

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU
KATEDRA ZA PRIMENJENU MATEMATIKU

VEROVATNOĆA I STATISTIKA
13E082VIS, 13E082VIST, 13E082VISR, 13S082VS

Prof. dr Milan Merkle, Dr Bojana Mihailović, Mast. mat. Milica Jovalekić, asistent

Demonstratori:

Aleksa Bošković, Marina Ivanović, Miloš Mićović, Miloš Nenadović,
Miloš Novaković, Aleksandra Stevanović, Jovan Stojković, Željana Torlak

LABORATORIJSKE VEŽBE

- Termini i prijavljivanje
 - Uputstva za izradu vežbi
 - Uputstva za simulaciju
 - Spisak vežbi po terminima
 - Spisak instaliranog softvera u sali 70

PROLEĆNI SEMESTAR 2019

TERMINI I PRIJAVLJIVANJE

§1. Termini. Vežbe će se održavati u 10 termina **u sali 70**. U svakom terminu ima mesta za 55 studenata. Studenti rade po jednu vežbu u izabranom slobodnom terminu.

Termini (u zagradi je broj zadatka):

- (1) pon 15. april 18-20h, (2) uto 16. april 14-16h, (3) uto 23. april 14-16h, (4) sre 24. april 12-14h,
- (5) pon 6. maj 16-18h, (6) uto 7. maj 14-16h, (7) pon 13. maj 18-20h, (8) čet 16. maj 10-12h, (9) pon 20. maj 18-20h, (10) čet 23. maj 10-12h.

§2. Prijavlјivanje za vežbe. Na sajtu <https://doodle> (link poslat mejlom) treba da se prijavite za termin u kom zelite da branite zadatak iz laboratorijskih vezbi. Ukupan broj raspoloživih mesta je jednak broju aktivnih studenata upisanih na predmetu (plus mala rezerva za slučaj nepredvidivih situacija). Iz tog razloga prijavljivanje na više od jednog termina ili prijavljivanje više puta na isti termin biće sankcionisano anuliranjem poena za lab.

Za pitanja i eventualne probleme sa prijavljivanjem ili u slučaju da ste zaboravili koji ste termin prijavili, obratite se demonstratoru Milošu Nenadoviću, nm160148student.etf.bg.ac.rs

Rok za prijave je 14. april do 24:00. Posle tog roka biće moguće registrovanje samo ako ostane višak mesta u pojedinim terminima, mejlom predmetnim nastavnicima.

UPUTSTVA ZA IZRADU VEŽBI

§3. Zadatak i odbrana. Svaka vežba sastoji se iz dva dela: zadatak i odbrana. Zadatak se radi "kod kuće", a odbrana u zakazanom terminu.

§4. Zadatak - kod kuće. Zadaci zahtevaju računarsku simulaciju i prezentaciju rezultata. Od programskih jezika preporučuje se Python, R, Java ili neki drugi instalirani program (videti spisak softvera na poslednjoj stranici) ili Geogebra online.

U skladu sa definisanim zadatkom, potrebno je kod kuće napraviti program, uveriti se da radi i spremiti prezentaciju rezultata.

Pre dolaska u laboratoriju potrebno je:

- Poslati fajl sa kodom na svoju fakultetsku mejl adresu.
- Napraviti prezentaciju na papiru (kod i ostali sadržaji koji treba da se prikažu na odbrani).
- Ukoliko radite na programu koji nije instaliran (videti spisak instaliranog softvera), pored već navedenog posaljite .exe fajl sebi na mejl, obavezno sa izmenom ekstenzije. Uputstvo za izmenu ekstenzije možete naći na internetu.

§5. Odbrana - u laboratoriji, sala 70. Skinuti kod programa sa mejla i prikazati program na računaru u prisustvu demonstratora. U slučaju da je internet nedostupan, zadatak branite koristeći papirnu verziju.

UPUTSTVA ZA SIMULACIJU

§1. Polazi se od **generatora slučajnih brojeva** na intervalu od 0 do 1: $U \sim \text{Unif}[0, 1]$. Svaki programski jezik ima ovu funkciju, obično je to `rnd`, `rand` ili `Random` ...

§2. Događaj A čija je verovatnoća p simulira se u dva koraka:

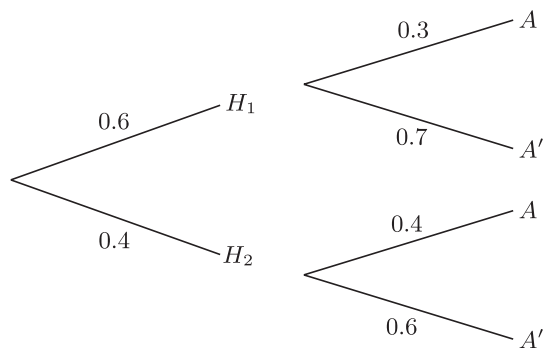
1. Generisati U kao pod §1.
2. Ako je $U \leq p$ onda je A ; u suprotnom slučaju je A' .

§3. Više događaja: Ako je $X = a_i$ sa verovatnoćama p_i , $i = 1, 2, 3$, $\sum p_i = 1$, onda radimo slično:

1. Generisati U kao pod §1.
2. Ako je $U \leq p_1$ onda je $X = a_1$; ako je $p_1 < U < p_1 + p_2$ onda $X = a_2$; ako je $p_1 + p_2 \leq U < 1$, onda $X = a_3$.

Na analogan način se radi za više od 3 vrednosti.

§4. Za višestepene probleme, treba raditi korak po korak. Na primer, ako treba simulirati problem dat dijagramom



Slika 1.

onda u prvom koraku simuliramo H_1 i H_2 , a u drugom koraku A i A' sa $P(A) = 0.3$ ako je u prvom koraku bio H_1 , ili $P(A) = 0.4$ u slučaju da je u prvom koraku bio H_2 .

§5. Generisanje raspodela. U diskretnom slučaju- posebne metode za binomnu raspodelu (primer 209 u udžbeniku) i geometrijsku raspodelu (primer 210). Za neprekidne raspodele preko inverzne funkcije raspodele (primer 212)

SPISAK ZADATAKA PO REDOSLEDU TERMINA

1 (glava 1-primer 12) Na slučajan način deli se duž dužine d na dva dela. Naći verovatnoću da se od dobijenih delova može sastaviti trougao.

Zadatak: Za $d = 1$ koristeći rešenje u knjizi napraviti program za simulaciju izbora dve tačke x i y iz intervala $[0, 1]$ koji na izlazu daje $Z = 1$ ako se od delova može sastaviti trougao i $Z = 0$ ako ne može. Program treba da ima opciju ponavljanja tog postupka n puta (n zadaje korisnik), čime se dobija binarni niz Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Za svako n računa se relativna frekvencija jedinica, $P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$.

Odbrana: Prikazati program, izračunati P_n za nekoliko vrednosti za n i prikazati kako se P_n menja u zavisnosti od n . Da li simulacija potvrđuje rešenje u knjizi?

2 (glava 1-primer 9) Pročitati tekst iz knjige.

Zadatak: Napraviti program simulacije n bacanja po dve homogene kocke, koji pamti koliko je puta zbir dobijenih brojeva bio 9 i isto za zbir 10 i nalazi relativne frekvencije oba zbira.

Odbrana: Prikazati kako radi program, i za nekoliko zadatih vrednosti za n ispitati koji broj se pojavljuje češće i objasniti zašto.

3 (glava 1- primer 27) Jedno društvo od n osoba izmešalo je svoje šešire i svako uzima nasumice po jedan šešir. Tražimo verovatnoću da će bar jedna osoba uzeti svoj šešir (događaj A).

Zadatak: U rešenju na strani 21 udžbenika naći formulu za verovatnoću događaja A i izračunati brojnu vrednost verovatnoće za $n = 7$.

Napraviti program simulacije izbora šešira u slučaju da imamo $n = 7$ osoba. Program registruje da li se dogodio događaj A ($X = 1$) ili nije ($X = 0$). Za dati broj k ponavljanja opita, program nalazi relativnu frekvenciju događaja A kao $P_k = (X_1 + \dots + X_k)/k$.

Odbrana: Prikazati kako radi program. Za nekoliko vrednosti za k ispitati da li su rezultati u saglasnosti sa rešenjem iz knjige. Prikazati odstupanja od tačnog rešenja u zavisnosti od k .

4 (glava 1-primer 13) Pročitati tekst iz knjige.

Zadatak: Smatrajući da su učenici iz škole A numerisani brojevima 1 – 270 a iz škole B kao 271 – 450 napraviti program za slučajan uzorak od 20 učenika, koji na izlazu daje broj izabranih učenika po školama i odgovarajuće proporcije. Predvideti opciju ponavljanja opisanog eksperimenta n puta.

Odbrana: Prikazati program za razne vrednosti n i komentarisati da li su proporcije učenika iz dve škole u skladu sa očekivanjem i kako se rezultat menja u odnosu na n .

5 (glava 1 - primer 17) Jovan je u društvu od 10 osoba koje organizuje lutriju tako što svako ubaci papirić sa svojim imenom u šešir iz koga se zatim izvlače tri različite nagrade. Naći verovatnoću da će Jovan dobiti jednu od nagrada.

Zadatak: Pročitati tekst primera. Napraviti program za simulaciju lutrije opisane u zadatku, sa mogućnošću ponavljanja simulacije n puta, gde je n definisano od strane korisnika.

Odbrana: Prikazati program, ponoviti simulaciju za nekoliko raznih vrednosti n i ispitati da li je relativna frekvencija događaja da Jovan dobija neku od nagrada u skladu sa rešenjem u udžbeniku.

6 (glava 2-zadatak 45) Koliko puta treba baciti kocku da bismo sa verovatnoćom $p = 0.9$ bili sigurni da će bar jednom pasti šestica? Prema rešenju u knjizi, kocku treba baciti bar 13 puta. Cilj vežbe je da se ovo rešenje proveri simulacijom.

Zadatak: Simulirati bacanje kocke 13 puta. Definirati $X = 1$ ako se pojavila bar jedna šestica; u protivnom $X = 0$. Napraviti program koji ponavlja opisani eksperiment n puta, gde se n zadaje od strane korisnika, i prikazuje u koliko ponavljanja se dogodila bar jedna šestica.

Odbrana: Prikazati program, za nekoliko vrednosti za n i ispitati da li dobijeni rezultat potvrđuje rešenje u knjizi. Prikazati kako rezultat zavisi od n .

7 (glava 2-primer 42 i glava 3 primer 53) Bernulijevi opiti- pročitati tekst primera 42.

Zadatak: Napraviti program koji za dato n i p simulira n Bernulijevih opita sa verovatnoćom uspeha p , i ponavlja simulaciju sa istim parametrima N puta. Ulazne veličine su n, p, N a izlaz iz programa je vektor dužine $n + 1$ sa relativnim frekvencijama mogućih vrednosti broja uspeha (od 0 do n). Za $n = 12$, $p = 0.4$ i $N = 100$ nacrtati histogram i uporediti sa tačnim verovatnoćama. Ponoviti isto za $N = 1000$.

Odbrana: Prikazati program i rezultate i komentarisati odstupanja od binomne raspodele.

8 (glava 2-primer 41) Zadatak sa 5 ključeva - pročitati tekst primera 41.

Zadatak: Napraviti program za simulaciju, koji na osnovu zadatog broja ponavljanja (n) na izlazu prikazuje relativne frekvencije događaja A_1, \dots, A_5 .

Odbrana: Prikazati program za nekoliko vrednosti za n i komentarisati odstupanja od rešenja iz udžbenika.

9 Kutija sadrži 6 belih i 4 crne kuglice. Izvlače se dve kuglice bez vraćanja. Naći verovatnoću da je druga izvučena kuglica bela.

Zadatak: Napraviti program za simulaciju izvlačenja dve kuglice bez vraćanja, sa mogućnošću ponavljanja n puta, pri čemu se na kraju registruje relativna frekvencija (P_n) bele kuglice kao aproksimacija za verovatnoću bele kuglice u drugom izvlačenju.

Odbrana: Prikazati program za nekoliko vrednosti za n i zaključiti da li je verovatnoća bele kuglice u drugom izvlačenju ista kao u prvom. Prikazati odstupanja u zavisnosti od n .

10 (glava 2- primeri 48 i 49) - Bajesovske iteracije

Zadatak: Pročitati primer 48. Napraviti program za simulaciju kao u primeru 49, sa mogućnošću da korisnik može da zada početne apriorne verovatnoće za A, B, C .

Odbrana: Prikazati program sa nekoliko različitih ulaznih verovatnoća i komentarisati kako potreban broj iteracija zavisi od toga.

	softver	verzija
<input checked="" type="checkbox"/>	Firefox	55.0.3
<input checked="" type="checkbox"/>	Chrome	61.0.3163.91
<input checked="" type="checkbox"/>	7-Zip	16.0.4
<input checked="" type="checkbox"/>	Total Commander	9.0a
<input checked="" type="checkbox"/>	WinSCP	5.11.1
<input checked="" type="checkbox"/>	PuTTY	0.7
<input checked="" type="checkbox"/>	Adobe Reader DC	1701220093
<input checked="" type="checkbox"/>	Notepad++	7.5.1
<input checked="" type="checkbox"/>	TightVNC	2.8.8
<input checked="" type="checkbox"/>	VMware Workstation Player	12.5
<input checked="" type="checkbox"/>	PSTools	
<input checked="" type="checkbox"/>	delprof2	
<input checked="" type="checkbox"/>	Android Studio	2.3.3
<input checked="" type="checkbox"/>	NetBeans	8.2 ALL
<input checked="" type="checkbox"/>	ECLIPSE	OXYGEN
<input checked="" type="checkbox"/>	Free Pascal	3.0.2. i 2.6.0
<input checked="" type="checkbox"/>	Lazarus	1.6.4
<input checked="" type="checkbox"/>	MessyLab	1.01
<input checked="" type="checkbox"/>	Dev C/C++	5.11
<input checked="" type="checkbox"/>	Dev Pascal	1.9.2
<input checked="" type="checkbox"/>	Python	3.6.4
<input checked="" type="checkbox"/>	pyscripter	3.1.0
<input checked="" type="checkbox"/>	Microsoft Office	2016
<input checked="" type="checkbox"/>	Microsoft Visual Studio Enterprise	2017
<input checked="" type="checkbox"/>	Microsoft Visual C++ 2010 Redistributable Package	
<input checked="" type="checkbox"/>	Microsoft Visual C++ 2010 Redistributable Package	
<input checked="" type="checkbox"/>	MS Visio Professional	2016
<input checked="" type="checkbox"/>	MS Project Professional	2016
<input checked="" type="checkbox"/>	MS SQL Server standard	2017
<input checked="" type="checkbox"/>	HPC Pack 2012 MS-MPI Redistributable Package	
<input checked="" type="checkbox"/>	VIVIO plugin	
<input checked="" type="checkbox"/>	Cygwin	
<input checked="" type="checkbox"/>	WampServer	3.1.0
<input checked="" type="checkbox"/>	Java Platform	8u151
<input type="checkbox"/>	Unity Web Player	
<input checked="" type="checkbox"/>	Pencil tool	3.0.4
<input checked="" type="checkbox"/>	GIT	2.14.1
<input checked="" type="checkbox"/>	TortoiseSVN	1.9.7
<input checked="" type="checkbox"/>	TortoiseGit	2.5.0
<input checked="" type="checkbox"/>	SourceTree	2.3.1.0

<input checked="" type="checkbox"/>		
<input checked="" type="checkbox"/>	GNS3	2.0.3
<input checked="" type="checkbox"/>	CISCO Packet Tracer	Student 6.2
<input checked="" type="checkbox"/>	NUnit	3.8
<input checked="" type="checkbox"/>	Xunit	
<input type="checkbox"/>	JUnit 4 (JAR fajl)	
<input checked="" type="checkbox"/>	Firefox plugin SELENIUM IDE:	
<input checked="" type="checkbox"/>	iMacros for Firefox	
<input checked="" type="checkbox"/>	SQL Inject Me for Firefox	
<input checked="" type="checkbox"/>	StarUML	2.8.1
<input checked="" type="checkbox"/>	StarUML	5.0.
<input checked="" type="checkbox"/>	Composer	
<input checked="" type="checkbox"/>	Quartus II	13.0.1.232
<input checked="" type="checkbox"/>	ModelSim	13.0.1.232
<input checked="" type="checkbox"/>	Simulator simORT2	
<input checked="" type="checkbox"/>	Simulator SPECS	
<input checked="" type="checkbox"/>	Simulator COALA	
<input type="checkbox"/>	NVIDIA Nsight	
<input checked="" type="checkbox"/>	pCAS	1.1
<input checked="" type="checkbox"/>	R	3.4.1
<input type="checkbox"/>		
<input checked="" type="checkbox"/>	MySQL Server	5.7.19
<input checked="" type="checkbox"/>	MySQL Workbench	6.3.9 CE
<input checked="" type="checkbox"/>	ERWin Data Modeler	9.7
<input type="checkbox"/>	TOAD	?
<input checked="" type="checkbox"/>	Pentaho Report Designer	7.1.0.0-12
<input checked="" type="checkbox"/>	BaseX	8.6.6
<input checked="" type="checkbox"/>	ERDiagrammer	
<input checked="" type="checkbox"/>	FDedit	
<input checked="" type="checkbox"/>	SQLite	3.20.1
<input checked="" type="checkbox"/>	DB Browser for SQLite	3.10.1
<input checked="" type="checkbox"/>	PostgreSQL	10
<input checked="" type="checkbox"/>	pgAdmin	
<input checked="" type="checkbox"/>	MariaDB	10.2.8
<input checked="" type="checkbox"/>	Mondrian Schema Workbench	3.14.0.0
<input checked="" type="checkbox"/>	Adonis	
<input checked="" type="checkbox"/>	Data Integration - Kettle	