važi da je $\langle a, C(X)a \rangle \geq 0$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j \geq 0$$

  Ekvivalentno: Sve sopstvene vrednosti su nenegativne.
- Determinanta matrice kovarijanse je ≥ 0.
- Matrica kovarijanse za afinu transformaciju:
  Slučajni vektor $X_{n\times 1}$, matrica $A_{n\times n}$, vektor $b_{n\times 1}$:
  $C(AX+b) = AC(X)A^T$
  (za $n=1$: $\mathrm{Var}\,(aX) = aXa = a^2X$)
- Za svaku simetričnu i pozitivno definitnu matricu C postoji slučajni vektor X sa matricom kovarijanse C (nije jedinstvena raspodela).
  Dokaz: strana 103.

Osobine matrice kovarijanse

- Matrica kovarijanse je pozitivno definitna [pozitivna semi-definitna] za svaki vektor a dimenzije n važi da je $\langle a, C(X)a \rangle \geq 0$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j \geq 0$$

  Ekvivalentno: Sve sopstvene vrednosti su nenegativne.

- Determinanta matrice kovarijanse je ≥ 0.
- Matrica kovarijanse za afinu transformaciju:
  Slučajni vektor $X_{n\times 1}$, matrica $A_{n\times n}$, vektor $b_{n\times 1}$:
  $C(AX + b) = AC(X)A^T$
  (za $n = 1$: $\mathrm{Var}\,(aX) = aXa = a^2 X$)
- Za svaku simetričnu i pozitivno definitnu matricu C postoji slučajni vektor X sa matricom kovarijanse C (nije jedinstvena raspodela). Dokaz: strana 103.

Osobine matrice kovarijanse

- Matrica kovarijanse je pozitivno definitna [pozitivna semi-definitna] za svaki vektor a dimenzije n važi da je $\langle a, C(X)a \rangle \geq 0$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j \geq 0$$

  Ekvivalentno: Sve sopstvene vrednosti su nenegativne.

- Determinanta matrice kovarijanse je ≥ 0.
- Matrica kovarijanse za afinu transformaciju:
  Slučajni vektor $X_{n\times 1}$, matrica $A_{n\times n}$, vektor $b_{n\times 1}$:
  $C(AX + b) = AC(X)A^T$
  (za $n = 1$: $\mathrm{Var}\,(aX) = aXa = a^2X$)
- Za svaku simetričnu i pozitivno definitnu matricu C postoji slučajni vektor X sa matricom kovarijanse C (nije jedinstvena raspodela). Dokaz: strana 103.

Kada je matrica kovarijanse regularna ?

Po definiciji, C je regularna ako je $\det C \neq 0$. *U slučaju matrice kovarijanse,* $\det C > 0$ *ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:*

- *Sve sopstvene vrednosti su pozitivne (dokaz:* $\det C = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$*)*
- *Za svaki vektor* $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j > 0$$

- *Ne postoji afina relacija između* $X_1, \ldots X_n$*, tj.*

$$P(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b) = 1$$

Kada je matrica kovarijanse regularna ?

Po definiciji, C je regularna ako je $\det C \neq 0$. *U slučaju matrice kovarijanse,* $\det C > 0$ *ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:*

- *Sve sopstvene vrednosti su pozitivne (dokaz:* $\det C = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$*)*
- *Za svaki vektor* $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j > 0$$

- *Ne postoji afina relacija između* $X_1, \ldots X_n$*, tj.*

$$P(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b) = 1$$

Kada je matrica kovarijanse regularna ?

Po definiciji, C je regularna ako je $\det C \neq 0$. *U slučaju matrice kovarijanse,* $\det C > 0$ *ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:*

- *Sve sopstvene vrednosti su pozitivne (dokaz:* $\det C = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$*)*
- *Za svaki vektor* $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j > 0$$

- *Ne postoji afina relacija između* $X_1, \ldots X_n$*, tj.*

$$P(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b) = 1$$

Kada je matrica kovarijanse regularna ?

Po definiciji, C je regularna ako je $\det C \neq 0$*. U slučaju matrice kovarijanse,* $\det C > 0$ *ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:*

- *Sve sopstvene vrednosti su pozitivne (dokaz:* $\det C = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$*)*
- *Za svaki vektor* $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j > 0$$

- *Ne postoji afina relacija između* $X_1, \ldots X_n$*, tj.*

$$P(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b) = 1$$

Kada je matrica kovarijanse regularna ?

Po definiciji, C je regularna ako je $\det C \neq 0$*. U slučaju matrice kovarijanse,* $\det C > 0$ *ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:*

- *Sve sopstvene vrednosti su pozitivne (dokaz:* $\det C = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$*)*
- *Za svaki vektor* $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i C_{ij} a_j > 0$$

- *Ne postoji afina relacija između* $X_1, \ldots X_n$*, tj.*

$$P(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b) = 1$$

Kvadratni koren matrice korelacije

• *Neka je C regularna matrica kovarijanse slučajnog vektora X. Tada postoji simetrična kvadratna matrica $C^{1/2}$ takva da je $C^{1/2} \cdot C^{1/2} = C$*

• *Algoritam: strana 304. Za detaljnije obrazloženje videti udžbenik iz linearne algebre (Axler).*

Analogije sa jednodimenzionalnim slučajem:

- $\sigma^2 \implies \mathbf{C}$
- $\sigma \implies \mathbf{C}^{1/2}$ *kao matrica*
- $\sigma \implies \sqrt{\det C}$ *kao skalar*
- $\frac{1}{\sigma^2} \implies \mathbf{C}^{-1}$

Kvadratni koren matrice korelacije

• *Neka je C regularna matrica kovarijanse slučajnog vektora X. Tada postoji simetrična kvadratna matrica $C^{1/2}$ takva da je $C^{1/2} \cdot C^{1/2} = C$*

• *Algoritam: strana 304. Za detaljnije obrazloženje videti udžbenik iz linearne algebre (Axler).*

Analogije sa jednodimenzionalnim slučajem:

- $\sigma^2 \implies \mathbf{C}$
- $\sigma \implies \mathbf{C}^{1/2}$ *kao matrica*
- $\sigma \implies \sqrt{\det C}$ *kao skalar*
- $\frac{1}{\sigma^2} \implies \mathbf{C}^{-1}$

Kvadratni koren matrice korelacije

• *Neka je C regularna matrica kovarijanse slučajnog vektora X. Tada postoji simetrična kvadratna matrica $C^{1/2}$ takva da je $C^{1/2} \cdot C^{1/2} = C$*

• *Algoritam: strana 304. Za detaljnije obrazloženje videti udžbenik iz linearne algebre (Axler).*

Analogije sa jednodimenzionalnim slučajem:

- $\sigma^2 \implies \mathbf{C}$
- $\sigma \implies \mathbf{C}^{1/2}$ *kao matrica*
- $\sigma \implies \sqrt{\det C}$ *kao skalar*
- $\frac{1}{\sigma^2} \implies \mathbf{C}^{-1}$

Kvadratni koren matrice korelacije

• *Neka je C regularna matrica kovarijanse slučajnog vektora X. Tada postoji simetrična kvadratna matrica $C^{1/2}$ takva da je $C^{1/2} \cdot C^{1/2} = C$*

• *Algoritam: strana 304. Za detaljnije obrazloženje videti udžbenik iz linearne algebre (Axler).*

Analogije sa jednodimenzionalnim slučajem:

- $\sigma^2 \implies \mathbf{C}$
- $\sigma \implies \mathbf{C}^{1/2}$ *kao matrica*
- $\sigma \implies \sqrt{\det C}$ *kao skalar*
- $\frac{1}{\sigma^2} \implies \mathbf{C}^{-1}$

Kvadratni koren matrice korelacije

• *Neka je C regularna matrica kovarijanse slučajnog vektora X. Tada postoji simetrična kvadratna matrica $C^{1/2}$ takva da je $C^{1/2} \cdot C^{1/2} = C$*

• *Algoritam: strana 304. Za detaljnije obrazloženje videti udžbenik iz linearne algebre (Axler).*

Analogije sa jednodimenzionalnim slučajem:

- $\sigma^2 \implies \mathbf{C}$
- $\sigma \implies \mathbf{C}^{1/2}$ *kao matrica*
- $\sigma \implies \sqrt{\det C}$ *kao skalar*
- $\frac{1}{\sigma^2} \implies \mathbf{C}^{-1}$

Kvadratni koren matrice korelacije

• *Neka je C regularna matrica kovarijanse slučajnog vektora X. Tada postoji simetrična kvadratna matrica $C^{1/2}$ takva da je $C^{1/2} \cdot C^{1/2} = C$*

• *Algoritam: strana 304. Za detaljnije obrazloženje videti udžbenik iz linearne algebre (Axler).*

Analogije sa jednodimenzionalnim slučajem:

- $\sigma^2 \implies \mathbf{C}$
- $\sigma \implies \mathbf{C}^{1/2}$ *kao matrica*
- $\sigma \implies \sqrt{\det C}$ *kao skalar*
- $\frac{1}{\sigma^2} \implies \mathbf{C}^{-1}$

Višedimenzionalna normalna raspodela

Definicija 4.8 *Neka je C regularna pozitivno definitna matrica $n \times n$, i neka je b vektor dimenzije n. Gustina n-dimenzionalne normalne raspodele definisana je za svako $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pomoću jednakosti*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{\langle x - b, C^{-1}(x - b)\rangle}{2}\right)$$

Za $n = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - b)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$b = \mathrm{E}\, X = (\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2, \ldots, \mathrm{E}\, X_n)$$

Višedimenzionalna normalna raspodela

Definicija 4.8 *Neka je C regularna pozitivno definitna matrica $n \times n$, i neka je b vektor dimenzije n. Gustina n-dimenzionalne normalne raspodele definisana je za svako $x = (x_1, \dots, x_n)$ pomoću jednakosti*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{\langle x - b, C^{-1}(x - b)\rangle}{2}\right)$$

Za $n = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - b)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$b = \mathrm{E}\, X = (\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2, \dots, \mathrm{E}\, X_n)$$

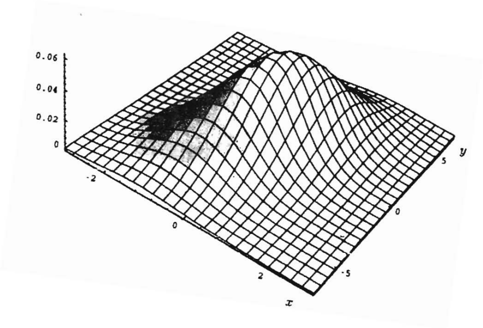
Višedimenzionalna normalna raspodela-2

$$C(X) = \left\| \begin{matrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{matrix} \right\|, \det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho)^2$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho)^2} \left| \begin{matrix} \sigma_2^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{matrix} \right\|$$

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\ & \left.\left. -2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right) \end{aligned}$$

2D gustina raspodele



Slika

. Gustina dvodimenzionalne normalne raspodele za $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$ *i* $\rho = 0.5$.

Karakterizacija normalne raspodele

Teorema 4.12 *Slučajni vektor* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *ima n-dimenzionalnu normalnu raspodelu ako i samo ako postoji regularna matrica* A *i vektor* b *tako da je*

$$X = AZ + b$$

gde je Z *slučajni vektor čije su komponente* $Z_1, \ldots, Z_n$ *nezavisne standardne normalne slučajne promenljive.*
Za datu matricu kovarijanse C, *matrica* A *je definisana sa* $A = C^{1/2}$, *odnosno* $A \cdot A = C$.

$$(X - b)C^{-1/2} = Z$$

Osobine normalne raspodele

Teorema 4.8 *Ako slučajni vektor (X, Y) ima zajedničku 2D normalnu raspodelu, onda je $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ i $\rho(X, Y) = \rho$ Drugim rečima, ako je zajednička raspodela 2D normalna, onda su marginalne raspodele normalne.*
Obrnuto ne mora da važi!! Primer-zadatak 93.
Ako su X i Y normalne slučajne promenljive, njihova zajednička raspodela ne mora biti normalna!

Teorema 4.9 *Ako slučajni vektor (X, Y) ima 2D normalnu raspodelu sa koeficijentom korelacije $\rho = 0$, onda su X i Y nezavisne.*

To ne znači da svake dve nekorelisane normalne slučajne promenljive moraju biti i nezavisne! Primer-zadatak 292

Osobine normalne raspodele

Teorema 4.8 *Ako slučajni vektor* (X, Y) *ima zajedničku 2D normalnu raspodelu, onda je* $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ *i* $\rho(X, Y) = \rho$
Drugim rečima, ako je zajednička raspodela 2D normalna, onda su marginalne raspodele normalne.
Obrnuto ne mora da važi!! Primer-zadatak 93.
Ako su X *i* Y *normalne slučajne promenljive, njihova zajednička raspodela ne mora biti normalna!*

Teorema 4.9 *Ako slučajni vektor* (X, Y) *ima 2D normalnu raspodelu sa koeficijentom korelacije* $\rho = 0$, *onda su* X *i* Y *nezavisne.*

To ne znači da svake dve nekorelisane normalne slučajne promenljive moraju biti i nezavisne! Primer-zadatak 292

Ocena koeficijenta korelacije

Imamo uzorak obima n. Ocena koeficijenta korelacije - uzorački koeficijent korelacije je

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \hat{\mu}_X)(Y_k - \hat{\mu}_Y)}{\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - \hat{\mu}_X)^2 \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \hat{\mu}_Y)^2 \right)^{1/2}}$$

Raspodele statistika

Teorema 9.1. *Ako slučajni vektor (X, Y) ima dvodimenzionalnu normalnu raspodelu sa $\rho = 0$, tada statistika*

$$T = \frac{\hat{\rho}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}$$

ima $t(n-2)$ raspodelu.

Teorema 9.2. *Ako slučajni vektor (X, Y) ima koeficijent korelacije ρ, tada je raspodela statistike*

$$T = \frac{1}{2}\log\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}$$

asimptotski (kad $n \to +\infty$) normalna, sa

$$\mathrm{E}\, T = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}, \quad \mathrm{Var}\, T = \frac{1}{n-3}$$

Raspodele statistika

Teorema 9.1. *Ako slučajni vektor (X, Y) ima dvodimenzionalnu normalnu raspodelu sa $\rho = 0$, tada statistika*

$$T = \frac{\hat{\rho}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}$$

ima $t(n-2)$ raspodelu.

Teorema 9.2. *Ako slučajni vektor (X, Y) ima koeficijent korelacije ρ, tada je raspodela statistike*

$$T = \frac{1}{2}\log\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}$$

asimptotski (kad $n \to +\infty$) normalna, sa

$$\mathrm{E}\, T = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}, \quad \mathrm{Var}\, T = \frac{1}{n-3}$$

Testiranje hipoteza

Primer 165. *Iz uzorka obima* $n = 27$ *iz dvodimenzionalne normalne raspodele dobijeno je* $\hat{\rho} = 0.6$. *Sa nivoom značajnosti* $\alpha = 0.05$ *testirati hipotezu* $H_0 : \ \rho = 0$ *protiv alternativne hipoteze* $H_1 : \ \rho > 0$.