Verovatnoća i statistika 2018
priprema za kolokvijum

13E082VIS, 13E082VISR, 13E082VIST

Sadržaj:

- O kolokvijumu
- Brojevi relevantnih primera (iz udžbenika)
- Primeri pitanja za kolokvijum (van udžbenika)
- Rešenja zadataka
- Kolokvijum iz 2015. godine (kao primer forme, zadaci za pripremu su izmenjeni)

O kolokvijumu

Kolokvijum je zakazan za 21. april 2018. Imaćete 6 zadataka koji su slični (ali ne istovetni) zadacima na sledećim stranicama ili su u vezi sa nekim od primera u udžbeniku, čiji su brojevi navedeni u sledećem delu. Na kolokvijumu možete da osvojite do 24 poena koji se računaju u predispitne obaveze pod uslovom da ste osvojili najmanje 12 poena; u suprotnom, niste položili kolokvijum i poeni se ne računaju. Kolokvijum se može raditi i u junskom roku umesto ispita.

Brojevi relevantnih primera iz udžbenika

Glava 1: 2,3, 7,8,9,10,12,13,15-26,28,30.

Glava 2: 36-42, 45-50.

Glava 3: 51-67, 69-75, 77-80, 84, 85

Glava 4: 86-95

Примери задатака за колоквијум

1. У кутији су 4 куглице нумерисане бројевима 1, 2, 3 и 4. На случајан начин се из кутије извлаче једна по једна куглица без враћања све док се не извуче куглица на којој је непаран број. Ако се региструју извучени бројеви, описати скуп исхода.
2. Колико пута треба бацити коцкицу да би вероватноћа да се добије бар једна шестица прешла $\frac{1}{2}$?
3. Из шпила од 52 карте се на случајан начин извлаче 4 карте са враћањем. Колика је вероватноћа да су све 4 карте различитог знака?
4. Из шпила од 52 карте се на случајан начин извлаче 4 карте без враћања. Колика је вероватноћа да су све 4 карте различитог знака?
5. Купац је купио 7 сијалица од 40W, 5 сијалица од 60W и 3 sijalice od 100W. Успут је разбио 3 сијалице. Колика је вероватноћа да разбијене сијалице имају укупно 180W?
6. Коцкица за игру се баца 3 пута. Израчунати вероватноћу да ће на бар две коцкице пасти парни бројеви?
7. Из сегмента $[0, 1]$ на случајан начин бирају се два броја. Израчунати вероватноћу да њихов збир буде мањи од 1, а производ већи од $\frac{2}{9}$.
8. У ред са 10 седишта на случајан начин седају 3 особе. Особе X и Y нису селе једна до друге. Израчунати вероватноћу да особа Z седи између особа X и Y.
9. У кутији се налази једна куглица, која може бити црна или бела. У кутију се ставља једна бела куглица, па се из кутије на случајан начин бира једна куглица. Колика је вероватноћа да је у кутији већ била бела куглица, ако је извучена куглица бела?
10. У кутији са резервним деловима, који се по изгледу не разликују, је 5 нових и 3 стара дела. Случајно се бирају два дела одједном и користе извесно време, после чега се враћају у кутију. Након тога се опет случајно бирају два дела одједном.
(а) Израчунати вероватноћу да два другоодабрана дела буду нова.
(б) Ако су другоодабрани делови нови, израчунати вероватноћу да су првоодабрани делови били стари.
11. У једној фабрици 25% артикала се производи на машини A, 35% на машини B и 40% на машини C. Машине A, B и C праве 5%, 4% и 2% шкарта респективно. Сви производи се стављају у исто складиште.
(а) Колика је вероватноћа да случајно изабрани артикал из складишта буде неисправан?
(б) Колика је вероватноћа да је тај неисправн артикал направљен у машини A?
12. Из кутије са 10 белих и 20 црних куглица изгубљена је једна куглица. После тога се на случајан начин из кутије извлачи једна куглица. Наћи вероватноћу да је извучена куглица бела.
13. Вероватноћа догађаја B у једном експерименту је p $(0 < p < 1)$. Независни експерименти се изводе све док се не појави комбинација BB^C. Нека је Y број експерменатa потребних да се комбинација BB^C оствари први пут. Наћи закон расподеле за Y у случају:
(а) $p \neq \frac{1}{2}$;
(б) $p = \frac{1}{2}$.
14. Догађај A се у експерименту реализује са вероватноћом p $(0 < p < 1)$. Експерименти се независно понављају све док се A не понови тачно k пута $(k \geq 1)$. Наћи закон расподеле случајне промењљиве X која представља број изведених експеримената.
15. Догађај A се у експерименту реализује са вероватноћом p $(0 < p < 1)$. Експерименти се независно понављају све док се било A, било A^C не појаве два пута узастопно. Наћи закон расподеле случајне промењљиве Y која представља број изведених експеримената.
16. Из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$ на случајан начин бирају се одједном два различита броја x и y. Нека је $S = \max\{x, y\}$. Одредити закон расподеле случајне промењљиве S.
17. Хомогени новчић баца се све док први пут не падне писмо. Наћи закон расподеле случајне промењљиве X која представља број бацања.
18. Из кутије са 2 црне и 3 беле куглице извлачи се једна по једна без враћања, а извлачење се прекида чим је извучено више белих него црних куглица. Наћи скуп исхода и закон расподеле случајне промењљиве X која представља број извучених белих куглица.

19. У шеширу је 5 коверти. Две коверте су празне, а у три је по 100 динара. На случајан начин извлачимо једну по једну коверту (без враћања) све док не извучемо празну коверту. Нека X представља број извучених коверти, а Y представља добитак.
(а) Колика је вероватноћа да добијемо свих 300 динара.
(б) Наћи закон расподеле случајне променљиве X.
(в) Наћи закон расподеле случајне променљиве Y.
(г) Наћи закон расподеле случајног вектора (X, Y).
20. Наћи функцију расподеле случајне променљиве X која представља прву координату тачке (X, Y) из троугла са теменима $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.
21. Нека случајна променљива X има расподелу $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$ и нека је $P(X > 3) = \mathrm{e}^{-3}$. Наћи λ.
22. Нека је $f(x) = c(1-x)^2$ за $x \in [0,1]$; $f(x) = 0$ за $x \notin [0,1]$.
(а) Одредити $c \in \mathbb{R}$ тако да је f густина расподеле неке случајне променљиве X.
(б) Одредити функцију расподеле случајне променљиве X.
(в) Израчунати $P(X > \frac{1}{3})$.
23. Случајна променљива X има густину расподеле $f(x) = cx^2(1-x)^8$ за $x \in [0,1]$ и $f(x) = 0$ за $x \notin [0,1]$, где је $c \in \mathbb{R}$. Одредити коефицијент c.
24. Случајна променљива X има густину расподеле $f(x) = a\cos x$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $f(x) = 0$ за $x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, где је $a \in \mathbb{R}$. Одредити коефицијент a.
25. Нека је $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. Одредити расподелу случајне променљиве $V = -\log X$.
26. Нека је $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Одредити расподелу случајне променљиве $V = X^2$.
27. Нека је $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. Одредити расподелу случајне променљиве $Y = aX + b$, у случају да је: (а) $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, (б) $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.
28. Случајна променљива X има густину расподеле $f(x) = 3(1-x)^2$ за $x \in [0,1]$; $f(x) = 0$ за $x \notin [0,1]$. Одредити EX и $\mathrm{Var}X$.
29. Случајна променљива X има густину расподеле $f(x) = 495x^2(1-x)^8$ за $x \in [0,1]$ и $f(x) = 0$ за $x \notin [0,1]$. Одредити EX и $\mathrm{Var}X$.
30. Случајна променљива X има густину расподеле $f(x) = \cos x$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $f(x) = 0$ за $x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Одредити EX и $\mathrm{Var}X$.

Решења

1. $\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423\}$.
2. Најмање 4 пута.
3. $\dfrac{4!}{4^4} = \dfrac{3}{32} \approx 0.094.$
4. $\dfrac{\binom{13}{1}^4}{\binom{52}{4}^4} \approx 0.106.$
5. $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{7}{2} + \binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{73}{455} \approx 0.16.$
6. $3 \cdot \dfrac{3 \cdot 3^2}{6^3} + \dfrac{3^3}{6^3} = \dfrac{108}{216} = 0.5.$
7. $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(1 - x - \frac{2}{9x}\right) dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{9}\log 2 \approx 0.013.$
8. $\dfrac{\frac{2}{3!}}{1 - \frac{9!}{10!} \cdot 2} = \dfrac{5}{12} \approx 0.417.$
9. Коришћењем Бајесове формуле и формуле тоталне вероватноће добијамо решење: $\dfrac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} =$

$\frac{2}{3} \approx 0.667.$

10. Када се коришћени делови врате у кутију, они постају стари делови.

H_1- првододабрана 2 стара дела (након враћања стање у кутији је: 5 нових и 3 стара)

H_2- првододабран 1 стари и 1 нови део (након враћања стање у кутији је: 4 нова и 4 стара)

H_3- првододабрана 2 нова дела (након враћања стање у кутији је: 3 нова и 5 старих).

(а) Коришћењем формуле тоталне вероватноће добијамо решење:

$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{150}{28^2} \approx 0.191.$

(б) Коришћењем Бајесове формуле и резултата из дела (а) добијамо решење: $\frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}}{\frac{150}{28^2}} = \frac{1}{5} = 0.2.$

11. (а) Коришћењем формуле тоталне вероватноће добијамо решење:

$0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.4 = 0.0345.$

(б) Коришћењем Бајесове формуле и резултата из дела (а) добијамо решење: $\frac{0.25 \cdot 0.05}{0.0345} \approx 0.36.$

12. Коришћењем формуле тоталне вероватноће добијамо решење: $\frac{9}{29} \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{29} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

13. Нека је $q = 1 - p$. $P(Y = k) = p^{k-1}q + p^{k-2}q^2 + \ldots + pq^{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$

(а) $P(Y = k) = p = pq\frac{q^{k-1} - p^{k-1}}{q-p}$, $k = 2, 3, \ldots$

(б) $P(Y = k) = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$, $k = 2, 3, \ldots$

14. $P\{X = n\} = \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$, $n \geq k$

15. $P(X = 2k) = (p(1-p))^{k-1}\left(p^2 + (1-p)^2\right)$, $k = 1, 2, \ldots$;

$P(X = 2k+1) = (p(1-p))^k$, $k = 1, 2, \ldots$

16. Ако је $\max\{x, y\} = k$, онда је један од бројева x, y једнак k, а други је неки од $k - 1$ бројева мањих од k. $P(S = k) = \frac{k-1}{\binom{n}{k}}$, $k \in \{2, 3, \ldots n\}$.

17. $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

18. $\Omega = \{B, CBB, CBCBB, CCBBB\}$, $P(X = 1) = \frac{3}{5}$, $P(X = 2) = \frac{1}{5}$, $P(X = 3) = \frac{1}{5}$.

19. (а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$.

(б) $P(X = 1) = \frac{2}{5}$, $P(X = 2) = \frac{3}{10}$, $P(X = 3) = \frac{1}{5}$, $P(X = 4) = \frac{1}{10}$.

(в) $P(Y = 0) = \frac{2}{5}$, $P(Y = 100) = \frac{3}{10}$, $P(Y = 200) = \frac{1}{5}$, $P(Y = 300) = \frac{1}{10}$.

(г) $P(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{5}$, $P(X = 2, Y = 100) = \frac{3}{10}$, $P(X = 3, Y = 200) = \frac{1}{5}$, $P(X = 4, Y = 300) = \frac{1}{10}$.

20. $F(x) = 0$, $x \leq 0$; $F(x) = 2x - x^2$, $0 < x < 1$; $F(x) = 1, x \geq 1$.

21. $\lambda = 1$.

22. (а) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{c}{3}$, па је $c = 3$.

(б) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, па је $F(x) = 0$, $x < 0$; $F(x) = 1 - (1-x)^3$, $x \in [0, 1]$; $F(x) = 1$, $x > 1$.

(в) $P(X > \frac{1}{3}) = 1 - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27}$.

23. $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c\int_0^1 x^2(1-x)^8 dx = \{t = 1 - x\} = c\int_0^1 t^8(1-t)^2 dt = \frac{c}{495}$, па је $c = 495$.

24. $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a$, па је $a = 1$.

25. $V \sim \mathrm{Exp}(1)$.

26. $F_V(v) = 1 - e^{\lambda\sqrt{v}}$ за $v \geq 0$ и $F_V(v) = 0$ за $v < 0$.

27. (а) $Y \sim \mathrm{Unif}(b, a+b)$, (б) $Y \sim \mathrm{Unif}(a+b, b)$.

28. $EX=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{4}$, $\mathrm{Var}X=E\left(X^2\right)-(EX)^2=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\frac{1}{16}=\frac{3}{80}$.

29. Увођењем смене $1-x=t$, добијамо $EX=\frac{1}{4}$, $\mathrm{Var}X=\frac{3}{208}$.

30. $EX=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=\frac{\pi}{2}-1$

$\mathrm{Var}X=E\left(X^2\right)-(EX)^2=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\frac{\pi^2}{4}-1+\pi=\pi-3.$

Има још страница...

Ime i prezime: Broj indeksa:

Elektrotehnički fakultet u Beogradu

Verovatnoća i statistika 13E082VIS

– Kolokvijum - 4. april 2015 –

∼∼∼∼∼

Nije dozvoljeno korišćenje udžbenika ni beležaka. Kalkulatori se mogu koristiti. Da bi se računao za konačnu ocenu, zbir osvojenih poena ne može biti manji od 15.

---

1. Bane i Cane gađaju u metu po jedanput i nezavisno jedan od drugog. Verovatnoća da Cane pogodi metu je $\frac{1}{4}$, a verovatnoća da će meta biti pogođena prilikom ovog gađanja je $\frac{1}{2}$. Naći verovatnoću da Bane pogodi metu.

---

[4] **2.** Iz torbe koja sadrži 2 kruške i 3 jabuke vadi se nasumice po jedna voćka sve dok ne bude izvučeno više jabuka nego krušaka. Naći skup ishoda i zakon raspodele broja izvučenih jabuka.

---

[4] **3.** Gustina slučajne promenljive X je $f(x) = C \cdot x^3(1-x)H(x)H(1-x)$, gde je $C > 0$ konstanta koju treba odrediti. Zatim naći $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$.

[4] **4.** Zakon raspodele slučajne promenljive X dat je tablicom:

k	-1	1	2	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	p	$\frac{1}{10}$

Odrediti p, a zatim naći zakon raspodele slučajne promenljive $Y = X^2$.

---

5. Slučajna promenljiva X ima $\text{Exp}\,(2)$ raspodelu, a slučajna promenljiva Y ima raspodelu $\text{Unif}\,(-2, 1)$. Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = 3X - 2Y$.

---

[10] **6.** Sa linije proizvodnje mobilnih telefona izađe u proseku 1% telefona sa nekom greškom u proizvodnji. Pri kontroli kvaliteta primenjuje se postupak koji sa verovatnoćom 0.95 odbacuje defektan telefon, dok u 0.5% slučajeva odbacuje ispravan. a) Naći verovatnoću da je odbačeni telefon zaista neispravan. b) Naći verovatnoću da se od 10 nasumice izabranih telefona koji su odbačeni nađe bar jedan koji je ispravan.