14. Simulacija

Profesor Milan Merkle
emerkle@etf.rs milanmerkle.etf.rs

Verovatnoća i Statistika-proleće 2019

Generisanje pseudo-slučajnih brojeva

Da bi se generisali racionalni brojevi iz $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *raspodele, polazi se od algoritama koji generišu prirodne brojeve.*

Linearni kongruentni metod:

$$N_k \equiv aN_{k-1} + b \pmod{c},$$

gde su a, b, c *prirodni brojevi.*
Ovako se niz prirodnih brojeva iz intervala $[0, c-1]$*; sa* $U_k = N_k/c$ *dobijamo niz racionalnih brojeva iz* $[0,1)$.
Na primer: $a = 314159269$, $b = 907633409$ *i* $c = 2^{32}$

Algoritmi novijeg datuma: Kiss, Mersenne Twister, ...
Iz kosmičkog zračenja: `https://www.random.org`

Postoje mnogobrojni testovi slučajnosti ...

Generisanje pseudo-slučajnih brojeva

Da bi se generisali racionalni brojevi iz $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *raspodele, polazi se od algoritama koji generišu prirodne brojeve.*

Linearni kongruentni metod:

$$N_k \equiv aN_{k-1} + b \pmod{c},$$

gde su a, b, c *prirodni brojevi.*
Ovako se niz prirodnih brojeva iz intervala $[0, c-1]$*; sa* $U_k = N_k/c$ *dobijamo niz racionalnih brojeva iz* $[0,1)$.
Na primer: $a = 314159269$, $b = 907633409$ *i* $c = 2^{32}$

Algoritmi novijeg datuma: Kiss, Mersenne Twister, ...
Iz kosmičkog zračenja: `https://www.random.org`

Postoje mnogobrojni testovi slučajnosti ...

Generisanje pseudo-slučajnih brojeva

Da bi se generisali racionalni brojevi iz $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *raspodele, polazi se od algoritama koji generišu prirodne brojeve.*

Linearni kongruentni metod:

$$N_k \equiv aN_{k-1} + b \pmod{c},$$

gde su a, b, c *prirodni brojevi.*
Ovako se niz prirodnih brojeva iz intervala $[0, c-1]$*; sa* $U_k = N_k/c$ *dobijamo niz racionalnih brojeva iz* $[0, 1)$*.*
Na primer: $a = 314159269$, $b = 907633409$ *i* $c = 2^{32}$

Algoritmi novijeg datuma: Kiss, Mersenne Twister, ...
Iz kosmičkog zračenja: `https://www.random.org`

Postoje mnogobrojni testovi slučajnosti ...

Generisanje pseudo-slučajnih brojeva

Da bi se generisali racionalni brojevi iz $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *raspodele, polazi se od algoritama koji generišu prirodne brojeve.*

Linearni kongruentni metod:

$$N_k \equiv aN_{k-1} + b \pmod{c},$$

gde su a, b, c *prirodni brojevi.*
Ovako se niz prirodnih brojeva iz intervala $[0, c-1]$*; sa* $U_k = N_k/c$ *dobijamo niz racionalnih brojeva iz* $[0,1)$.
Na primer: $a = 314159269$, $b = 907633409$ *i* $c = 2^{32}$

Algoritmi novijeg datuma: Kiss, Mersenne Twister, ...
Iz kosmičkog zračenja: `https://www.random.org`

Postoje mnogobrojni testovi slučajnosti ...

Generisanje raspodela

Polazimo od pretpostavke da imamo proizvoljno dugačak niz nezavisnih slučajnih brojeva $U_1, U_2, \ldots$ iz generatora slučajnih brojeva.

Ako je $U \sim \mathrm{Unif}\,(0,1)$, *tada je i* $1 - U \sim \mathrm{Unif}\,(0,1)$ $\checkmark$

Diskretne raspodele

- *Bernulijeva raspodela*
- *Bacanje kocke*
- $\mathrm{Bin}\,(n, p)$ *preko Bernulijeve*

Diskretne raspodele

- *Bernulijeva raspodela*
- *Bacanje kocke*
- $\mathrm{Bin}\,(n,p)$ *preko Bernulijeve*

Diskretne raspodele

- *Bernulijeva raspodela*
- *Bacanje kocke*
- $\mathrm{Bin}\,(n, p)$ *preko Bernulijeve*

Diskretne raspodele

- *Bernulijeva raspodela*
- *Bacanje kocke*
- $\mathrm{Bin}\,(n, p)$ *preko Bernulijeve*

Diskretne raspodele -nastavak

Raspodele sa beskonačno mnogo mogućih vrednosti:

$$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, \sum p_i = 1$$

Univerzalni algoritam:

$$X = x_k \qquad \textit{ako je} \qquad \sum_{i=0}^{k-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^{k} p_i \quad (p_0 = 0).$$

Za neke raspodele algoritam se može pojednostaviti.

Diskretne raspodele -nastavak

Primer 210. Geometrijska raspodela

$X = k$ ako je

$$p\sum_{i=1}^{k-1}(1-p)^{i-1} \le U < p\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1}$$

$$\iff X = 1 + \left[\frac{\log(1-U)}{\log(1-p)}\right]$$

Algoritam:

$$X = 1 + \left[\frac{\log U}{\log(1-p)}\right]$$

Neprekidne raspodele

$X = F^{-1}(U)$ ima raspodelu sa funkcijom raspodele F.

Primer 212. Eksponencijalna raspodela

$$X = -\frac{1}{\lambda}\log U$$

Neprekidne raspodele

$X = F^{-1}(U)$ ima raspodelu sa funkcijom raspodele F.

Primer 212. Eksponencijalna raspodela

$$X = -\frac{1}{\lambda} \log U$$

Puasonova preko eksponencijalne

Primer 211. Puasonova raspodela *Neka je N prvi prirodan broj za koji je*

$$U_1 \cdot U_2 \cdots U_n < e^{-\lambda}.$$

$X = N - 1$ *ima* $\mathrm{Poiss}(\lambda)$ *raspodelu.*

Ovaj algoritam nije efikasan za veliko λ. Postoje i drugi egzaktni i aproksimativni metodi.

Puasonova preko eksponencijalne

Primer 211. Puasonova raspodela *Neka je N prvi prirodan broj za koji je*

$$U_1 \cdot U_2 \cdots U_n < e^{-\lambda}.$$

$X = N - 1$ *ima* $\mathrm{Poiss}(\lambda)$ *raspodelu.*

Ovaj algoritam nije efikasan za veliko λ. Postoje i drugi egzaktni i aproksimativni metodi.

Metod odbacivanja

Generisanje $X \sim f$ (gustina koncentrisana na intervalu I). Neka je $Y \sim g$ na istom intervalu I tako za neko $c > 0$ važi da je $f(y) \leq cg(y)$ za svako $y \in I$. Metod odbacivanja se sastoji od dva koraka.

1. *Generisati Y sa gustinom g i generisati slučajan broj U.*
2. *Ako je $U \leq f(Y)/cg(Y)$, staviti $X = Y$. U protivnom ponoviti 1°.*

Broj potrebnih koraka N u ovom algoritmu je geometrijska raspodela sa $\mathrm{E}(N) = c$.

Metod odbacivanja

Generisanje $X \sim f$ *(gustina koncentrisana na intervalu* I*). Neka je* $Y \sim g$ *na istom intervalu* I *tako za neko* $c > 0$ *važi da je* $f(y) \leq cg(y)$ *za svako* $y \in I$*. Metod odbacivanja se sastoji od dva koraka.*

1. *Generisati* Y *sa gustinom* g *i generisati slučajan broj* U*.*
2. *Ako je* $U \leq f(Y)/cg(Y)$*, staviti* $X = Y$*. U protivnom ponoviti* 1°*.*

Broj potrebnih koraka N *u ovom algoritmu je geometrijska raspodela sa* $\mathrm{E}(N) = c$*.*

Metod odbacivanja

Generisanje $X \sim f$ (gustina koncentrisana na intervalu I). Neka je $Y \sim g$ na istom intervalu I tako za neko $c > 0$ važi da je $f(y) \leq cg(y)$ za svako $y \in I$. Metod odbacivanja se sastoji od dva koraka.

1. *Generisati Y sa gustinom g i generisati slučajan broj U.*
2. *Ako je $U \leq f(Y)/cg(Y)$, staviti $X = Y$. U protivnom ponoviti 1°.*

Broj potrebnih koraka N u ovom algoritmu je geometrijska raspodela sa $\mathrm{E}(N) = c$.

Metod odbacivanja

Generisanje $X \sim f$ *(gustina koncentrisana na intervalu* I*). Neka je* $Y \sim g$ *na istom intervalu* I *tako za neko* $c > 0$ *važi da je* $f(y) \leq cg(y)$ *za svako* $y \in I$*. Metod odbacivanja se sastoji od dva koraka.*

1. *Generisati* Y *sa gustinom* g *i generisati slučajan broj* U*.*
2. *Ako je* $U \leq f(Y)/cg(Y)$*, staviti* $X = Y$*. U protivnom ponoviti* 1°*.*

Broj potrebnih koraka N *u ovom algoritmu je geometrijska raspodela sa* $\mathrm{E}(N) = c$*.*

Primer

Primer 213. Generisanje beta raspodele. *Neka je f gustina beta raspodele sa parametrima $\alpha > 1$ i $\beta > 1$:*

$$f(x) = cx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad x \in (0,1), \quad c = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

Ovde je $f(x) \leq c = c \cdot 1$ na intervalu $(0,1)$, $Y \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$.
Algoritam:

1. *Generisati nezavisne U_1 i U_2.*
2. *Ako je $U_2 < U_1^{\alpha-1}(1-U_1)^{\beta-1}$, staviti $X = U_1$. U protivnom, ponoviti korak 1°.* □

Primer

Primer 213. Generisanje beta raspodele. *Neka je f gustina beta raspodele sa parametrima $\alpha > 1$ i $\beta > 1$:*

$$f(x) = cx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,, \qquad x \in (0,1)\,, \quad c = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

Ovde je $f(x) \leq c = c \cdot 1$ na intervalu $(0,1)$, $Y \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$.
Algoritam:

1. *Generisati nezavisne U_1 i U_2.*
2. *Ako je $U_2 < U_1^{\alpha-1}(1-U_1)^{\beta-1}$, staviti $X = U_1$. U protivnom, ponoviti korak 1°.* $\square$

Primer

Primer 213. Generisanje beta raspodele. *Neka je f gustina beta raspodele sa parametrima $\alpha > 1$ i $\beta > 1$:*

$$f(x) = cx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad x \in (0,1), \quad c = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

Ovde je $f(x) \leq c = c \cdot 1$ na intervalu $(0,1)$, $Y \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$.
Algoritam:

1. *Generisati nezavisne U_1 i U_2.*
2. *Ako je $U_2 < U_1^{\alpha-1}(1-U_1)^{\beta-1}$, staviti $X = U_1$. U protivnom, ponoviti korak 1°.* $\square$

Neprekidne raspodele-nastavak

Aproksimativni algoritam za $\mathcal{N}(0,1)$

$$Z = U_1 + \cdots + U_{12} - 6$$

Egzaktan alogoritam za $\mathcal{N}(0,1)$ - Polarni metod

$$Z_1 = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2), \qquad Z_2 = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$$

Neprekidne raspodele-nastavak

Aproksimativni algoritam za $\mathcal{N}(0,1)$

$$Z = U_1 + \cdots + U_{12} - 6$$

Egzaktan alogoritam za $\mathcal{N}(0,1)$ - Polarni metod

$$Z_1 = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2), \qquad Z_2 = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$$

Dvodimenzionalna normalna raspodela

Parametri: $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$
Algoritam za generisanje slučajnog normalnog vektora (X_1, X_2) *sa datim parametrima:*

- *Generišemo nezavisne* $Z_1, Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X_1 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$
- $X_2 = m + \sigma Z_2$, *gde je*

$$m = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1), \quad \sigma^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$$

Dvodimenzionalna normalna raspodela

Parametri: $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$
Algoritam za generisanje slučajnog normalnog vektora (X_1, X_2) *sa datim parametrima:*

- *Generišemo nezavisne* $Z_1, Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X_1 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$
- $X_2 = m + \sigma Z_2$, *gde je*

$$m = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1), \quad \sigma^2 = \sigma_2^2(1-\rho^2)$$

Dvodimenzionalna normalna raspodela

Parametri: $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$
Algoritam za generisanje slučajnog normalnog vektora (X_1, X_2) *sa datim parametrima:*

- *Generišemo nezavisne* $Z_1, Z_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $X_1 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$
- $X_2 = m + \sigma Z_2$, *gde je*

$$m = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1), \quad \sigma^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$$

Dvodimenzionalna normalna raspodela

Parametri: $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$
Algoritam za generisanje slučajnog normalnog vektora (X_1, X_2) *sa datim parametrima:*

- *Generišemo nezavisne* $Z_1, Z_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $X_1 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$
- $X_2 = m + \sigma Z_2$*, gde je*

$$m = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - \mu_1), \quad \sigma^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$$

Za vežbu: Zadaci 217, 218, 224, 324-336