Universidade Federal do Rio de Janeiro

Modelos de Volatilidade para o Mercado Financeiro

Yuri Fahham Saporito

Rio de Janeiro

Abril de 2009

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Modelos de Volatilidade para o Mercado Financeiro

Yuri Fahham Saporito

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Flávio Dickstein.
Co-orientador: Prof. Milan Merkle.

Rio de Janeiro
Abril de 2009

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Modelos de Volatilidade para o Mercado Financeiro

Yuri Fahham Saporito

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.
Aprovada por:

Presidente, Prof. Flávio Dickstein

Prof. Milan Merkle

Prof. Nei Carlos dos Santos Rocha

Prof. Glauco Valle da Silva Coelho

Prof. Max Oliveira de Souza

Prof. Cassio Neri Moreira

Rio de Janeiro
Abril de 2009

Saporito, Yuri Fahham.
Modelos de Volatilidade para o Mercado Financeiro/ Yuri Fahham Saporito. – Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.
xi, 131 p. 29,7 cm.
Orientadores: Flávio Dickstein, Milan Merkle.
Dissertação (Mestrado) — UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2009.
Referências Bibliográficas: p. 129-131 .
1. Modelos de Volatilidade. 2. Volatilidade Implícita. 3. Volatilidade Local
4. Volatilidade Estocástica
I. Dickstein, Flávio *et al.*
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Modelos de Volatilidade para o Mercado Financeiro.

A Deirdre pelo amor, carinho e dedicação.

Agradecimentos

Aos meus pais por todo apoio e dedicação.

Ao meu irmão pela grande amizade.

À minha família por todo incentivo.

Ao meu orientador, Flávio Dickstein, por toda a ajuda (matemática e burocrática), paciência e ótimas discussões.

Ao meu co-orientador, Milan Merkle, por ter me apresentado trabalhos muito interessantes na área de Finanças e pelo incentivo.

Aos membros da banca por terem lido o meu trabalho e pelas sugestões muito pertinentes.

Aos meus amigos; uns por me ajudarem a terminar esse trabalho e outros, por atrapalharem. Em especial a Enio Hayashi, Rodrigo Targino, Roberto Velho, Carlos Amaro e Denis Mattos.

A todos os meus professores pela ajuda e paciência.

Aos matemáticos, aplicados ou não, por fazerem essa dissertação possível.

E, finalmente, ao capitalismo por fazer desse tema algo relevante e por tudo o mais.

Yuri Fahham Saporito
Abril de 2009

"Nenhum ser humano ou país
está mais louco do que aquele que
acredita poder resolver todos os
seus problemas primeiro, para
tornar-se inteligente depois. A
inteligência não é o adorno do
vitorioso, é o caminho da vitória."

Olavo de Carvalho
Filósofo brasileiro

Resumo

Modelos de Volatilidade para o Mercado Financeiro

Yuri Fahham Saporito

Resumo da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Resumo: Essa dissertação tem como objetivo expor de maneria organizada uma visão atual do tema volatilidade para o mercado financeiro. Resultados sobre volatilidade implícita, local e estocástica e suas conexões são fornecidos com demonstrações rigorasas e detalhadas. Além disso, uma metodologia para mensurar a volatilidade de uma série de preços é exposto.

Palavras–chave. Volatilidade, Volatilidade Implícita, Volatilidade Local, Volatilidade Estocástica.

Rio de Janeiro
Abril de 2009

Abstract

Volatility Models for the Financial Market

Yuri Fahham Saporito

Abstract da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Abstract: The present work intents to expose in an organized way the state of the art in volatility. Both results about implied, local and stochastic volatility and also their connection are given with rigorous and detailed proofs. Besides that, a methodology to measure the volatility of a financial time series has been stated.

Keywords. Volatility, Implied Volatility, Local Volatility, Stochastic Volatility.

Rio de Janeiro
Abril 2009

Sumário

1 Introdução **5**

1.1 Cálculo Estocástico . . . 5
1.1.1 Notação . . . 5
1.1.2 Tipos de Convergência . . . 5
1.1.3 Teoremas de Convergência . . . 6
1.1.4 Introdução ao Cálculo Estocástico . . . 6
1.1.5 Integral de Itô . . . 11
1.1.6 Extensões da Integral de Itô . . . 12
1.1.7 Fórmula de Itô . . . 15
1.1.8 Teorema da Representação Martingal . . . 16
1.1.9 Tempo Local e Fórmula de Tanaka . . . 16
1.1.10 Mudança de Medida . . . 17
1.1.11 Equações Diferenciais Estocástica (EDE) . . . 19
1.1.12 Fórmula de Feynman-Kac . . . 20
1.2 Finanças . . . 22
1.2.1 Introdução . . . 22
1.2.2 Medida Martingal Equivalente . . . 23
1.2.3 Completude . . . 24
1.2.4 Preços . . . 24
1.2.5 Alguns Derivativos . . . 25
1.2.6 O Modelo de Black-Scholes Generalizado . . . 25
1.2.7 O Modelo de Black-Scholes . . . 25
1.2.8 A Fórmula de Black-Scholes . . . 26

2 Volatilidade Implícita **27**

2.1 Definições Preliminares . . . 27
2.1.1 Definição, Existência e Unicidade da Volatilidade Implícita . . . 27
2.2 Condições de Não-Arbitragem . . . 30
2.2.1 Introdução . . . 30
2.2.2 Ordem Convexa . . . 30
2.2.3 Caso Discreto . . . 31
2.2.4 Caso Contínuo . . . 34
2.3 Comportamento Assintótico da Volatilidade Implícita . . . 37
2.3.1 A Fórmula do Momento para Volatilidade Implícita . . . 37
2.3.2 Variação Regular e o Comportamento Assintótico da SVI . . . 45
2.4 A Inclinação da Volatilidade Implícita . . . 54
2.5 Condições de Não-Arbitragem para a Volatilidade Implícita . . . 56
2.5.1 Aplicação . . . 59

3 Volatilidade Local **61**
3.1 Lei de Probabilidade Neutra ao Risco . . . 61
3.2 Volatilidade Local . . . 62
3.2.1 Volatilidade Local em Termos da Volatilidade Implícita . . . 71
3.2.2 Volatilidade Implícita em Termos da Volatilidade Local . . . 72

4 Volatilidade Estocástica **75**
4.1 Introdução . . . 75
4.1.1 Medida Martingal Equivalente . . . 75
4.1.2 Martingais e Explosões . . . 76
4.1.3 A EDP de Apreçamento . . . 77
4.1.4 Preço de Mercado do Risco . . . 78
4.1.5 Preço de Mercado do Risco da Volatilidade . . . 78
4.1.6 Apreçamento de uma Opção Européia . . . 79
4.1.7 Apreçamento de uma Call no Caso Semimartingal . . . 80
4.2 O Modelo de Hull-White . . . 82
4.2.1 A Volatilidade Implícita no modelo de Hull-White . . . 83
4.3 O Modelo de Heston . . . 86
4.3.1 O Processo de Volatilidade - Modelo CIR . . . 87
4.3.2 Apreçamento no Modelo de Heston . . . 90
4.3.3 Comportamento Assintótico para a SVI no Modelo de Heston . . . 95
4.3.4 Volatlidade Local no Modelo de Heston . . . 95
4.3.5 Apreçamento e Funções Características . . . 96
4.3.6 A Inversão de Carr-Madan . . . 97
4.4 Método da Transformada de Fourier . . . 98
4.4.1 Introdução . . . 98
4.4.2 Apreçamento de Opções Européias . . . 99
4.4.3 Função de Green . . . 102
4.4.4 Funções Características Analíticas . . . 106
4.4.5 Exemplos . . . 107
4.4.6 Expansão em Séries . . . 108
4.5 O Índice VIX . . . 115

5 Método de Fourier para Estimativa da Volatilidade **119**
5.1 Caso Univariado . . . 119
5.2 Caso Multivariado . . . 125
5.3 Reconstrução da Função de Volatilidade . . . 126
5.4 Implementação do Método . . . 126
5.5 Aplicação - Estimativa dos Parâmetros do Modelo de Heston . . . 127

Prefácio

No ano de 1973, Fischer Black e Myron Scholes publicaram o artigo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities"[8] sobre apreçamento de opções. Nesse artigo, sob certas hipóteses simplificadoras (veja a Seção 1.2.7), eles derivaram uma fórmula para o preço de uma call européia (veja a Definição 1.109), a famosa *fórmula de Black-Scholes* (BS), como função da maturidade T e do preço de exercício K da call, do preço corrente do ativo S_t, da taxa de juros livre de risco r e da volatilidade do ativo σ (suposta constante).

Apesar do enorme impacto causado, a aplicação da Teoria BS no apreçamento de opções revelou sérias limitações. Dado o preço real de uma call, é possível determinar de forma única a volatilidade que deve ser considerada no modelo BS para que ele reaprece essa call. Esta é a chamada volatilidade implícita, para detalhes veja o Capítulo 2. Ao se calcular a volatilidade implícita de diferentes calls sobre o mesmo ativo, verificou-se que ela é, em geral, uma função convexa do preço de exercício, e não constante como supunha a Teoria BS. Esse fenômeno ficou conhecido como o efeito *smile*. Houve, portanto, vários esforços para estender a teoria de modo a superar suas limitações. Uma outra característica importante sobre a volatilidade implícita, que será estudada no Capítulo 2, é o fato dela também poder ser vista como uma maneira de se expressar preços para as calls. Já que na vida real, obviamente, só temos uma quantidade finita de preços, e com isso uma quantidade finita de volatilidades implícitas, uma questão interessante que emerge disso é como podemos apreçar outras calls baseando-nos nesses preços observados, ou seja, como podemos interpolar e extrapolar as volatilidades implícitas, criando assim uma superfície. Obviamente, existem infinitas maneiras de se fazer isso, mas nem todas têm um significado financeiro. Logo, nesse capítulo, nos preocuparemos principalmente em derivar condições para que o processo de criação dessa superfície, tanto de volatilidade implícita como de preço, não crie oportunidades de arbitragem, num sentido que especificaremos na Definição 2.16.

Agora, já que se verificou que a volatilidade não é constante, como podemos modelar o preço do ativo para que esse fato seja levado em conta? Os Capítulos 3 e 4 fornecem algumas respostas para essa pergunta. Além disso, analisamos como esses modelos influenciam nos preços das opções européias em geral, e da call em particular.

Mais especificamente, no Capítulo 3 estudaremos o modelo devido a Bruno Dupire, [13], que descreve a volatilidade como função somente do tempo e do preço do ativo. Supondo isso, Dupire mostrou que, dado todos os preços das calls, só existe uma volatilidade com essa estruttura de dependência que reapreça esses preços extamente como o mercado (caso eles sejam livre de arbitragem), que ele denominou de *volatilidade local*. Nesse capítulo também estudaremos a conexão entre essa volatilidade e a volatilidade implícita. Uma importante característca do modelo de Dupire é a sua completude, isto é, todo derivativo, por mais exótico que ele seja, pode ser replicado, que obviamente não se verifica na realidade.

Então é preciso considerar modelos ainda mais complexos que repliquem o efeito *smile* e que sejam incompletos. Uma maneira de se fazer isso é supor que a volatilidade tem uma fonte de incerteza exógena ao ativo, para o qual o investidor não consegue se proteger. Esses modelos são os modelos de volatilidade estocástica. Então, no Capítulo 4 estudamos primeiro resultados gerais sobre o apreçamento de opções européias quando a volatilidade é estocástica para depois olharmos de forma mais especifica dois modelos.

O primeiro é o modelo devido a John Hull e Alan White, [25], conhecido como modelo de Hull-White e o outro, talvez o mais famoso e usado dentre os de volatilidade estocástica, é o modelo de Heston, criado por Steven Heston, [23]. No final do capítulo é exposto um método desenvolvido por Alan Lewis, [34], para tratar, de maneira geral, o apreçamento de opções européias em modelos de volatilidade estocástica. Além disso, por todo o capítulo, a conexão entre as diversas volatilidade é analísada. Para finalizar, temos uma pequena seção sobre um índice de volatilidade para o mercado americano, o VIX.

À primeira vista, pode parecer que o desenvolvimento do modelos seguiu a ordem do mais simples ao mais complexa, mas essa é somente uma ordem didática. Olhando as datas em que os artigos foram publicados, vê-se claramente que o modelo de volatilidade estocástica veio antes do modelo de volatilidade local, que foi desenvolvido exatamente com a intenção de ser mais simples (no entanto, menos realistas) que os modelos de volatilidade estocástica, que na época se mostraram bastante intratáveis em diversos aspectos práticos. Na verdade, o modelo de volatlidade local deve ser visto mais como uma técnica para tratarmos problemas práticos do que como um modelo para descrever o mercado financeiro.

Até agora só foram descritos modelos para a volatilidade, e em nenhum momento nos preocupamos, de alguma maneira, em medi-la. Esse é o objetivo do Capítulo 5, baseado quase exclusivamente no artigo seminal de Paul Malliavin e Maria Mancino, "Fourier Series Method for Measurement of Multivariate Volatilities", [36]. Além disso, no final do capítulo, exponho de maneira concisa um método, desenvolvido por mim, Rodrigo Targino e Milan Merkle [38], para a estimativa dos parâmetros do modelo de Heston usando essa teoria.

Para um bom entendimento de todo o texto, no primeiro capítulo são enumerados resultados sobre Probabilidade, Processo Estocástico, Cálculo Estocástico e Finanças.

A principal contribuição dessa dissertação é expor de maneria organizada uma visão atual do tema volatilidade para o mercado financeiro. Por isso, todas as demonstrações de resultados relevantes para o tema são dadas com rigor matemático e com a maior quantidade de detalhes possível. Além disso, a Seção 2.5, o Lema 5.3 e a demonstração da Proposição 2.35 são originais.

Capítulo 1

Introdução

Nesse capítulo iremos expor o arcabouço teórico necessário para o bom entendimento dos capítulos subsequentes. A primeira parte se ocupa em fornecer os resultados sobre Cáculo Estocástico, enquanto que na segunda descreveremos os produtos financeiros que serão utilizados, assim como apresentaremos os primeiros detalhes dos modelos matemáticos que estudaremos adiante.

1.1 Cálculo Estocástico

Essa seção foi baseada principalmente em [40], [30] e [47]. A demonstração da maioria dos resultados não será dada, mas, no seu lugar, indicaremos uma referência onde ela poderá ser encontrada.

1.1.1 Notação

Primeiramente, vamos definir três funções, que serão usadas em todo trabalho. Sejam a e b números reais e A um conjunto qualquer. Então definiremos:

$$a \wedge b = \min\{a, b\}$$

$$(a)^+ = \begin{cases} a\ , & \text{se} \quad a \geq 0 \\ \\ 0\ , & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{se} \quad x \in A \\ \\ 0\ , & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}$$

1.1.2 Tipos de Convergência

Definição 1.1 (Convergência em Quase Todo Ponto)**.** Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções mensuráveis em $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Diremos que f_n *converge para* f μ*-em quase todo ponto*, ou μ-q.t.p., se

$$\mu\left(\left\{\omega\ ;\ f_n(\omega) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\omega)\right\}^c\right) = 0.$$

No caso em que estamos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, diremos que f_n *converge para* f *quase certamente (q.c.)* e, nesse caso, podemos reescrever a equação acima na forma

$$P\left(\left\{\omega\ ;\ f_n(\omega) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Definição 1.2 (Convergência em Probabilidade)**.** Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Diremos que X_n *converge para* X *em* P*-probabilidade* se, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

Escreveremos $X_n \xrightarrow{P} X$.

Definição 1.3 (Convergência em L^p)**.** Diremos que a seqüência de funções mensuráveis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *converge para* f *em* $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n(\omega) - f(\omega)|^p d\mu(\omega) = 0.$$

Escreveremos $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Definição 1.4 (Convergência em Distribuição)**.** Uma seqüência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ com funções de distribuição F_n *converge em distribuição, ou em lei,* para uma variável aleatória X com função de distribuição F se a seqüência $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para a $F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ em que F é contínua.
Escreveremos $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

1.1.3 Teoremas de Convergência

Lema 1.5 (Lema de Fatou)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções mensuráveis positivas definidas em um espaço de medida* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*. Então*

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega) \geq \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n(\omega) d\mu(\omega).$$

Demonstração. [4]. □

Teorema 1.6 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência monótona de funções mensuráveis positivas em* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*. Então*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) d\mu(\omega).$$

Demonstração. [4]. □

Teorema 1.7 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções mensuráveis em* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *tal que exista* g μ*-integrável satisfazendo* $|f_n| \leq g$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Suponha que* $f_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ μ*-q.t.p.. Então* f *é* μ*-integrável e vale*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega).$$

Demonstração. [4]. □

1.1.4 Introdução ao Cálculo Estocástico

Em todas as definições que seguem, com as devidas modificações, pode-se tomar $T = +\infty$.

Definição 1.8 (Filtração)**.** Uma filtração em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$ é uma família de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ satisfazendo $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ para todo $t \in [0, T]$ e

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \ , \quad \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

Diremos ainda que a tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$ é um espaço filtrado.

Definição 1.9 (Condições Usuais)**.** Considere uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Defina

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Diremos que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ satisfaz as condições usuais se

(i) $\mathcal{F}_t$ for contínua à direita, isto é, $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, para todo $t \in [0, T]$,

(ii) e para todo $t \in [0, T]$, $\mathcal{F}_t$ contiver todos os conjuntos de medida nula de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, isto é, ser P-completa.

No que segue, estaremos sempre considerando, salvo menção do contrário, o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ e supondo que todas as filtrações satisfazem as condições usuais.

Definição 1.10 (Filtração Gerada por um Processo)**.** Seja $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ um processo em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definiremos a *filtração gerada por X* como sendo

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s \ ; \ 0 \leq s \leq t\right),$$

onde o lado direito é a σ-álgebra gerada pelo processo X até o tempo t.

Notação. Seja f uma função real definida em Ω e considere uma σ-álgebra de Ω, $\mathcal{F}$. Escreveremos

$$f \in \mathcal{F}$$

se f for mensurável com respeito a $\mathcal{F}$.

Definição 1.11 (Processo Adaptado e Mensurável)**.** Diremos que um processo $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ é *adaptado à filtração* $\mathcal{F}_t$, ou $\mathcal{F}_t$*-adaptado*, se

$$X_t \in \mathcal{F}_t \ , \quad \forall \ t \in [0, T].$$

Diremos ainda que o processo X é mensurável no espaço filtrado em questão, se a função $f(t, \omega) = X_t(\omega)$ for mensurável com respeito à σ-álgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}[0, T]$, onde $\mathcal{B}[0, T]$ são os borelianos de $[0, T]$.

Definição 1.12 (Processo Contínuo)**.** Um processo X_t será dito contínuo se a função $t \mapsto X_t(\omega)$ for contínua para $\omega \in \Omega_0 \subset \Omega$, com $P(\Omega_0) = 1$.

Definição 1.13 (Processo Integrável e Quadrado Integrável)**.** Um processo X é dito integrável se $\mathbb{E}_P[|X_t|] < +\infty$, para todo $t \in [0, T]$, e quadrado integrável se $\mathbb{E}_P[X_t^2] < +\infty$, para todo $t \in [0, T]$.

Definição 1.14 (Martingal, Submartingal e Supermartingal)**.** Diremos que o processo $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ é um *martingal* com respeito à filtração $\mathcal{F}_t$ se

(i) X_t for $\mathcal{F}_t$-adaptado.

(ii) $\mathbb{E}_P[|X_t|] < +\infty$, para todo $t \in [0, T]$.

(iii) $\mathbb{E}_P[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Agora, se o item (iii) acima for

$$\mathbb{E}_P[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s \ , \quad \text{para todo} \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

diremos que X é um *submartingal*, e caso seja

$$\mathbb{E}_P[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s \ , \quad \text{para todo} \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

um *supermartingal*.

Observação 1.15. Diremos que um martingal com respeito à filtração $\mathcal{F}_t$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal e estenderemos essa nomenclatura a todas as outras propriedades que valem com respeito a uma filtração.

Proposição 1.16. *Um supermartingal (ou, submartingal) X é um martingal se, e somente se,*

$$\mathbb{E}_P[X_t] = \mathbb{E}_P[X_0] \ , \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Demonstração. [30]. □

Definição 1.17 (Tempo de Parada)**.** Uma função $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dita *tempo de parada* com respeito à filtração $\mathcal{F}_t$ se

$$\{\omega \ ; \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Proposição 1.18. *Seja $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado e contínuo. Considere $\xi \in \mathbb{R}$. Então*

$$\tau_\xi = \inf\{s \geq 0 \ ; \ X_s \geq \xi \quad ou \quad s \geq T\}$$

é um $\mathcal{F}_t$-tempo de parada.

Demonstração. [45]. □

Definição 1.19 (Martingal Local)**.** Seja X um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado e tal que existe uma seqüência $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de tempos de parada com respeito a uma mesma filtração satisfazendo

(i) $\tau_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ P-q.c..

(ii) $X_t^{(k)} = X_{t\wedge\tau_k} - X_0$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal.

Nesse caso, diremos que X é um *martingal local* com respeito à filtração $\mathcal{F}_t$.

Proposição 1.20. *Se X é um $\mathcal{F}_t$-martingal local e τ é um tempo de parada com respeito a $\mathcal{F}_t$, então $X_{t\wedge\tau}$ é também um $\mathcal{F}_t$-martingal local.*

Demonstração. [47]. □

Proposição 1.21. *Se X é um $\mathcal{F}_t$-martingal local tal que $|X_t| \leq Y$, onde Y é uma variável aleatória com $\mathbb{E}_P[|Y|] < +\infty$. Então X é, na verdade, um $\mathcal{F}_t$-martingal.*

Demonstração. [30]. □

Notação. Seja X um processo em $[0,T]$. Defina

$$\overline{X}_T = \sup_{0\leq t\leq T} X_t.$$

Definição 1.22. Diremos que um processo $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ está em $\mathcal{H}^1[0,T]$ se

$$\mathbb{E}_P[\overline{X}_T] < +\infty.$$

Corolário 1.23. *Um $\mathcal{F}_t$-martingal local X tal que $\mathbb{E}_P[\overline{X}_T] < +\infty$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal.*

Proposição 1.24. *Um martingal local positivo é um supermartingal.*

Demonstração. Segue de uma simples aplicação do lema de Fatou. □

Definição 1.25 (Variação)**.** Definiremos a variação de um processo $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ em um intervalo $[t_1,t_2]\subset[0,T]$ com sendo

$$V_X^1([t_1,t_2])=\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{i=1}^{n}|X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n}|,$$

onde $\Pi=\{t_1=t_0^n<\ldots<t_n^n=t_2\}$ é uma partição de $[t_1,t_2]$, $||\Pi||=\sup_{1\leq i\leq n}|t_i^n-t_{i+1}^n|$ e a convergência é em probabilidade. Caso o intervalo em questão seja $[0,t]$, denotaremos a variação de X por $V_X(t)$.

Definição 1.26 (Variação Finita)**.** Um processo $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ será dito de variação finita se $V_X(t)<+\infty$, para todo $t\in[0,T]$.

Definição 1.27 (Variação Quadrática)**.** Definiremos a variação quadrática de um processo $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ em um intervalo $[t_1,t_2]\subset[0,T]$ de maneira similar à variação de X:

$$V_X^2([t_1,t_2])=\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{i=1}^{n}(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})^2,$$

onde a convergência acima é em probabilidade. Caso o intervalo em questão seja $[0,t]$, denotaremos a variação quadrática de X por $\langle X\rangle_t$.

Vale notar que, se um processo contínuo tem variação finita em um intervalo, sua variação quadrática nele é 0.

Definição 1.28 (Variação Cruzada)**.** A variação cruzada entre dois processos $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ e $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ em um intervalo $[t_1,t_2]\subset[0,T]$ é definida por

$$V_{X,Y}^2([t_1,t_2])=\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{i=1}^{n}(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n}-Y_{t_{i-1}^n}).$$

Caso o intervalo em questão seja $[0,t]$, denotaremos a variação cruzada entre X e Y por $\langle X,Y\rangle_t$.

Teorema 1.29 (Desigualdade de Davis)**.** *Existem constantes θ e Θ positivas e universais tais que qualquer martingal local X e tempo de parada τ satisfazem*

$$\mathbb{E}_P\left[\sqrt{\langle X\rangle_\tau}\right]\leq\theta\mathbb{E}_P\left[\overline{X}_\tau\right]\leq\Theta\mathbb{E}_P\left[\sqrt{\langle X\rangle_\tau}\right].$$

Demonstração. [41]. □

Proposição 1.30. *Seja X um martingal local. Então, X será um martingal quadrado integrável se, e somente se, $\mathbb{E}_P[\langle X\rangle_t]<+\infty$, para todo $t\in[0,T]$.*

Demonstração. [41]. □

Definição 1.31 (Semimartingal)**.** Um processo X contínuo e $\mathcal{F}_t$-adaptado é um semimartingal com respeito à filtração $\mathcal{F}_t$ se ele admitir a decomposição

$$X_t=X_0+A_t+M_t,$$

onde A_t é um processo de variação finita e M_t é um $\mathcal{F}_t$-martingal local que satisfazem $A_0=M_0=0$. É possível mostrar que a decomposição é única a menos de um conjunto de medida nula. Identificaremos então o semimartingal com sua decomposição e diremos que (A,M) é a decomposição de X.

Proposição 1.32. *Se X é um semimartingal sob P e se P^* é uma medida de probabilidade equivalente a P, então X será um semimartingal sob P^*.*

Demonstração. [41]. □

Definição 1.33 (Semimartingal Multidimensional)**.** Um vetor $X = (X^1, \ldots, X^n)$ é um semimartingal n-dimensional se cada X^i for um semimartingal.

Definição 1.34 (Movimento Browniano)**.** Um processo $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ contínuo será dito um movimento Browniano em $[0, T]$ com respeito a filtração $\mathcal{F}_t$ se ele satisfizer

(i) $W_0 = 0$.

(ii) W_t é $\mathcal{F}_t$-adaptado.

(iii) $W_t - W_s$ é independente de $\mathcal{F}_s$, para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

(iv) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Iremos, às vezes, nos referir ao movimento Browniano W com respeito a filtração $\mathcal{F}_t$ por $\mathcal{F}_t$-movimento Browniano ou $\{W, \mathcal{F}\}_{t\in[0,T]}$.

Definição 1.35 (Movimento Browniano Multidimensional)**.** Seja $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^n)$ tal que cada W_t^i seja um movimento Browniano e tal que W_t^i e W_t^j sejam independentes para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Diremos então que W_t é um movimento Browniano n-dimensional.

Teorema 1.36 (Caracterização de Lévy para Movimento Browniano)**.** *Seja $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ um $\mathcal{F}_t$-martingal local contínuo com $X_0 = 0$. Então, se*

$$\langle X\rangle_t = t \ , \quad \forall\ t \in [0, T],$$

o processo X é, na verdade, um $\mathcal{F}_t$-movimento Browniano.

Demonstração. [27]. □

Teorema 1.37 (Mudança de Tempo para Martingais)**.** *Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um $\mathcal{F}_t$-martingal local satisfazendo $\lim_{t\to+\infty}\langle X\rangle_t = +\infty$ P-quase certamente. Considere o seguinte tempo de parada*

$$\tau(t) = \inf\{s \geq 0 \ ; \ \langle X\rangle_s > t\}$$

e defina, para cada $t \geq 0$,

$$B_t = X_{\tau(t)} \quad e \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau(t)}.$$

Então, B_t é um $\mathcal{G}_t$-movimento Browniano.

Demonstração. [47]. □

Teorema 1.38 (Teorema de Knight)**.** *Sejam $\{X_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{F}_t$-martingais locais satisfazendo $\lim_{t\to+\infty}\langle X^i\rangle_t = +\infty$ P-quase certamente e $\langle X^i, X^j\rangle_t = 0$, para todo $t \geq 0$. Agora, considere os seguintes tempos de parada*

$$\tau_i(t) = \inf\{s \geq 0 \ ; \ \langle X^i\rangle_s > t\}$$

e defina, para cada $t \geq 0$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$B_t^i = X_{\tau_i(t)}^i \quad e \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_i(t)}.$$

Então, $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n)$ é um $\mathcal{G}_t$-movimento Browniano n-dimensional.

Demonstração. [27]. □

1.1.5 Integral de Itô

No que se segue, estaremos sempre considerando W como sendo um $\mathcal{F}_t$-movimento Browniano em $[0,T]$.

Definição 1.39. Seja $\mathcal{H}^2[0,T]$ o espaço de funções $f:\Omega\times[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfazendo

(i) f é $\mathcal{A}\times\mathcal{B}[0,T]$-mensurável.

(ii) $f(\cdot,t)$ é $\mathcal{F}_t$-adaptada.

(iii) $\mathbb{E}_P\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right]<+\infty$.

Definição 1.40. $\mathcal{H}_0^2[0,T]$ é o subespaço de $\mathcal{H}^2[0,T]$ das funções f da forma

$$f(\omega,t)=\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}(\omega)\chi_{[t_{i-1},t_i)}(t),$$

onde $a_i\in\mathcal{F}_{t_i}$, $\mathbb{E}_P[a_i^2]<+\infty$ e $0=t_0<\ldots<t_n=T$.

Definição 1.41 (Integral de Itô em $\mathcal{H}_0^2[0,T]$)**.** Considere $f\in\mathcal{H}_0^2[0,T]$. Definiremos a integral de Itô de f com respeito à W como sendo

$$\int_0^T f(\omega,t)dW_t=\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}(\omega)(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}).$$

Lema 1.42 (Isometria de Itô em $\mathcal{H}_0^2[0,T]$)**.** *Para toda $f\in\mathcal{H}_0^2[0,T]$ vale*

$$\mathbb{E}_P\left[\left(\int_s^t f(\omega,t)dW_t\right)^2\;\middle|\;\mathcal{F}_s\right]=\mathbb{E}_P\left[\int_s^t f^2(\omega,t)dt\;\middle|\;\mathcal{F}_s\right].$$

Note que a igualdade acima pode ser escrita como

$$\left\|\int_0^T f(\omega,t)dW_t\right\|_{L^2(P)}=\|f\|_{L^2(P\times\lambda)},$$

onde λ é a medida de Lebesgue na reta.

Demonstração. [47]. □

Lema 1.43 ($\mathcal{H}_0^2[0,T]$ é denso em $\mathcal{H}^2[0,T]$)**.** *Para toda $f\in\mathcal{H}^2[0,T]$ existe uma seqüência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}_0^2[0,T]$ tal que*

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^T(f_n(\omega,t)-f(\omega,t))^2dt\right]\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Demonstração. [47]. □

Definição 1.44 (Integral de Itô em $\mathcal{H}^2[0,T]$)**.** Seja $f\in\mathcal{H}^2[0,T]$. Definiremos a integral de Itô de f através do limite

$$\int_0^T f(\omega,t)dW_t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^T f_n(\omega,t)dW_t,$$

onde o limite acima é em $L^2(P)$ e f_n é uma seqüência em $\mathcal{H}_0^2[0,T]$ convergindo para f em $L^2(P\times\lambda)$.

Teorema 1.45. *A integral de Itô está bem-definida em $\mathcal{H}^2[0,T]$, isto é, se $\{f_n\}$ é uma seqüência convergente em $\mathcal{H}_0^2[0,T]$, então a seqüência das integrais de Itô de $\{f_n\}$ convergem em $L^2(P)$ e se duas seqüências $\{f_n\}$ e $\{f'_n\}$ têm o mesmo limite em $\mathcal{H}_0^2[0,T]$, então as respectivas seqüências de integrais de Itô também têm o mesmo limite em $L^2(P)$.*

Demonstração. [47]. □

Teorema 1.46 (Isometria de Itô em $\mathcal{H}^2[0,T]$)**.** *Para toda $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$ vale para todo $0 \leq s \leq t \leq T$*

$$\mathbb{E}_P\left[\left(\int_s^t f(\omega,t)dW_t\right)^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}_P\left[\int_s^t f^2(\omega,t)dt \;\middle|\; \mathcal{F}_s\right].$$

Demonstração. [47]. □

Teorema 1.47 (Integral de Itô como Martingal)**.** *Para qualquer $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$, a integral de Itô de f*

$$\int_0^t f(\omega,s)dW_s$$

é um $\mathcal{F}_t$-martingal contínuo em $[0,T]$. Em particular, para todo $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^t f(\omega,t)dW_t\right] = 0.$$

Demonstração. [47]. □

1.1.6 Extensões da Integral de Itô

Definição 1.48. O espaço $\mathcal{L}_{LOC}^2[0,T]$ é constituido de funções $f : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

(i) f é $\mathcal{A} \times \mathcal{B}[0,T]$-mensurável.

(ii) $f(\cdot,t)$ é $\mathcal{F}_t$-adaptada.

(iii)' $P\left(\int_0^T f^2(\omega,t)dt < +\infty\right) = 1.$

Definição 1.49 (Seqüência Localizadora)**.** Uma seqüência localizadora para $f \in \mathcal{L}_{LOC}^2[0,T]$ é uma seqüência crescente $\{\tau_n\}$ de tempos de parada tal que

(i) $f_n(\omega,t) = f(\omega,t)\chi_{\{\tau_n \geq t\}} \in \mathcal{H}^2[0,T]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{\omega \;;\; \tau_n(\omega) = T\}\right) = 1.$

Proposição 1.50. *Para qualquer $f \in \mathcal{L}_{LOC}^2[0,T]$, a seqüência*

$$\tau_n = \inf\left\{s \geq 0 \;;\; \int_0^s f^2(\omega,t)dt \geq n \text{ ou } s \geq T\right\}$$

é uma seqüência localizadora para f.

Demonstração. [47]. □

Definição 1.51 (Integral de Itô em $\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$)**.** Seja $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ e considere $\{\tau_n\}$ uma seqüência localizadora de f. Definiremos a integral de Itô de f através do limite

$$\int_0^T f(\omega,t)dW_t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^T f(\omega,t)\chi_{\{\tau_n \geq t\}} dW_t,$$

onde a convergência acima é P-quase certa.

No mesmo espírito do Teorema 1.45, podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 1.52. *A integral de Itô está bem-definida em* $\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$.

Demonstração. [47]. □

Teorema 1.53 (Integral de Itô como Martingal Local)**.** *Para qualquer* $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$*, a integral de Itô de* f

$$\int_0^t f(\omega,s)dW_s$$

é um $\mathcal{F}_t$*-martingal local contínuo em* $[0,T]$.

Demonstração. [47]. □

Definição 1.54 (Processo de Itô)**.** Um processo X será dito um *processo de Itô* se existirem $\mu(\omega,t)$ de variação finita e $\sigma(\omega,t) \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ tais que

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(\omega,s)ds + \int_0^t \sigma(\omega,s)dW_s.$$

Proposição 1.55 (Variação Quadrática e Cruzada de Processos de Itô)**.** *Sejam* X^1 *e* X^2 *dois processos de Itô da forma*

$$X^1_t = X^1_0 + \int_0^t \mu_1(\omega,s)ds + \int_0^t \sigma_1(\omega,s)dW_s,$$
$$X^2_t = X^2_0 + \int_0^t \mu_2(\omega,s)ds + \int_0^t \sigma_2(\omega,s)dW_s.$$

Então

$$\langle X^1\rangle_t = \int_0^t \sigma_1^2(\omega,s)ds \quad e \quad \langle X^1, X^2\rangle_t = \int_0^t \sigma_1(\omega,s)\sigma_2(\omega,s)ds$$

.

Demonstração. [47]. □

Observação 1.56. Na extensão da integral acima nos preocupamos mais com o terceiro item da definição 1.39. Acontece que exigir que o integrando seja adaptado à mesma filtração que o movimento Browniano é integrado exclui exemplos interessantes. Para evitarmos isso, vamos considerar, de agora em diante, a seguinte versão do item (ii) da definição 1.39:

(ii)' Existe uma filtração $\mathcal{G}_t$ tal que W é um $\mathcal{G}_t$-martingal contínuo e f é $\mathcal{G}_t$-adaptada.

A título de exemplo, seja (W^1, W^2) um movimento browniano bidimensional. Então, podemos considerar a seguinte integral:

$$\int_0^t W^1_s dW^2_s,$$

já que a filtração gerada pelo processo (W^1, W^2) satisfaza condição $(ii)'$. Para maiores detalhes, veja [40]. Abusando da notação, de agora em diante, iremos denotar por $\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ o espaço das funções que satisfazem (i), $(ii)'$ e o item $(iii)'$ da definição 1.48. Iremos ainda dizer que $\mu = (\mu^1, \ldots, \mu^n) \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ se $\mu_i \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definição 1.57 (Integral de Itô Multidimensional)**.** Seja $\mathbf{W} = (W^1, \ldots, W^n)$ um movimento Browniano n-dimensional e seja $\mu = (\mu^1, \ldots, \mu^n)$ tal que $\mu_i \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$. Definiremos

$$\int_0^t \mu(\omega, s) \cdot d\mathbf{W}_s = \sum_{i=1}^n \int_0^t \mu_i(\omega, s) dW_s^i.$$

Definição 1.58 (Processo de Itô Multivariado)**.** Diremos que um processo X é um *processo de Itô multivariado* se existirem $\mu_i(\omega, t)$, $i = 1, \ldots, n$, de variação finita e $\sigma_{i,j}(\omega, t) \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$, $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, d$ tais que, para $i = 1, \ldots, n$

$$X_t^i = X_0 + \int_0^t \mu_i(\omega, s) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{i,j}(\omega, s) dW_s^j,$$

onde $W = (W^1, \ldots, W^d)$ é um movimento Browniano d-dimensional.

Proposição 1.59. *Se $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$ é $\mathcal{G}_t$-adaptada e $\mathcal{G}_t$ é independente de $\mathcal{F}_t$ (lembre-se que W é um $\mathcal{F}_t$-movimento Browniano), então*

$$X_t = \int_0^t f(\omega, u) dW_u$$

é um processo Gaussiano $\mathcal{F}_t$-adaptado com média zero, incrementos independentes e vale

$$Cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}_P \left[\int_0^{s \wedge t} f^2(\omega, u) du \right].$$

Corolário 1.60. *Se $f \in C[0,T]$, então*

$$X_t = \int_0^t f(u) dW_u$$

é um processo Gaussiano $\mathcal{F}_t$-adaptado com média zero, incrementos independentes e vale

$$Cov(X_t, X_s) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u) du$$

Demonstração. A demonstração do corolário acima pode ser encontrada em [47] e a proposição é uma simples generalização desse corolário, já que se $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e V é uma variável aleatória independente de X, então $XV \sim \mathcal{N}(0, V)$. □

Definição 1.61 (Integral Estocástica Geral)**.** Sejam X um semimartingal contínuo qualquer e $\mathcal{L}^2_{LOC_X}[0,T]$ o espaço das funções $f : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

(i) $f(\cdot, t)$ é $\mathcal{F}_t$-adaptada.

(ii) f é $\mathcal{A} \times \mathcal{B}[0,T]$-mensurável.

(iii) $P\left(\int_0^T f^2(\omega, t) d\langle X \rangle_t < +\infty \right) = 1.$

Então de maneira análoga a integral de Itô, podemos definir a integral estocástica geral

$$\int_0^t f(\omega, s)dX_s,$$

para qualquer $f \in \mathcal{L}^2_{LOC_X}[0,T]$

Proposição 1.62 (Variação Quadrática e Cruzada de Integrais Estocásticas)**.** *Sejam Z^1 e Z^2 duas integrais estocásticas da forma*

$$Z^1_t = \int_0^t f_1(\omega, s)dX_s,$$
$$Z^2_t = \int_0^t f_2(\omega, s)dY_s,$$

onde X e Y são semimartingais contínuos. Então

$$\langle Z^1\rangle_t = \int_0^t f_1^2(\omega, s)d\langle X\rangle_t \quad e \quad \langle Z^1, Z^2\rangle_t = \int_0^t f_1(\omega, s)f_2(\omega, s)d\langle X, Y\rangle_t.$$

1.1.7 Fórmula de Itô

Até agora, para calcularmos uma integral de Itô seria necessário usarmos diretamente a definição, o que, obviamente, seria uma tarefa desgastante. A fórmula de Itô, além de muitas outras aplicações, pode ser usada para facilitar o cálculo da Integral de Itô.

Teorema 1.63 (Fórmula de Itô para o Movimento Browniano)**.** *Seja $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Então*

$$f(t, W_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s)dW_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, W_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s)ds.$$

Demonstração. [47]. □

Teorema 1.64 (Fórmula de Itô para Semimartingais)**.** *Sejam $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ e X um semimartingal. Então*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Demonstração. [27]. □

Corolário 1.65 (Integração por Partes)**.** *Seja $f \in C^1[0,T]$ e seja X um semimartingal. Então*

$$\int_0^t f(s)dX_s = f(t)X_t - f(0)X_0 - \int_0^t X_s f'(s)ds.$$

Demonstração. É uma simples aplicação do Teorema 1.63. □

Teorema 1.66 (Fórmula Multidimensional de Itô)**.** *Sejam $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ e $X = (X^1, \ldots, X^n)$ um semimartingal n-dimensional. Então*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s)dX^i_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s)d\langle X^i, X^j\rangle_s.$$

Demonstração. [47]. □

Notação (Notação Diferencial)**.** Podemos ainda escrever a fórmula de Itô na sua forma diferencial

$$df(t,X_t)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)dX_t^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t,X_t)d\langle X^i,X^j\rangle_t.$$

Analogamente, podemos escrever um processo de Itô na forma diferencial

$$dX_t=\mu(\omega,t)dt+\sigma(\omega,t)dW_t.$$

1.1.8 Teorema da Representação Martingal

Vimos no Teorema 1.53, que a integral de Itô de uma função em $\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ com respeito a um $\mathcal{F}_t$-movimento Browniano é um $\mathcal{F}_t$-martingal local. Vamos ver que, de certa maneira, a recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.67 (Teorema da Representação Martingal em $\mathcal{H}^2[0,T]$)**.** *Seja W um movimento browniano em um espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{A},P)$ e considere a filtração gerada por esse movimento browniano, $\mathcal{F}_t^W$. Se $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ é um $\mathcal{F}_t^W$-martingal quadrado integrável, então existe $\phi\in\mathcal{H}^2[0,T]$ tal que, para todo $t\in[0,T]$,*

$$X_t=X_0+\int_0^t\phi(\omega,s)dW_s.$$

Demonstração. [47]. □

Teorema 1.68 (Teorema da Representação Martingal)**.** *Seja W um movimento browniano em um espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{A},P)$ e considere a filtração gerada por esse movimento browniano, $\mathcal{F}_t^W$. Se $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ é um $\mathcal{F}_t^W$-martingal local, então existe $\phi\in\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ tal que, para todo $t\in[0,T]$,*

$$X_t=X_0+\int_0^t\phi(\omega,s)dW_s.$$

Demonstração. [41]. □

1.1.9 Tempo Local e Fórmula de Tanaka

Em toda essa seção, X será um $\mathcal{F}_t$-semimartingal.

Definição 1.69 (Tempo de Ocupação)**.** Seja $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Definiremos o *tempo de ocupação de B por X até o tempo t* como sendo

$$\Gamma_t^X(B,\omega)=\int_0^t\chi_B(X_s(\omega))d\langle X\rangle_s.$$

Definição 1.70 (Tempo Local)**.** Considere um processo $L_t^X(x,\omega)$ com $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ e $\omega\in\Omega$ tomando valores em $\mathbb{R}_+$ e satisfazendo

(i) $L_t^X(x)\in\mathcal{F}_t$, para todo $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$.

(ii) $(t,x)\longmapsto L_t^X(x)$ é contínua com P-probabilidade 1.

(iii) $\Gamma_t^X(B,\omega)=2\displaystyle\int_B L_t^X(x,\omega)dx$ para todo $t\geq 0$ com P-probabilidade 1.

Denominaremos $L_t^X(x)$ de tempo local de X.

Proposição 1.71. *O item (iii) da definição acima é equivalente à*

$$\int_0^t f(X_s)d\langle X\rangle_s = 2\int_{\mathbb{R}} f(x)L_t^X(x,\omega)dx \ , \quad \forall\ t \geq 0,$$

para toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mensurável.

Demonstração. É uma simples aplicação do Teorema da Convergência Monótona. □

Teorema 1.72. *Para qualquer semimartingal contínuo X, o processo bidimensional $L_t^X(x)$ existe.*

Demonstração. [27]. □

Teorema 1.73 (Fórmula de Tanaka)**.** *Para todo $K \in \mathbb{R}$,*

$$(X_t - K)^+ = (X_0 - K)^+ + \int_0^t \chi_{(K,+\infty)}(X_s)dX_s + L_t^X(K).$$

Demonstração. [27]. □

1.1.10 Mudança de Medida

Definição 1.74 (Exponencial Estocástica)**.** Seja $\mu \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$. Definiremos a *exponencial estocástica* de μ como sendo o processo

$$\mathcal{E}_t(\mu) = \exp\left\{-\int_0^t \mu(\omega,s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu^2(\omega,s)ds\right\}.$$

Vale notar que a exponencial estocástica é sempre um supermartingal, já que ela é um martingal local positivo.

Teorema 1.75 (Condição de Novikov)**.** *Para toda $\mu \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$, a exponencial estocástica $\mathcal{E}_t(\mu)$ será um P-martingal se μ satisfizer a condição de Novikov*

$$\mathbb{E}_P\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \mu^2(\omega,s)ds\right\}\right] < +\infty.$$

Demonstração. [47]. □

Teorema 1.76 (Teorema de Girsanov)**.** *Seja X um processo de Itô que tenha a seguinte forma sob P*

$$dX_t = \mu(\omega,t)dt + \sigma(\omega,t)dW_t$$

e seja $\nu(\omega,t)$ um processo de variação finita. Considere

$$\theta(\omega,t) = \frac{\mu(\omega,t) - \nu(\omega,t)}{\sigma(\omega,t)}$$

e suponha que $\mathcal{E}_t(\theta)$ seja um P-martingal. Defina a seguinte medida P^* através da derivada de Radon-Nykodým

$$\frac{dP^*}{dP} = \mathcal{E}_t(\theta).$$

Então, P^* é equivalente a P,

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta(\omega,s)ds$$

é um P^*-movimento Browniano e, sob P^*,

$$dX_t = \nu(\omega,t)dt + \sigma(\omega,t)dW_t^*.$$

Demonstração. [47]. □

Definição 1.77 (Exponencial Estocástica Multidimensional)**.** Seja $\mu \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$um processo n-dimensional. A *exponencial estocástica* de μ nesse caso é definida como sendo o processo

$$\mathcal{E}_t(\mu) = \exp\left\{-\int_0^t \mu(\omega,s)\cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t ||\mu||^2(\omega,s)ds\right\},$$

onde $\mathbf{W}$ é um movimento Browniano n-dimensional.

Teorema 1.78 (Condição de Novikov Multidimensional)**.** *Para toda $\mu \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ n-dimensional, a exponencial estocástica $\mathcal{E}_t(\mu)$ será um P-martingal se μ satisfizer a condição de Novikov*

$$\mathbb{E}_P\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T ||\mu||^2(\omega,s)ds\right\}\right] < +\infty.$$

Demonstração. [27]. □

Observação 1.79. Note que um processo n-dimensional μ satisfaz a condição de Novikov multidemsional, se cada componente satisfizer a condição de Novikov unidimensional.

Teorema 1.80 (Teorema de Girsanov Multidimensional)**.** *Sejam X^i processos de Itô com a forma, sob P*

$$dX^i_t = \mu_i(\omega,t)dt + \sigma_i(\omega,t)dW^i_t$$

para cada $i = 1,\ldots,n$ e seja $\nu_i(\omega,t)$, $i = 1,\ldots,n$, processos de variação finita. Considere

$$\theta_i(\omega,t) = \frac{\mu_i(\omega,t) - \nu_i(\omega,t)}{\sigma_i(\omega,t)}$$

e suponha que $\mathcal{E}_t(\theta)$ seja um P-martingal. Defina P^* através da derivada de Radon-Nykodým

$$\frac{dP^*}{dP} = \mathcal{E}_t(\theta).$$

Então, P^* é equivalente a P,

$$W^{i^*}_t = W^i_t + \int_0^t \theta_i(\omega,s)ds$$

é um P^*-movimento Browniano n-dimensional e, sob P^*,

$$dX^i_t = \nu_i(\omega,t)dt + \sigma_i(\omega,t)dW^{i^*}_t.$$

Demonstração. [27]. □

Proposição 1.81 (Variação Cruzada sob Mudança de Medida)**.** *Sejam W e B dois movimentos Brownianos tais que*

$$\langle W,B\rangle_t = \int_0^t \rho_s ds,$$

onde $\rho_s \in [-1,1]$. Agora considere um processo $\mu = (\mu^1,\mu^2)$ satisfazendo o Teorema 1.80 e seja P^* a medida definida através da derivada de Radon-Nykodým

$$\frac{dP^*}{dP} = \mathcal{E}_t(\theta).$$

Então

$$\langle W^*, B^* \rangle_t = \int_0^t \rho_s ds,$$

onde $W_t^* = W_t + \int_0^t \mu^1(\omega, s)ds$ *e* $B_t^* = B_t + \int_0^t \mu^2(\omega, s)ds$.

Demonstração. [39]. □

1.1.11 Equações Diferenciais Estocástica (EDE)

Primeiramente, nos preocuparemos com um possível significado para uma "solução"do sistema

$$dX_t^i = \mu_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{i,j}(t, X_t)dW_t^j \ , \quad t \in [0, T] \tag{1.1}$$

onde $i = 1, \ldots, n$ e $X_0^i = x_0^i$. Suponha que tanto a equação quanto a condição inicial estão no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e que $W = (W^1, \ldots, W^d)$ é um movimento Browniano d-dimensional com respeito a uma filtração $\widetilde{\mathcal{F}}_t$. Suponha ainda que x_0 é independente de $\widetilde{\mathcal{F}}_t$. Agora defina

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_t = \sigma(\sigma(x_0) \cup \widetilde{\mathcal{F}}_t), \\ &\mathcal{N} = \{N \subseteq \Omega \ ; \ \exists \ G \in \mathcal{G}_T \ com \ N \subseteq G \ e \ P(G) = 0\} \end{aligned}$$

e considere a filtragem aumentada $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N})$. É possível mostrar que $\mathcal{F}_t$ satisfaz as condições usuais e que W é também um $\mathcal{F}_t$-movimento Browniano, [27]. No que segue, vamos usar a notação acima.

Definição 1.82 (Solução Forte)**.** Uma *solução forte* do sistema de equações diferenciais estocásticas (1.1) em um espaço de probabilidade dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e com respeito a um movimento Browniano W d-dimensional e uma condição inicial x_0 fixos é um processo $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ satisfazendo

(i) X_t é adaptado à filtração $\mathcal{F}_t$.

(ii) $P(X_0 = x_0) = 1$.

(iii) $P\left(\int_0^t \left(|\mu_i(s, X_s)| \ + \ \sigma_{i,j}^2(s, X_s)\right) ds < \infty\right) = 1$ para todos $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, d$.

(iv) Para cada $i = 1, \ldots, n$, vale a identidade:

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t \mu_i(s, X_s)ds \ + \ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)dW_s^j$$

P-quase certamente para todo $t \in [0, T]$.

Teorema 1.83 (Teorema de Existência e Unicidade para EDE)**.** *Suponha que exista constante* $\Theta > 0$ *tal que* μ *e* σ *satisfazem as seguintes condições*

$$\begin{aligned} ||\mu(t,x) - \mu(t,y)|| \ + \ ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \ &\leq \ \Theta||x - y||, \\ ||\mu(t,x)||^2 + ||\sigma(t,x)||^2 \ &\leq \ \Theta^2(1 + ||x||^2), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$ *e* $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Suponha ainda que* x_0 *é independente de* $\widetilde{\mathcal{F}}_T$ *e que*

$$\mathbb{E}_P\left[||x_0||^2\right] < \infty.$$

Então existe uma solução forte $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *para a EDE 1.1. Além disso, existe* $\beta = \beta(\Theta, T) > 0$ *tal que, para todo* $t \in [0,T]$

$$\mathbb{E}_P\left[||X_t||^2\right] \leq \beta(1 \ + \ \mathbb{E}_P\left[||x_0||^2\right])e^{\beta t}.$$

E ainda, se Y_t *é outra solução contínua e* L^2*-limitada em* $[0,T]$*, então*

$$P\left(X_t = Y_t \ , \quad \forall \ t \in [0,T]\right) = 1.$$

Demonstração. [27]. □

Definição 1.84 (Difusão)**.** Diremos que X é uma difusão se ele for uma solução forte da equação 1.1.

Teorema 1.85 (Propriedade de Markov)**.** *Seja* X *uma solução forte da EDE 1.1. Então, para todo* $t \in [0,T]$ *fixo e para toda* h *Borel-mensurável, existe uma função* g

$$\mathbb{E}_P[h(X_T) \mid \mathcal{F}_t] = g(t, X_t).$$

Demonstração. [40]. □

1.1.12 Fórmula de Feynman-Kac

Considere ainda o sistema de EDEs 1.1. Suponha que os coeficientes μ_i e $\sigma_{i,j}$ satisfazem as condições do Teorema 1.83. Então existe uma única solução forte da EDE acima, que denotaremos por X. Defina agora o seguinte operador diferencial

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Teorema 1.86 (Fórmula de Feynman-Kac)**.** *Suponha que os coeficientes do sistema de EDEs 1.1 satisfaçam as hipóteses do Teorema 1.83. Seja* $q \in C(\mathbb{R}^n)$ *e seja* $f \in C(\mathbb{R}^n)$ *tal que existe* $\Theta > 0$ *e* $\lambda \geq 1$ *de modo que*

$$|f(x)| \leq \Theta(1 + \|x\|^{2\lambda}) \ , \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n,$$

ou tal que $f(x) \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^n$. *Se* $u \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$ *é uma solução da equação*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{D}u(t,x) - q(x)u(t,x) \\ \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

satisfazendo

$$\max_{0\leq t\leq T} |u(t,x)| \leq \tilde{\Theta}(1 + \|x\|^{2\tilde{\lambda}}) \ , \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n,$$

para alguns $\tilde{\Theta} > 0$ *e* $\tilde{\lambda} \geq 1$. *Então* u *admite a representação*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_P\left[e^{-\int_0^t q(X_s)ds} f(X_t) \mid X_0 = x\right].$$

Em particular, tal solução é única.

Demonstração. [27]. □

Teoremas de Existência e Unicidade para EDP Parabólica

Definição 1.87. Seja $f : E \longrightarrow F$, onde (E, d_E) e (F, d_F) são espaços métricos. Diremos que f é *Hölder contínua*, se existirem $C > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$d_F(f(x), f(y)) \leq C d_E(x, y)^\alpha \ , \quad \forall\ x, y \in E.$$

Caso α seja igual a 1, diremos que f é *Lipschitz contínua*.

Definição 1.88. Seja L o seguinte operador diferencial

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u$$

e considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - Lu(t,x) = f(t,x) & \text{em } (0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ \\ u(0,x) = \phi(x) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Diremos que L é um *operador diferencial elíptico* se para todo $(t,x) \in\ (0,T]\times\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq 0.$$

Caso exista $\gamma > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \gamma||\xi||^2 \ , \quad \forall\ (t,x) \in\ (0,T]\times\mathbb{R}^n,$$

diremos que L é um *operador diferencial uniformemente elíptico.*

Teorema 1.89 (Existência)**.** *Suponha que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas*

(i) L é uniformemente elíptico.

(ii) Os coeficientes a_{ij} e b_i são limitados em $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, Lipschitz contínuos uniformemente em subconjuntos compactos de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ e os a_{ij} são Hölder contínuos em x, uniformemente em $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

(iii) O coeficiente c é limitado em $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ e Hölder contínuo uniformemente em subconjuntos compactos de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

e suponha ainda que $f(t,x)$ é contínua em $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ e Hölder contínua em x uniformemente em $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, que $\phi(x)$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ e que existem constantes positivas θ e Θ tais que

$$\begin{aligned} |f(t,x)| \leq& \Theta(1 + \|x\|^\theta) \ , \quad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ |\phi(x)| \leq& \Theta(1 + \|x\|^\theta) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Então existe uma única solução, $u(t,x)$, para o problema (1.2) para $0 \leq t \leq T$ satisfazendo

$$|u(t,x)| \leq \Theta'(1 + \|x\|^{\theta'}) \ , \quad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n,$$

com θ' e Θ' constantes positivas.

Demonstração. [22]. □

Teorema 1.90 (Unicidade)**.** *Suponha que L é um operador diferencial elíptico e que exista uma constante positiva Θ tal que*

$$|a_{ij}(t,x)| \leq \Theta(||x||^2+1) \ , \quad |b_i(t,x)| \leq \Theta(||x||+1) \quad e \quad |c(t,x)| \leq \Theta.$$

Então existe no máximo uma solução para o problema (1.2) satisfazendo

$$|u(t,x)| \leq \Theta'(1+\|x\|^{\theta'}) \ , \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

onde θ' e Θ' são constantes positivas.

Demonstração. [22]. □

1.2 Finanças

1.2.1 Introdução

As definições que vamos utilizar podem ser encontradas, assim como uma explicação menos sucinta, em [40].

Definição 1.91 (Mercado)**.** Um *mercado matemático*, ou simplesmente *mercado*, é uma filtração $\mathcal{F}_t$ e um sistema de processos de Itô, que chamaremos de dinâmica do mercado, definidos no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ com a seguinte forma

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt, \\ dS_t^i &= \mu_t^i(\omega)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{i,j}(\omega) dW_t^j, \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $t \in [0,T]$, onde cada μ^i e $\sigma^{i,j}$ são $\mathcal{F}_t$-adaptados. Iremos denotar o mercado acima por $\{B_t, \mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$. Os processos S^i são os ativos de risco, o processo B é o ativo livre de risco e a filtração $\mathcal{F}_t$ é a informação disponível nesse mercado no instante t.

Observação 1.92 (Outras Hipóteses)**.** Estaremos supondo tacitamente que

(i) É possível vender o ativo a descoberto.

(ii) O ativo pode ser transacionado continuamente.

(iii) Todos os valores mobiliários são infinitamente divisíveis.

(iv) Não há custo de transação e impostos.

(v) O ativo não paga dividendos.

Definição 1.93 (Estratégia)**.** Uma *estratégia* no mercado $\{B_t, \mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ é um processo $n+1$-dimensional mensurável e $\mathcal{F}_t$-adaptado, isto é, em que cada componente é mensurável e $\mathcal{F}_t$-adaptado.

Considere uma estratégia $\theta(\omega,t) = (\theta_t^0(\omega), \ldots, \theta_t^n(\omega))$. Cada $\theta_t^j(\omega)$, $j = 0, \ldots, n$ é a quantidade que um investidor, que escolheu a estratégia $\theta(\omega,t)$, tem do ativo S^i no tempo t, onde estamos usando a notação $S_t^0 = B_t$. Note ainda que o significado de toda estratégia $\theta(\omega,t)$ ser $\mathcal{F}_t$-adaptado é que as escolhas de um investidor não podem se basear em informações futuras ou desconsiderar informções passadas.

Definição 1.94 (Valor de uma Estratégia)**.** O *valor de uma estratégia* $\theta(\omega,t) = (\theta_t^0(\omega),\ldots,\theta_t^n(\omega))$ é dado por

$$V_t^\theta(\omega) = \theta_t^0(\omega)B_t(\omega) + \sum_{i=1}^{n}\theta_t^i(\omega)S_t^i(\omega).$$

Definição 1.95 (Estratégia Auto-Financiável)**.** Uma estratégia θ é dita *auto-financiável* se $\theta_t^0 r_t B_t$ e $\mu_t^i\theta_t^i$ tem variação finita em $[0,T]$ e $\theta_t^i\sigma_t^{i,j} \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$, para todos i e j, e ainda

$$dV_t^\theta(\omega) = \theta_t(\omega)\cdot d\mathbf{S}_t\ , \quad \forall\ t\in[0,T].$$

Definição 1.96 (Estratégia Admissível)**.** Uma estratégia θ auto-financiável é *admissível* se existe constante A tal que

$$V_t^\theta(\omega) \geq -A\ , \quad P-\text{q.c. em} \quad [0,T]\times\Omega$$

De agora em diante vamos nos referir ao mercado como sendo a filtração $\mathcal{F}_t$, o sistema de processos de Itô e as estratégia admissíveis.

Definição 1.97 (Arbitragem)**.** Uma estratégia admissível θ é chamada de *arbitragem* no mercado $\{B_t,\mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ se $V_0^\theta = 0$ e

$$V_T^\theta \geq 0 \quad P-\text{q.c. em} \quad \Omega \quad \text{com} \quad P(V_T^\theta > 0) > 0.$$

Diremos que um mercado é *livre de arbitragem* se não existir uma arbitragem nele.

1.2.2 Medida Martingal Equivalente

Definição 1.98 (Medida Martingal Equivalente)**.** Uma medida P^* no espaço $(\Omega,\mathcal{A})$ é dita uma *medida martingal local equivalente* para o mercado $\{B_t,\mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ se

(i) P^* é equivalente a P

(ii) e cada processo S_t^i/B_t é um martingal local sob P^*.

Se trocarmos (ii) por

(ii)' e cada processo S_t^i/B_t é um martingal sob P^*,

chamaremos P^* de *medida martingal equivalente*. Às vezes iremos utilizar a nomenclatura *medida neutra ao risco* para ambos os casos.

Proposição 1.99. *Suponha que o mercado $\{B_t,\boldsymbol{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ tenha uma medida martingal local equivalente. Então esse mercado não tem arbitragem.*

Demonstração. [40]. □

Teorema 1.100. *Suponha que, para $i=1,\ldots,n$, exista $\gamma^i\in\mathcal{H}^2[0,T]$ satisfazendo a condição de Novikov e tal que*

$$\sum_{j=1}^{d}\sigma_t^{i,j}\gamma_t^i = \mu_t^i - r_t S_t^i.$$

Agora defina a medida P^* através da derivada de Radon-Nikodým

$$\frac{\partial P^*}{\partial P} = \mathcal{E}_t(\gamma).$$

Então P^* é uma medida martingal local equivalente para o mercado $\{B_t,\boldsymbol{S}_t\}_{t\in[0,T]}$. Em particular, esse mercado não tem arbitragem.

Demonstração. [40]. □

1.2.3 Completude

Vamos supor que as hipóteses do Teorema acima são satisfeitas e, portanto, existe uma medida martingal local equivalente P^* no mercado $\{B_t, \mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$.

Definição 1.101 (Título de Risco Europeu)**.** Um *título de risco europeu*, ou simplesmente *título de risco*, com maturidade $0 < T^* < T$ é um contrato que paga, em T^*, uma variável aleatória $R \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ limitada inferiormente e $\mathcal{F}_{T^*}$-mensurável. Chamaremos essa variável aleatória de *payoff* e, por abuso de notação, iremos identificar o título de risco com o seu *payoff*.

Definição 1.102 (Título Replicável)**.** Diremos que um título de risco R é replicável no mercado $\{B_t, \mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ se existir uma estratégia admissível θ e um número real k tais que

$$R = V_T^\theta(k) = k + \int_0^T \theta_t^0 dB_t + \sum_{i=1}^n \int_0^T \theta_t^i dS_t^i \ , \quad P^* - \text{q.c.},$$

e tal que $V_t^\theta(k)$ é um P^*-martingal. Nesse caso, θ é dita uma estratégia replicadora.

Definição 1.103 (Mercado Completo)**.** Um mercado $\{B_t, \mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ é dito completo se todo título de risco europeu com maturidade T for replicável no mercado.

Teorema 1.104. *O mercado $\{B_t, \boldsymbol{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ é completo se, e somente se, a matriz de volatilidades $\sigma_t(\omega) = (\sigma_t^{i,j}(\omega))_{i,j}$ tiver uma inversa à esquerda P-quase certamente em $[0,T]\times\Omega$, $\Gamma_t(\omega)$, $\mathcal{F}_t$-adaptada, ou seja, tal que*

$$\Gamma_t(\omega)\sigma_t(\omega) = I_d \quad P - q.c. \ em \quad [0,T]\times\Omega,$$

onde I_d é a matriz identidade $d\times d$. Note que isso é equivalente ao posto de $\sigma_t(\omega)$ ser igual a d P-quase certamente em $[0,T]\times\Omega$.

Demonstração. [40]. □

Corolário 1.105. *Se o mercado $\{B_t, \boldsymbol{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ for completo, então o processo γ definido no Teorema 1.100 é único. Em particulor existe uma única medida martingal local equivalente.*

Demonstração. [40]. □

1.2.4 Preços

Definição 1.106 (Preço de Arbitragem)**.** Seja R um título de risco europeu com maturidade T no mercado $\{B_t, \mathbf{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ e seja P^* a medida martingal local equivalente. Definimos o *preço de arbitragem* desse título de risco no instante $t \in [0,T]$ como

$$B_t \mathbb{E}_{P^*}[B_T^{-1} R \mid \mathcal{F}_t].$$

Definição 1.107 (Preços do Comprador e do Vendedor)**.** Considere um título de risco europeu R com maturidade T. Definiremos o *preço do comprador* desse título de risco como

$$b(R) = \sup\left\{y \in \mathbb{R} \ ; \ \text{existe uma estratégia admissível } \theta \text{ tal que } V_T^\theta(-y) \geq -R \ , \ P^* - \text{q.c.}\right\}$$

e, de forma análoga, definiremos o *preço do vendedor* como

$$s(R) = \inf\left\{y \in \mathbb{R} \ ; \ \text{existe um estratégia admissível } \theta \text{ tal que } V_T^\theta(y) \geq R \ , \ P^* - \text{q.c.}\right\}.$$

Se $b(R) = s(R)$, chamaremos esse valor de *preço* do título de risco europeu R. Para uma melhor discução sobre esses preços, veja [40]. Definiremos ainda como *spread* a diferença $b(R) - s(R)$.

Teorema 1.108. *Suponha que as hipóteses do Teorema 1.100 sejam válidas no mercado $\{B_t, \boldsymbol{S}_t\}_{t\in[0,T]}$ e que ele seja completo. Então o preço de qualquer título de risco europeu é dado pelo preço de arbitragem desse título.*

Demonstração. [40]. □

1.2.5 Alguns Derivativos

Vamos definir agora as opções vanilla:

Definição 1.109 (Call Européia)**.** Um contrato, sobre um ativo S, que permite ao seu detentor comprar da contra-parte S em uma data futura pré-determinada T a um preço, também pré-determinado, K é denominado *call européia*, ou simplesmente, *call*. A data T é dita a maturidade do contrato e K, o preço de exercício. Iremos às vezes nos referir a esse contrato como call (T, K). Note que o *payoff* desse contrato pode ser escrito como $(S_T - K)^+$.

Definição 1.110 (Put Européia)**.** Um contrato, sobre um ativo S, que permite ao seu detentor vender a contra-parte S em uma data futura pré-determinada T a um preço, também pré-determinado, K é denominado *put européia*, ou simplesmente, *put*. Iremos também nos referir a esse contrato como put (T, K). Nesse caso, o *payoff* desse contrato é $(K - S_T)^+$.

1.2.6 O Modelo de Black-Scholes Generalizado

Vamos supor agora um modelo mais simples, com somente um ativo de risco e uma fonte de incerteza

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt, \\ dS_t &= \mu_t(\omega) S_t dt + \sigma_t S_t(\omega) dW_t, \end{aligned}$$

Suponha que $\sigma_t(\omega)$ é não nula. Nesse caso $\gamma_t = (\mu_t - r_t)/\sigma_t$ e, portanto, se

$$\mathbb{E}_P \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \frac{(\mu_t - r_t)^2}{\sigma_t^2} dt \right\} \right] < +\infty,$$

pelo Teorema 1.100, existe uma medida martingal local equivalente P^*. Além disso, pelo Teorema 1.104, esse mercado é completo. Portanto, o preço de qualquer título de risco europeu é dado pelo seu preço de arbitragem.

1.2.7 O Modelo de Black-Scholes

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e seja $\{W_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ um movimento browniano nesse espaço de probabilidade. O *modelo de Black-Scholes* para uma ativo S_t supõe o seguinte

(i) S_t tem a seguinte dinâmica, sob P: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, onde μ e σ são constantes.

(ii) Não existe oportunidade de arbitragem nesse mercado.

(iii) É possível vender o ativo a descoberto.

(iv) O ativo pode ser transacionado continuamente.

(v) É possível emprestar e tomar emprestado dinheiro a uma taxa de juros constante livre de risco, r, ou seja, $dB_t = r B_t dt$.

(vi) Todos os valores mobiliários são infinitamente divisíveis.

(vii) Não há custo de transação e impostos.

(viii) O ativo não paga dividendos.

1.2.8 A Fórmula de Black-Scholes

Vamos denotar por $C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma)$ o preço de uma call (T, K) em um instante t no modelo de Black-Scholes. Note que $C^{BS}(S_T, 0, K, r, \sigma)$ é conhecido e vale

$$C^{BS}(S_T, 0, K, r, \sigma) = (S_T - K)^+.$$

Para qualaquer instante t, C^{BS} é dado pela fórmula

$$C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) = S_t\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-),$$

onde Φ é a função de distribuição da normal padrão e

$$d_\pm = \frac{\ln\left(S_t/Ke^{-r(T-t)}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \pm \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}.$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula de Black-Scholes. Agora, definindo $\kappa = \ln(Ke^{-r(T-t)}/S_t)$ e $\tau = T - t$ podemos escrever C^{BS} de uma maneira mais simples

$$C^{BS}(S_t, \tau, \kappa, \sigma) = S_t(\Phi(d_+) - e^{\kappa}\Phi(d_-)),$$

com

$$d_\pm = \frac{-\kappa}{\sigma\sqrt{\tau}} \pm \frac{\sigma}{2}\sqrt{\tau}.$$

A variável κ é conhecida como log-strike. Salvo menção do contrário, usaremos sempre a letra grega κ para o log-strike. Vale notar que a relação entre κ e K é biunívoca, isto é, para cada κ existe somente um K satisfazendo a igualdade $\kappa = \ln(Ke^{-r(T-t)}/S_t)$, e vice-versa. Portanto, usaremos indistintamente, em todo o texto, κ e K.

Capítulo 2

Volatilidade Implícita

Nesse capítulo introduziremos o conceito de volatilidade implícita do modelo de Black-Scholes, mostraremos sua existência e unicidade e expecificaremos algumas restrições para o formato da superfície de volatilidade implícita. Iremos ainda deduzir condições para que uma quantidade discreta ou contínua de opções de compra sejam livre de arbitragem e, no caso contínuo, estudaremos as implicações dessas condições no formato da superfície de volatilidade implícita.

2.1 Definições Preliminares

2.1.1 Definição, Existência e Unicidade da Volatilidade Implícita

Definição 2.1. Seja $C_t(T,K)$ o preço (de mercado ou de um modelo) de uma call (T,K) no instante t. Definiremos a *volatilidade implícita de Black-Scholes*, ou simplesmente *volatilidade implícita*, como sendo o número $\hat{\sigma}_t(T,K)$ que satisfaz

$$C_t(T,K) = C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \hat{\sigma}_t(T,K)).$$

Observação 2.2. Quando nos referenciarmos aos preços das calls (T,K) no instantes t através do log-strike $\kappa = \ln(K/S_t e^{r(T-t)})$ e do tempo para o vencimento $\tau = T-t$, denotaremos a volatilidade implícita por $\hat{\sigma}(\kappa,\tau)$.

Observação 2.3. No caso em que C_t é dado por um modelo, consideraremos o preço de arbitragem (veja a Definição 1.106). Em toda a dissertação, usaremos essa mesma notação.

Observação 2.4. Supondo que o mercado ou o modelo em que o preço $C_t(T,K)$ é considerado sejam livres de arbitragem, temos que a *Paridade Put-Call* é valida e com isso

$$C_t(T,K) + Ke^{-r(T-t)} = P_t(T,K) + S_t,$$

onde $P_t(T,K)$ é o preço (de mercado ou do modelo) de uma put (T,K) no instante t. Como o modelo de Black-Scholes também é livre de arbitragem, temos que

$$C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) + Ke^{-r(T-t)} = P^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) + S_t,$$

onde $P^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma)$ é o preço da put (T,K) no modelo de Black-Scholes no instante t. Portanto, subtraindo as equações,

$$C_t(T,K) - C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) = P_t(T,K) - P^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma),$$

e então se $\hat{\sigma}_t(T,K)$ é a volatilidade implícita com respeito a uma call, ela também a será com respeito a put.

Teorema 2.5 (Existência e Unicidade)**.** *Se os preços $C_t(T,K)$ são livres de arbitragem para todo T e K positivos e $0 \leq t \leq T$, então as volatilidades implícitas $\hat{\sigma}_t(T,K)$ existem e são únicas.*

Demonstração. Para verificarmos a existência e a unicidade da volatilidade implícita, note que

(i) $\lim_{\sigma \to 0} C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) = (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+$.

Basta notar que $d_\pm = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\ln(S_t/K)+r(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \pm \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$ e que portanto, quando $\sigma \to 0$,

$$\begin{aligned} S_t > Ke^{-r(T-t)} &\Leftrightarrow \ln(S_t/K) + r(T-t) > 0 \\ &\Rightarrow d_\pm \to +\infty \\ &\Rightarrow C^{BS} \to S_t - Ke^{-r(T-t)}. \\ S_t = Ke^{-r(T-t)} &\Rightarrow C^{BS} \to 0. \\ S_t < Ke^{-r(T-t)} &\Rightarrow C^{BS} \to 0. \end{aligned}$$

Note que esse limite nos permite definir continuamente C^{BS} para $\sigma = 0$.

(ii) $\lim_{\sigma \to +\infty} C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \sigma) = S_t$.

Segue do fato de que $d_+ \to +\infty$ e $d_- \to -\infty$, quando $\sigma \to +\infty$.

(iii) $(S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ \leq C_t(T,K) \leq S_t$.

Para isso considere a estratégia de, no instante 0, comprar o ativo S e vender a opção $C(T,K)$. Então, no instante t, o valor dessa estratégia é $\Pi_t = S_t - C_t(T,K)$, e com isso,

$$\Pi_T = S_T - C_T(T,K) = S_T - (S_T - K)^+ = \min\{S_T, K\}.$$

Logo, $0 \leq \Pi_T \leq K$ e, portanto, por arbitragem

$$0 \leq \Pi_t \leq Ke^{-r(T-t)} \Rightarrow 0 \leq S_t - C_t(T,K) \leq Ke^{-r(T-t)} \Rightarrow S_t \geq C_t(T,K) \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Como claramente $C_t(T,K) \geq 0$, a desigualdade (iii) segue.

(iv) $\dfrac{\partial C}{\partial \sigma}^{BS} = S_t\sqrt{T-t}\ \phi(d_+)$, onde $\phi = \Phi'$.

Essa derivada é a grega Vega. Para mais detalhes sobre as gregas, veja [24]. Agora, calculando a derivada diretamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \sigma}^{BS} &= S_t \frac{\partial}{\partial \sigma}\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial \sigma}\Phi(d_-) = \\ &= S_t\phi(d_+)\frac{\partial d_+}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_-)\frac{\partial d_-}{\partial \sigma} = \\ &= S_t\phi(d_+)\left(\frac{\partial d_-}{\partial \sigma} + \sqrt{T-t}\right) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_-)\frac{\partial d_-}{\partial \sigma} = \\ &= S_t\sqrt{T-t}\ \phi(d_+) + \frac{\partial d_-}{\partial \sigma}(S_t\phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_-). \end{aligned}$$

Note agora que

$$S_t\phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_-) = S_t\frac{e^{\frac{-d_+^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - Ke^{-r(T-t)}\frac{e^{\frac{-d_-^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} =$$
$$= \frac{e^{\frac{-d_+^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(S_t - Ke^{-r(T-t)}e^{d_+\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}).$$

Mas $d_+\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2(T-t)}{2} = \ln(S_te^{r(t-t)}/K)$. Logo

$$S_t\phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_-) = 0.$$

Agora, por (iv), temos que C^{BS} é estritamente crescente com relação a σ e, portanto, injetiva. Por (i), (ii) e por C^{BS} ser uma função contínua da volatilidade temos que a imagem de $[0,+\infty)$ por C^{BS} variando somente a volatilidade é $[(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+, S_t]$. Logo $C^{BS} : [0,+\infty) \longrightarrow [(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+, S_t]$ é bijetiva. Já por (iii), $C_t(T,K) \in [(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+, S_t]$, e com isso, temos a existência e a unicidade da volatilidade implícita $\hat{\sigma}_t$. □

Definição 2.6 (Superfície de Volatilidade Implícita)**.** Seja $T^* > 0$ fixo e considere a família de preços:

$$C_t = \{C_t(T,K)\ ;\ K > 0\ e\ T \in (0,T^*]\}.$$

A superfície de volatilidade implícita (SVI) é o conjunto

$$\hat{\sigma}_t = \{(T,K,\hat{\sigma}_t(T,K))\ ;\ K > 0\ e\ T \in (0,T^*]\}$$

tal que

$$C_t(T,K) = C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \hat{\sigma}_t(T,K)).$$

Definição 2.7 (*Smile*)**.** Para $T > 0$ fixo, considere a curva

$$\{(K,\hat{\sigma}_t(T,K))\ ;\ K > 0\},$$

que denominaremos de *smile*.

Observação 2.8. Note que se a hipótese de volatilidade constante, que o modelo de Black-Scholes supõe, fosse verdadeira, então o *smile* seria uma curva constante com valor igual ao da volatilidade do modelo. Mas estudos empíricos, veja [24], mostram que a volatilidade implícita varia com o preço de exercício, isto é, o *smile* não é uma reta constante. Na verdade, o que se verifica é o formato de um sorriso, o que explica a nomenclatura.

Exemplo 2.9. Suponha que, para t fixo, a volatilidade implícita não dependa de K, ou seja, $\hat{\sigma}_t(T,K) = \hat{\sigma}_t(T)$. Nesse caso, considere a seguinte extensão do modelo de Black-Scholes

$$dS_t = rS_tdt + \sigma(t)S_tdW_t^*, \tag{2.1}$$

onde W^* é um movimento Browniano sob a medida neutra ao risco P^* e $\sigma(t)$ é uma função determinística Lebesgue-quadrado integrável. Vamos mostrar que esse modelo pode gerar a mesma estrutura de volatilidade implícita quando ela não depende de K e satisfaz algumas hipóteses de regularidade. Sabemos que nesse modelo o preço de uma call (T,K) no instante t é dada por

$$\mathbb{E}_{P^*}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+] = C^{BS}(S_0, T-t, K, r, \bar{\sigma}_{t,T})$$

com

$$\bar{\sigma}_{t,T} = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(t)dt$$

Então para termos $C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \bar{\sigma}_{t,T}) = C_t = C^{BS}(S_t, T-t, K, r, \hat{\sigma}_t(T))$ só é preciso que $\bar{\sigma}_{t,T} = \hat{\sigma}_t(T)$, já que C^{BS} é bijetiva com relação à volatilidade. Logo

$$\hat{\sigma}_t(T)(T-t) = \int_t^T \sigma^2(s)ds \tag{2.2}$$

e, portanto, para que essa extensão do modelo de Black-Scholes gere essa estrutura da volatilidade implícita, é necessário que $\hat{\sigma}_t(T)(T-t)$ seja crescente e absolutamente contínua com relação a T. Então, o modelo (2.2) pode gerar qualquer volatilidade implícita que não dependa do preço de exercício, bastando que equação (2.2) seja verdadeira.

2.2 Condições de Não-Arbitragem

2.2.1 Introdução

Em toda essa seção, não estaremos supondo nenhuma dinâmica para o ativo sobre o qual as opções serão calculadas. A principal referência usada aqui foi [9].

2.2.2 Ordem Convexa

Definição 2.10. Sejam μ e ν duas medidas no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Diremos que ν é mais cara que μ, em símbolos $\mu \preceq \nu$, se para toda $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu(x).$$

Chamaremos essa relação de ordem convexa.

O próximo lema nos dá uma condição mais fácil de verificarmos que uma medida é mais cara que outra.

Lema 2.11. *Sejam μ e ν duas medidas no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Então*

$$\mu \preceq \nu \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} (x-K)^+ d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} (x-K)^+ d\nu(x), \quad \forall\ K > 0.$$

Demonstração. Para uma referência da demonstração desse resultado, veja [9]. □

Uma maneira de se interpretar o lema acima é que uma medida é mais cara que a outra se todas as calls com a mesma maturidade calculadas com respeito a essa medida é mais cara que quando calculadas com respeito à outra. Supondo algo mais sobre as medidas, essa equivalência pode ser reformulada em termos das puts.

Lema 2.12. *Sejam μ e ν duas medidas de probabilidade com mesma esperança em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Então*

$$\mu \preceq \nu \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} (K-x)^+ d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} (K-x)^+ d\nu(x), \quad \forall\ K > 0.$$

Demonstração. Segue facilmente da igualdade

$$(x-K)^+ - (K-x)^+ = x - K.$$

□

Teorema 2.13. *Sejam $(\mu^t)_{t\in\mathcal{J}}$ um conjunto de medidas de probabilidades com a mesma esperança β e $\mathcal{J}\subseteq\mathbb{R}_+$ um boreliano qualquer. Então, existe uma martingal markoviano $(X_t)_{t\in\mathcal{J}}$ com distribuições marginais μ^t se, e somente se,*

$$\mu^t \preceq \mu^s, \quad \forall\ t<s \text{ em } \mathcal{J}.$$

Demonstração. Uma referência para a demonstração desse resultado pode ser encontrada em [9]. □

Observação 2.14. O teorema anterior é uma generalização de um resultado que veremos no próximo capítulo, devido a Dupire. Esse resultado nos garante a existência de uma difusão que apreça todo o contínuo de calls e puts da mesma maneira que o mercado. Como veremos, o conhecimento desses preços é equivalente ao conhecimento da distribuição do ativo subjacente a eles. A generalização é que, no teorema acima, $\mathcal{J}$ pode ser um boreliano qualquer, enquanto que no teorema de Dupire é necessário que seja um intervalo.

O corolário que segue nos diz que, no teorema acima, não é preciso pedirmos que o martingal X_t seja markoviano, pois as hipóteses do teorema nos fornecem isso automaticamente.

Corolário 2.15. *Seja $(\mu^t)_{t\in\mathcal{J}}$ como no teorema acima. Então, existe uma martingal $(X_t)_{t\in\mathcal{J}}$ com distribuições marginais μ^t se, e somente se, $\mu_t\preceq\mu_s$ para todo $t<s$ em $\mathcal{J}$.*

2.2.3 Caso Discreto

Hipóteses. Sejam $\{C_k\}_{k\in\{1,\dots,M\}}$ os preços de M calls européias, sobre o mesmo ativo subjacente S, com maturidades $0<T_1\leq\ldots\leq T_m<+\infty$ e preços de exercício $0<K_1\leq\ldots\leq K_n<+\infty$. Denotaremos o preço de uma call (T_j,K_i) por $C(T_j,K_i)$. Suponha que não haja spreads nesses preços.

Agora defina, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, os conjuntos $\mathcal{K}_i=\{K\ ;\ K$ é preço de exercíco para alguma call com maturidade $T_i\}$. Vamos supor ainda que $0\in\mathcal{K}_i$, para todo i, que $C(T_i,0)=S_0$ e que exista $K^*\gg\max\{K_j;\ j=1,\dots,n\}$ tal que $C(T_i,K^*)=0$. Note que, portanto, $C(T_i,K)=0$, se $K\geq K^*$.

Considere ainda as seguintes notações: $\mathcal{K}_i^*=\mathcal{K}_i\bigcup\{K^*\}$ e $d_i=|\mathcal{K}_i|-1$. Então podemos enumerar os elementos de $\mathcal{K}_i^*$ de forma que

$$0=K_0^i<\ldots<K_{d_i}^i<K_{d_i+1}^i=K^*.$$

Definição 2.16 (Não-Arbitragem Estrita)**.** Diremos que $\{C_k\}_{k\in\{1,\dots,M\}}$ é estritamente livre de arbitragem se existir um processo X em algum espaço de probabilidade filtrado $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{F}_t,P)$ tal que $e^{-rt}X_t$ é um martingal e

$$e^{-rT_i}\mathbb{E}_P[(X_{T_i}-K_j)^+]=C(T_i,K_j).$$

Diremos também, nesse caso, que o martingal X reapreça o mercado.

Notação. Seja μ uma medida qualquer definida nos borelianos de $\mathbb{R}$ e seja F uma função integrável com respeito a essa medida. Faremos uso da seguinte notação no que segue:

$$\mathbb{E}_\mu[F(X)]=\int_{\mathbb{R}}F(x)d\mu(x).$$

Vale notar que X na fórmula acima não necessariamente é o mesmo da definição acima. Aqui, X é apenas uma variável *dummy*.

Definição 2.17 (Medida Compatível)**.** Uma medida μ^i é compatível em T_i se

$$e^{-rT_i}\mathbb{E}_{\mu^i}[(X-K)^+]=C(T_i,K),$$

para todo $K\in\mathcal{K}_i$

Definição 2.18. Para facilitar as contas que seguem, vamos definir, para $j \in \{0, \ldots, d_i\}$

$$\Delta_j C(T_i) = \frac{C(T_i, K^i_{j+1}) - C(T_i, K^i_j)}{K^i_{j+1} - K^i_j}$$

e $\Delta_{d_i+1} C(T_i) = 0$.

Proposição 2.19. *Existe uma medida compatível em T_i se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas*

(i) Positividade:

$$C(T_i, K) \geq 0, \quad \forall\ K \in \mathcal{K}_i.$$

(ii) Monotonicidade:

$$-e^{-rT_i} \leq \Delta_j C(T_i) \leq 0, \quad \forall\ j \in \{0, \ldots, d_i + 1\}.$$

(iii) Convexidade:

$$\Delta_{j-1} C(T_i) \leq \Delta_j C(T_i), \quad \forall\ j \in \{0, \ldots, d_i + 1\}.$$

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que a taxa de juros é 0. A ida dessa proposição é trivial. Para demonstrarmos a volta vamos construir uma medida μ que reapreça o mercado. Para simplificar a notação, escreva $d = d_i$. Lembre-se que, por definição, $K_{d+1} = K^*$ e $C(T_i, K_{d+1}) = 0$. Considere então a seguinte medida

$$d\mu(x) = \sum_{j=0}^{d+1} \gamma_j\ d\delta_{K^i_j}(x),$$

onde $\delta_{K^i_j}$ é o delta de Dirac concentrado em K^i_j e os números γ_j serão escolhidos de modo que $\sum_{j=0}^{d+1} \gamma_j = 1$, $\gamma_j \geq 0$ e tal que μ seja compatível em T_i. Para isso, defina

$$q_j = 1 + \Delta_j C(T_i), \quad \forall\ j \in \{0, \ldots, d + 1\}.$$

Por (ii) e (iii), temos que $0 \leq q_j \leq q_{j+1} \leq 1$. Agora defina

$$\gamma_j = q_j - q_{j-1}, \quad \forall\ j \in \{1, \ldots, d + 1\}$$

e $\gamma_0 = q_0$. Para $k \in \{0, \ldots, d + 1\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^{d+1} K_j \gamma_j &= \sum_{j=k+1}^{d+1} K_j (q_j - q_{j-1}) = \sum_{j=k+1}^{d+1} K_j (\Delta_j C(T_i) - \Delta_{j-1} C(T_i)) = \\
&= -\Delta_k C(T_i) K_{k+1} + 0 + \sum_{j=k+1}^{d} (K_j - K_{j+1}) \Delta_j C(T_i) = \\
&= -\Delta_k C(T_i) K_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{d} C(T_i, K_{j+1}) - C(T_i, K_j) = \\
&= -\frac{C(T_i, K_{k+1}) - C(T_i, K_k)}{K_{k+1} - K_k} K_{k+1} + C(T_i, K_{k+1}) = \\
&= -\frac{C(T_i, K_{k+1}) K_k - C(T_i, K_k) K_{k+1}}{K_{k+1} - K_k}.
\end{aligned}$$

Note que, fazendo $k = 0$ na equação acima, concluimos que μ tem esperança igual a S_0. Por outro lado,

$$K_k \sum_{j=k+1}^{d+1} \gamma_j = K_k \sum_{j=k+1}^{d+1} (q_j - q_{j-1}) = K_k(q_{d+1} - q_k) =$$
$$= K_k(\Delta_{d+1}C(T_i) - \Delta_k C(T_i)) = -\frac{C(T_i, K_{k+1})K_k - C(T_i, K_k)K_k}{K_{k+1} - K_k}.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}_\mu[(X - K_k)^+] = \sum_{j=0}^{d+1}(K_j - K_k)^+\gamma_j = \sum_{j=k+1}^{d+1}(K_j - K_k)\gamma_j = \sum_{j=k+1}^{d+1} K_j\gamma_j - K_k \sum_{j=k+1}^{d+1} \gamma_j =$$
$$= -\frac{C(T_i, K_{k+1})K_k - C(T_i, K_k)K_{k+1}}{K_{k+1} - K_k} + \frac{C(T_i, K_{k+1})K_k - C(T_i, K_k)K_k}{K_{k+1} - K_k} = C(T_i, K_k).$$

□

Definição 2.20 (Medida de Preço Superior)**.** Para cada T_i, considere a medida μ^i definida por

$$d\mu^i(x) = \sum_{j=0}^{d+1} \gamma_j^i \; d\delta_{K_j^i}(x),$$

onde $\gamma_j^i = \Delta_j C(T_i) - \Delta_{j-1}C(T_i)$ para $j \in \{1, \ldots, d_i + 1\}$ e $\gamma_0 = 1 - \Delta_0 C(T_i)$. Denominaremos μ^i de *medida de apreçamento superior.*

Lema 2.21. *A medida de apreçamento superior interpola os preços das call linearmente nos preços de exercício.*

Demonstração. Vamos supor, novamente, que a taxa de juros é 0. Fixe uma maturidade T_i e seja K um número positivo tal que exista k tal que $K_k \leq K \leq K_{k+1}$. Considerando a medida de apreçamento superior μ^i, teremos que

$$\mathbb{E}_{\mu^i}[(X - K)^+] = \sum_{j=k+1}^{d_i+1} (K_j - K)\gamma_j = \sum_{j=k+1}^{d_i+1} ((K_j - K_k) + (K_k - K))\gamma_j =$$
$$= C(T_i, K_k) + (K_k - K) \sum_{j=k+1}^{d_i+1} \gamma_j = C(T_i, K_k) + (K - K_k)\frac{C(T_i, K_{k+1}) - C(T_i, K_k)}{K_{k+1} - K_k} =$$
$$= \frac{K - K_k}{K_{k+1} - K_k} C(T_i, K_{k+1}) + \frac{K_{k+1} - K}{K_{k+1} - K_k} C(T_i, K_k).$$

Caso não exista o acima sitado k, então $K \geq K^i_{d_i+1}$, e, portanto, $\mathbb{E}_{\mu^i}[(X - K)^+] = 0$. Logo, a conclusão do lema permanece válida. □

Lema 2.22. *Seja ν uma medida que satisfaça $e^{-rT_i}\mathbb{E}_\nu[(X - K_j^i)^+] \leq C(T_i, K_j^i)$, $\forall\ j \in \{0, \ldots, d_i + 1\}$. Então, para todo $K > 0$,*

$$\mathbb{E}_\nu[(X - K)^+] \leq \mathbb{E}_{\mu^i}[(X - K)^+],$$

onde μ^i é a medida de preço superior.

Demonstração. Pela hipótese do lema, temos que

$$\mathbb{E}_\nu[(X-K)^+] \leq \mathbb{E}_{\mu^i}[(X-K)^+], \quad \forall\ K \in \mathcal{K}_i.$$

Note que para todo $K \geq K^i_{d_i+1}$, a conclusão do lema é válida. Agora suponha que $K \leq K^i_{d_i+1}$. Então existe k tal que $K^i_k \leq K \leq K^i_{k+1}$. Como $\mathbb{E}_\nu[(X-K)^+]$ é convexo em K,

$$\begin{aligned} e^{-rT_i}\mathbb{E}_\nu[(X-K)^+] &\leq \frac{K-K_k}{K_{k+1}-K_k}e^{-rT_i}\mathbb{E}_\nu[(X-K_{k+1})^+] + \frac{K_{k+1}-K}{K_{k+1}-K_k}e^{-rT_i}\mathbb{E}_\nu[(X-K_k)^+] \leq \\ &\leq \frac{K-K_k}{K_{k+1}-K_k}C(T_i,K_{k+1}) + \frac{K_{k+1}-K}{K_{k+1}-K_k}C(T_i,K_k) = e^{-rT_i}\mathbb{E}_{\mu^i}[(X-K)^+], \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do lema 2.21. □

Esse último lema nos dará uma condição equivalente à não arbitragem estrita para calls com maturidade diferentes. Lembre-se de que estamos denotando as maturidades por $0 < T_1 \leq \ldots \leq T_m < +\infty$.

Lema 2.23. *Sejam $T_j < T_{j'}$ duas maturidades tais que $\mathcal{K}_j \supseteq \mathcal{K}_{j'}$. Então os preços das calls com essas maturidades são livres de arbitragem estrita se e somente se*

$$e^{rT_j}C(T_j,K) \leq e^{rT_{j'}}C(T_{j'},K), \quad \forall\ K \in \mathcal{K}_{j'}.$$

Demonstração. A ida , novamente, é trivial. Agora considere as medidas de apreçamento superior μ^j e $\mu^{j'}$. Então, por hipótese, $\mathbb{E}_{\mu^j}[(X-K)^+] \leq \mathbb{E}_{\mu^{j'}}[(X-K)^+]$ para todo $K \in \mathcal{K}_{j'}$. Pelo lema 2.22,

$$\mathbb{E}_{\mu^j}[(X-K)^+] \leq \mathbb{E}_{\mu^{j'}}[(X-K)^+]\ , \quad \forall\ K > 0.$$

Logo, $\mu^j \preceq \mu^{j'}$ e, então, pelo Teorema 2.13, existe um martingal X com distribuições marginais μ^j em T_j e $\mu^{j'}$ em $T_{j'}$, e com isso, para $K \in \mathcal{K}_j$

$$e^{-rT_j}E[(X_{T_j}-K)^+] = C(T_j,K) \quad \text{e} \quad e^{-rT_{j'}}E[(X_{T_{j'}}-K)^+] = C(T_{j'},K).$$

Portanto, esses preços são estritamente livres de arbitragem. □

2.2.4 Caso Contínuo

Definição 2.24 (Funções Preço de Call)**.** Diremos que uma função $c : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é um *preço de call* se existir um processo X em algum espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, P)$ tal que $X_0 = S_0$, $e^{-rt}X_t$ é um martingal e

$$c(T,K) = e^{-rT}\mathbb{E}_P[(X_T-K)^+].$$

Diremos ainda que uma função $c(T,K)$, com $T > 0$ fixo, é um *preço de call* se existir uma medida positiva ν_T com suporte em $\mathbb{R}_+$ tal que

$$c(T,K) = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}}(x-K)^+ d\nu_T(x).$$

Proposição 2.25 (Condições Necessárias e Suficientes)**.** *Uma função $c : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é um preço de call para $T > 0$ fixo se e somente se as seguinte condições forem satisfeitas*

(i) $c(T,0) = S_0$ *e* $\lim_{K\to+\infty} c(T,K) = 0$.

(ii) $c(T,K)$ *é decrescente em* K.

(iii) $c(T,K) \geq (S_0 - e^{-rT}K)^+$, $\forall\ K > 0$.

(iv) $c(T,K)$ *é convexa em* K*.*

Demonstração. A ida dessa proposição é trivialmente verificada. Para demostrarmos a volta, note que como $c(T,K) = c(K)$ é convexa e decrescente, sua derivada à direita, c', existe, é contínua à direita e crescente. Logo existe uma medida positiva, $\nu_T = \nu$, tal que para todos $a \leq b$

$$\nu([a,b]) = c'(b) - c'(a)$$

Escreva $\nu = dc'$. Note que $0 \geq c'(K) \geq -e^{-rT}$ e, que temos ainda $c(K) \geq 0$ e $c(T,K) \to 0$ quando $K \to +\infty$. Logo,

$$\lim_{K\to+\infty} c'(K) = 0.$$

Portanto, integrando por partes,

$$\int_{[0,+\infty)} (x-K)^+ dc'(x) = (x-K)^+ c'(x)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \chi_{(K,+\infty)}(x)c'(x)dx =$$
$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} xc'(x)\right)}_{=0} + c(K) = c(K).$$

Para verificar que o limite acima é realmente 0, note que para todo $y > 0$

$$\int_0^y (x-K)^+ dc'(x) = yc'(y) + c(K).$$

A integral acima, como função de y, é crescente e, então, a função $yc'(y)$ também o é. Agora vamos verificar que existe uma sequência y_n tal que $y_n c'(y_n) \to 0$, quando $n \to +\infty$. Se isso não fosse verdade, existiria $\varepsilon > 0$ tal que

$$yc'(y) < -\varepsilon\ , \quad \forall\ y > 0$$
$$\Rightarrow c'(y) < -\varepsilon/y \Rightarrow \int_0^{+\infty} c'(y)dy < -\varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{1}{y}dy = -\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} c'(y)dy = c(0) = S_0 = -\infty$$

Logo, $yc'(y)$ é uma função monótona e existe uma seqüência y_n tal que $y_n c'(y_n)$ converge a 0 e, portanto, $yc'(y) \to 0$ quando $y \to +\infty$.

□

Temos ainda o seguinte lema que nos dá uma condição para que preços de calls com maturidades diferentes sejam, conjutamente, um preço de call. A demonstração deste lema é análoga ao do Lema 2.23

Lema 2.26. *Seja* $c(T,K)$ *uma função definida em* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *e suponha que, para todo* $T > 0$ *fixo,* $c(T,\cdot)$ *seja um preço de call. Então* $c(T,K)$ *será um preço de call se, e somente se,* $e^{rT}c(T,K)$ *for crescente com respeito a maturidade* T*.*

Analogamente, temos os seguintes resultados para a put.

Definição 2.27 (Funções Put)**.** Diremos que uma função $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é um *preço de put* se existir um processo X em algum espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, P)$ tal que $X_0 = S_0$, $e^{-rt}X_t$ é um martingal e

$$p(T,K) = e^{-rT}\mathbb{E}_P[(K - X_T)^+].$$

Diremos ainda que uma função $p(T,K)$, com $T > 0$ fixo, é um *preço de put* se existir uma medida positiva ν_T com suporte em $\mathbb{R}_+$

$$p(T,K) = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}}(K-x)^+ d\nu_T(x).$$

Proposição 2.28 (Condições Necessárias e Suficientes)**.** *Uma função $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é um preço de put para $T > 0$ fixo se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas*

(i) $p(T,0) = 0$ *e* $\lim_{K\to+\infty} p(T,K) = +\infty$.

(ii) $p(T,K)$ *é crescente em* K.

(iii) $p(T,K) \geq (e^{-rT}K - S_0)^+$, $\forall\ K > 0$.

(iv) $p(T,K)$ *é convexa em* K.

Lema 2.29. *Seja $p(T,K)$ uma função definida em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ e suponha que, para todo $T > 0$ fixo, $p(T,\cdot)$ seja um preço de put. Então $p(T,K)$ será um preço de put se, e somente se, $e^{rT}p(T,K)$ for crescente com respeito a maturidade T.*

Paridade Put-Call

Observação 2.30. Fixe $T > 0$ e sejam $c(T,K)$ e $p(T,K)$ um preço de call e um preço de put, respectivamente. Por definição, existem medidas ν_T^C e ν_T^P tais que

$$c(T,K) = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}}(x-K)^+ d\nu_T^C(x) \quad \text{e} \quad p(T,K) = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}}(K-x)^+ d\nu_T^P(x).$$

Note que, a princípio, não temos nenhuma garantia de que as probabilidades ν_T^C e ν_T^P sejam iguais.

Proposição 2.31. *$\nu_T^C = \nu_T^P$ se, e somente se, $c(T,K)$ e $p(T,K)$ satisfazem a paridade Put-Call.*

Demonstração. A ida é trivial. Agora, pelo que veremos na primeira seção do próximo capítulo, mais precisamente na demonstração da Proposição 3.2, a seguinte fórmula é válida

$$\nu_T^C((-\infty,K)) = e^{rT}\frac{\partial c}{\partial K}(T,K) + 1.$$

De forma análoga pode-se concluir que

$$\nu_T^P((-\infty,K)) = e^{rT}\frac{\partial p}{\partial K}(T,K).$$

Mas a paridade Put-Call implica que,

$$\frac{\partial c}{\partial K}(T,K) - \frac{\partial p}{\partial K}(T,K) = -e^{-rT},$$

pois, como vimos na demosntração da Proposição 2.25, as hipóteses sobre c e p implicam que ambas são deriváveis em relação a K. Portanto

$$\nu_T^C((-\infty,K)) = \nu_T^P((-\infty,K))\ , \quad \forall\ K > 0,$$

donde a proposição segue. □

Observação 2.32. Assim como foi feito no caso contínuo, é possível, de maneira óbvia, deduzir condições necessárias e suficientes para que um conjunto discreto e finito de puts seja livre de arbitragem estrita. Já a válidade da paridade put-call não segue tão facilmente, pois, para uma maturidade fixa, pode existir uma put com preço de exercício K e não existir uma call correspondente.

2.3 Comportamento Assintótico da Volatilidade Implícita

2.3.1 A Fórmula do Momento para Volatilidade Implícita

Introdução

O objetivo agora é deduzir uma ligação entre o formato assintótico da SVI e os momentos do ativo objeto S, supondo somente que existe uma medida martingal equivalente para S. Nos basearemos no artigo [32]. Primeiramente vamos mostrar que os preços de puts e calls são limitados pelos momentos do ativo-objeto, S.

Proposição 2.33. *Para quaisquer $p > 0$ e $K > 0$ teremos*

$$C_0(T,K) \leq \frac{e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{p+1}]}{(p+1)}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p K^{-p},$$

$$P_0(T,K) \leq \frac{e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{-p}]}{(p+1)}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p K^{p+1}.$$

Demonstração. Defina

$$f(s) = \frac{s^{p+1}}{(p+1)K^p}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p$$

e note que $f(s) > 0$, que

$$f\left(\frac{(p+1)K}{p}\right) = \frac{(p+1)^{p+1}K^{p+1}}{p^{p+1}(p+1)K^p}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p = \frac{K}{p},$$

$$\left(\frac{(p+1)K}{p} - K\right)^+ = K + \frac{1}{p}K - K = \frac{K}{p}$$

e que

$$f'(s) = \frac{s^p}{K^p}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p \Rightarrow f'\left(\frac{(p+1)K}{p}\right) = 1$$

$$f''(s) = p\frac{s^{p-1}}{K^p}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p > 0.$$

Portanto $(s-K)^+ \leq f(s)$. Analogamente, definindo

$$g(s) = \frac{s^{-p}}{(p+1)K^{-(p+1)}}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p$$

concluimos que $(K-s)^+ \leq g(s)$. Logo tomando $e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}$ de ambos os lados, temos o desejado. □

Observação 2.34. Se $\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{p+1}] < +\infty$, então

$$C_0(T,K) = O(K^{-p}) \text{quando } K \to +\infty,$$

e se $\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{-p}] < +\infty$, então

$$P_0(T,K) = O(K^{p+1}) \text{quando } K \to +\infty.$$

Vamos agora verificar que qualquer payoff da forma $f(S_T)$, onde f é uma função de classe C^2, pode ser replicado por uma combinação estática de calls, puts e futuros. Usaremos esse resultado na demonstração dos dois principais teoremas dessa seção.

Proposição 2.35. *Seja f uma função de classe C^2. Então, para todos K e S reais positivos*

$$f(S) = f(K) + f'(K)(S-K) + \int_0^K f''(x)(x-S)^+dx + \int_K^{+\infty} f''(x)(S-x)^+dx.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} f(S) - f(K) - \int_K^S (S-x)f''(x)dx &= f(S) - f(K) - S(f'(S) - f'(K)) \\ &+ \int_K^S xf''(x)dx = f(S) - f(K) - S(f'(S) - f'(K)) + xf'(x)\Big|_K^S - \\ &- \int_K^S f'(x)dx = f'(K)(S-K). \end{aligned}$$

Agora, como vale

$$\begin{aligned} \int_K^S (S-x)f''(x)dx &= \chi_{\{S>K\}} \int_K^S (S-x)f''(x)dx + \chi_{\{S\leq K\}} \int_K^S (S-x)f''(x)dx = \\ &= \int_K^{+\infty} (S-x)^+ f''(x)dx + \int_0^K (x-S)^+ f''(x)dx, \end{aligned}$$

temos o desejado. □

Vamos considerar agora um par de definições que serão úteis no que segue.

Definição 2.36. Para $\kappa = \ln(Ke^{-r(T-t)}/S_0)$ defina $K(\kappa) = S_0 e^{r(T-t)} e^{\kappa}$, que é o preço de exercício em κ.

Definição 2.37. Para $\beta > 0$, defina

$$f_{\pm}(\beta) = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{4} \pm 1 = \frac{(\beta \pm 2)^2}{4\beta}.$$

Fórmula do Momento para a Cauda Direita

No que segue, iremos sempre supor que existe uma medida martingal equivalente para S, que denotaremos por P^*.

Lema 2.38. *Para $T > t > 0$ fixos, existe $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\hat{\sigma}_0(\kappa) < \sqrt{2\kappa/T}\ , \quad \forall\ \kappa > \kappa_0$$

Demonstração. Como C^{BS} é estritamente crescente em relação a σ, basta verificar que

$$C^{BS}(\kappa, \hat{\sigma}(\kappa)) < C^{BS}(\kappa, \sqrt{2\kappa/T}).$$

Mas como $(S_T - K(\kappa))^+ \searrow 0$, quando $\kappa \to +\infty$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona e concluir que

$$\lim_{\kappa\to+\infty} C^{BS}(\kappa, \hat{\sigma}(\kappa)) = \lim_{\kappa\to+\infty} C_0(T, K(\kappa)) = \lim_{\kappa\to+\infty} \mathbb{E}_{P^*}[(S_T - K(\kappa))^+] = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{\kappa\to+\infty} C^{BS}(\kappa,\sqrt{2\kappa/T}) = \lim_{\kappa\to+\infty} S_0\Phi(d_+) - K(\kappa)\Phi(d_-) =$$
$$= S_0\Phi(0) - S_0 \lim_{\kappa\to+\infty} e^{\kappa}\Phi(-\sqrt{2\kappa}) = \frac{S_0}{2} > 0,$$

onde, na última igualdade, usamos a regra de L'Hôpital. Portanto, existe κ_0 tal que $C^{BS}(\kappa,\hat{\sigma}(\kappa)) < C^{BS}(\kappa,\sqrt{2\kappa/T}),\ \forall\ \kappa > \kappa_0$. □

Observação 2.39. Para todo $\beta > 0$ e $\kappa > 0$, temos que

$$C^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T}) = S_0\Phi(-\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}) - e^{-rT}K(\kappa)\Phi(-\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|}),$$

e se $\kappa < 0$, temos

$$P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T}) = e^{-rT}K(\kappa)\Phi(-\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}) - S_0\Phi(-\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|}).$$

Vamos verificar ambas as igualdades. Lembre-se de que estamos supondo, no primeiro caso, que $\kappa > 0$ e no segundo, que $\kappa < 0$

$$d_\pm(\sqrt{\beta|\kappa|/T}) = \frac{-\kappa}{\sqrt{T}\sqrt{\frac{\beta|\kappa|}{T}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{T}\sqrt{\frac{\beta|\kappa|}{T}} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\beta\kappa}} \pm \frac{\sqrt{\beta\kappa}}{2} =$$
$$= -\sqrt{\kappa}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \mp \frac{\sqrt{\beta}}{2}\right) = -\sqrt{\kappa}\left(\frac{2\mp\beta}{2\sqrt{\beta}}\right) =$$
$$= -\sqrt{\kappa}\sqrt{f_\mp(\beta)} = -\sqrt{f_\mp(\beta)|\kappa|}.$$

$$d_\pm(\sqrt{\beta|\kappa|/T}) = \frac{-\kappa}{\sqrt{T}\sqrt{\frac{\beta|\kappa|}{T}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{T}\sqrt{\frac{\beta|\kappa|}{T}} = \frac{-\kappa}{\sqrt{-\beta\kappa}} \pm \frac{\sqrt{-\beta\kappa}}{2} =$$
$$= \sqrt{-\kappa}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \pm \frac{\sqrt{\beta}}{2}\right) = \sqrt{-\kappa}\left(\frac{2\pm\beta}{2\sqrt{\beta}}\right) =$$
$$= \sqrt{-\kappa}\sqrt{f_\pm(\beta)} = \sqrt{f_\pm(\beta)|\kappa|}.$$

Teorema 2.40 (Fórmula do Momento para a Cauda Direita)**.** *Seja* $\tilde{p} = \sup\{p\ ;\ \mathbb{E}[S_T^{p+1}] < +\infty\}$ *e defina*

$$\beta_R = \limsup_{\kappa\to+\infty} \frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{|\kappa|/T}.$$

Então $\beta_R \in [0,2]$ *e satisfaz a seguinte igualdade*

$$\tilde{p} = \frac{1}{2\beta_R} + \frac{\beta_R}{8} - \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\beta_R = 2 - 4(\sqrt{\tilde{p}^2+\tilde{p}} - \tilde{p}).$$

Caso $\tilde{p} = +\infty$*, teremos* $\beta_R = 0$.

Demonstração. Pelo Lema 2.38, $\beta_R \in [0,2]$. Só precisamos verificar que

$$\tilde{p} = \frac{f_-(\beta_R)}{2}$$

Vamos fazer isso em duas etapas:

$\star$ $\tilde{p} \leq f_-(\beta_R)/2$

Temos que $f_- : (0,2) \longrightarrow (0,+\infty)$ é estritamente decrescente, já que derivando temos que

$$f'_-(\beta) = \frac{2(\beta-2)4\beta - 4(\beta-2)^2}{4\beta^2} = \frac{4\beta^2-16}{4\beta^2} = 1 - \frac{4}{\beta^2} < 0.$$

Se mostrarmos que para qualquer $\beta \in (0,2)$ com $f_-(\beta)/2 < \tilde{p}$ nós temos $\beta_R \leq \beta$, podemos, então, concluir que $f_-(\beta)/2 \geq \tilde{p}$, já que, nesse caso,

$$\beta_R \leq \inf\{\beta \in (0,2) \ ; \ f_-(\beta)/2 < \tilde{p}\} \Rightarrow \tilde{p} \geq f_-(\beta_R)/2.$$

Logo, considere $\beta \in (0,2)$ com $f_-(\beta)/2 < \tilde{p}$ e seja $p \in (f_-(\beta)/2, \tilde{p})$. Note que temos o seguinte comportamento assintótico, quando $\kappa \to +\infty$

$$\frac{C^{BS}(\kappa, \hat{\sigma}(\kappa))}{C^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{C^{BS}(K(\kappa))}{C^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{O(K(\kappa)^{-p})}{C^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{O(e^{-\kappa p})}{C^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})}.$$

Então estaremos interessados no valor do seguinte limite

$$\lim_{\kappa \to +\infty} \frac{e^{-c\kappa}}{C^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})}.$$

Para determiná-lo, considere antes

$$\begin{aligned}
\lim_{\kappa\to+\infty} C^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T}) &= S_0 \lim_{\kappa\to+\infty} \Phi(-\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}) - S_0 \lim_{\kappa\to+\infty} e^{\kappa}\Phi(-\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|}) = \\
&= -S_0 \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{e^{\kappa}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{-f_+(\beta)\kappa}{2}}}{2\sqrt{f_+(\beta)\kappa}} f_+(\beta) = \\
&= -S_0 \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{e^{\frac{(2-f_+(\beta))}{2}}}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{f_+(\beta)\kappa}} f_+(\beta) = \\
&= -S_0 \frac{\sqrt{f_+(\beta)}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\kappa\to+\infty} \sqrt{\kappa}\frac{(2-f_+(\beta))}{2} e^{\kappa\frac{2-f_+(\beta)}{2}} = 0,
\end{aligned}$$

pois, para $\beta \in (0,2)$, $f_+(\beta) > 2$. No limite acima, a regra de L'Hôpital foi usada na segunda e na penúltima igualdades. Agora, para $\kappa > 0$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial\kappa}(C^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})) = \frac{S_0 e^{-\frac{f_-(\beta)\kappa}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{f_-(\beta)}{2\sqrt{f_-(\beta)\kappa}} - S_0 e^{\kappa}\Phi(-f_+(\beta)\kappa) + \frac{S_0 e^{\kappa - \frac{f_+(\beta)\kappa}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{f_+(\beta)}{2\sqrt{f_+(\beta)\kappa}}.$$

Note que a segunda e a terceira parcelas da soma acima convergem a 0, quando $\kappa \to +\infty$, como foi visto no cálculo do limite acima. Logo

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{e^{-c\kappa}}{C^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})}=\frac{2\sqrt{2\pi}c}{S_0\sqrt{f_-(\beta)}}\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{e^{-c\kappa}\sqrt{\kappa}}{e^{\frac{-f_-(\beta)}{2}}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2\pi}c}{S_0\sqrt{f_-(\beta)}}\lim_{\kappa\to+\infty}\sqrt{\kappa}e^{-\kappa\left(c-\frac{f_-(\beta)}{2}\right)}=\begin{cases}0 & ,\ c>\dfrac{f_-(\beta)}{2},\\ +\infty, & c\le\dfrac{f_-(\beta)}{2}.\end{cases}$$

Como estamos considerando $p\in(f_-(\beta)/2,\tilde{p})$, concluimos que

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{e^{-p\kappa}}{C^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})}=0$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{C^{BS}(\kappa,\hat{\sigma}(\kappa))}{C^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})}=0.$$

Logo, existe $\kappa_0>0$ tal que $C^{BS}(\kappa,\hat{\sigma}(\kappa))<C^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})$, para todo $\kappa>\kappa_0$, que é equivalente a

$$\frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{|\kappa|/T}<\beta,\quad\forall\ \kappa>\kappa_0.$$

Então

$$\beta_R=\limsup_{\kappa\to+\infty}\frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{|\kappa|/T}<\beta.$$

$\star$ $\tilde{p}\ge f_-(\beta_R)/2$

Nesse caso, basta verificar que para qualquer p em $(0,f_-(\beta_R))$ temos $\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{p+1}]<+\infty$. Aplicando a Proposição 2.35 para $f(x)=x^{p+1}$ e $K=0$

$$S_T^{p+1}=\int_0^{+\infty}(p+1)px^{p+1}(S_T-x)^+dx.$$

Então, pelo Teorema de Fubini

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{p+1}]=\int_0^{+\infty}(p+1)px^{p+1}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-x)^+]dx=p(p+1)e^{rT}\int_0^{+\infty}x^{p-1}C_0(x)dx.$$

Agora, note que se β é tal que $f_-(\beta)/2\in(p,f_-(\beta_R)/2)$, então, pelo item anterior, para $\kappa>\kappa_0$,

$$\frac{C_0(K(\kappa))}{e^{-\frac{-f_-(\beta)\kappa}{2}}}=\frac{C^{BS}(\kappa,\hat{\sigma}(\kappa))}{e^{-\frac{-f_-(\beta)\kappa}{2}}}\le\frac{C^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})}{e^{-\frac{-f_-(\beta)\kappa}{2}}}\overset{\kappa\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Como $e^{\frac{-f_-(\beta)\kappa}{2}}=(e^{\kappa})^{\frac{-f_-(\beta)}{2}}=(K(\kappa)/S_0e^{rT})^{\frac{-f_-(\beta)}{2}}$, existe K_0 suficientemente grande tal que $C_0(K)<K^{\frac{-f_-(\beta)}{2}}$, se $K>K_0$. Logo

$$p(p+1)e^{rT}\int_0^{+\infty}x^{p-1}C_0(x)dx=p(p+1)e^{rT}\left(\int_0^{K_0}x^{p-1}C_0(x)dx+\int_{K_0}^{+\infty}x^{p-1}C_0(x)dx\right)$$

$$\le p(p+1)e^{rT}\left(\int_0^{K_0}x^{p-1}C_0(x)dx+\int_{K_0}^{+\infty}x^{p-1-\frac{f_-(\beta)}{2}}dx\right)<+\infty,$$

pois $p-1-f_-(\beta)/2<-1$. □

Fórmula do Momento para a Cauda Esquerda

Lema 2.41. *Suponha que $P^*(S_T = 0) < 1/2$. Para todo $\beta \geq 2$, existe κ_0 tal que*

$$\hat{\sigma}(\kappa) < \sqrt{\beta|\kappa|/T}\ , \quad \forall\ \kappa < \kappa_0. \tag{2.3}$$

Para $\beta = 2$, se exitir κ_0 tal que (2.3) seja verdadeira, então $P^*(S_T = 0) < 1/2$.

Demonstração. Note que $f_\pm(\beta) \geq 0$ e que $f_-(2) = 0$. Logo

$$\lim_{\kappa\to-\infty} \Phi(-\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}) = \begin{cases} 0 & ,\ \beta > 2 \\ 1/2 & ,\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\kappa\to-\infty} e^{-\kappa}\Phi(-\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|}) &= \lim_{\kappa\to+\infty} e^{\kappa}\Phi(-\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|}) = \\
&= \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{(e^{\frac{-f_+(\beta)\kappa}{2}}/\sqrt{2\pi})(f_+(\beta)/2\sqrt{f_+(\beta)\kappa})}{e^{-\kappa}} = \\
&= \frac{-\sqrt{f_+(\beta)}}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{e^{-\kappa\left(\frac{f_+(\beta)}{2}-1\right)}}{\sqrt{\kappa}} = \\
&= \frac{-\sqrt{f_+(\beta)}}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{e^{-\kappa\left(\frac{f_-(\beta)}{2}\right)}}{\sqrt{\kappa}} = 0.
\end{aligned}$$

Agora já que

$$\lim_{\kappa\to-\infty} P^*(S_T < S_0 e^{-rT} e^{\kappa}) = P^*(S_T = 0) < 1/2,$$

podemos afirmar que, para $\beta = 2$, existe κ_0 tal que

$$P^*(S_T < S_0 e^{-rT} e^{\kappa}) < \Phi(-\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}) - e^{-\kappa}\Phi(-\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|})\ , \quad \forall\ \kappa < \kappa_0.$$

Então, para $\kappa < \kappa_0$,

$$\begin{aligned}
P^{BS}(\kappa, \hat{\sigma}(\kappa)) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(K(\kappa) - S_T)^+] &= e^{-rT}\int_{0<s<K(\kappa)} (K(\kappa) - s) dP^*_{S_T}(s) \leq \\
&\leq e^{-rT} K(\kappa) P^*(S_T < K(\kappa)) = e^{-rT} K(\kappa) P^*(S_T < S_0 e_{rT} e_\kappa) < \\
&< e^{-rT} K(\kappa)\{\Phi(-\sqrt{f_-(2)|\kappa|}) - e^{-\kappa}\Phi(-\sqrt{f_+(2)|\kappa|})\} = P^{BS}(\kappa, \sqrt{2|\kappa|/T})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}(\kappa) < \sqrt{2|\kappa|/T}$, $\forall\ \kappa < \kappa_0$.

Logo para $\beta > 2$, vale

$$\hat{\sigma}(\kappa) < \sqrt{\beta|\kappa|/T}\ , \quad \forall\ \kappa < \kappa_0.$$

Agora suponha que $\beta = 2$ e que $\hat{\sigma}(\kappa) < \sqrt{2|\kappa|/T}$ para κ suficientemente pequeno. Então, já que $f_+(2) = 2$,

$$P^{BS}(\kappa, \sqrt{2|\kappa|/T}) = e^{-rT} K(\kappa)\Phi(0) - S_0\Phi(\sqrt{2|\kappa|}) < \frac{e^{-rT}K(\kappa)}{2}.$$

Por outro lado

$$P^{BS}(\kappa,\sqrt{2|\kappa|/T}) > P^{BS}(\kappa,\hat{\sigma}(\kappa)) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(K(\kappa)-S_T)^+] = \\ = e^{-rT}\int_0^{+\infty}(K(\kappa)-s)^+ dP^*_{S_T}(s) \geq e^{-rT}K(\kappa)P^*(S_T=0).$$

Portanto, $P^*(S_T=0) < 1/2$. □

Teorema 2.42 (Fórmula do Momento para a Cauda Esquerda)**.** *Suponha que $P^*(S_T=0)<1/2$, seja $\tilde{q}=\sup\{q\ ;\ \mathbb{E}[S_T^{-q}]<+\infty\}$ e defina*

$$\beta_L = \limsup_{\kappa\to-\infty}\frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{|\kappa|/T}.$$

Então $\beta_L\in[0,2]$ e satisfaz a equação

$$\tilde{q} = \frac{1}{2\beta_L}+\frac{\beta_L}{8}-\frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\beta_L = 2-4(\sqrt{\tilde{q}^2+\tilde{q}}-\tilde{q}).$$

Caso $\tilde{q}=+\infty$, teremos $\beta_L=0$.

Demonstração. Basta verificar que $\tilde{q}=f_-(\beta_L)/2$. Novamente, faremos isso em duas etapas.

$\star$ $\tilde{q}\leq f_-(\beta_L)/2$

Como vimos na demonstração do Teorema 2.40, basta mostrar que para qualquer $\beta\in(0,2)$ com $f_-(\beta)/2<\tilde{q}$, temos que $\beta_L\leq\beta$. Então considere $q\in(f_-(\beta)/2,\tilde{q})$, onde $\beta\in(0,2)$ é tal que $f_-(\beta)/2<\tilde{q}$. Agora note que, para $\kappa\to-\infty$

$$\frac{P^{BS}(\kappa,\hat{\sigma}(\kappa))}{P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{P_0(K(\kappa))}{P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{O(K(\kappa)^{q+1})}{P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{O(e^{\kappa(q+1)})}{P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})}.$$

Já que

$$\lim_{\kappa\to-\infty}P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T}) = S_0\lim_{\kappa\to-\infty}e^{\kappa}\Phi(-\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}) - S_0\lim_{\kappa\to-\infty}\Phi(-\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|}) = 0$$

e, para $\kappa<0$, vale

$$\frac{\partial}{\partial\kappa}P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T}) = S_0e^{\kappa}\Phi(-\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}) - \frac{S_0e^{\kappa}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{f_-(\beta)\kappa}{2}}\frac{f_-(\beta)}{2\sqrt{f_-(\beta)|\kappa|}} + \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{f_+(\beta)\kappa}{2}}\frac{f_+(\beta)}{2\sqrt{f_+(\beta)|\kappa|}},$$

temos que,

$$\lim_{\kappa\to-\infty}\frac{e^{(c+1)\kappa}}{P^{BS}(\kappa,\sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{2\sqrt{2\pi}(c+1)}{S_0\sqrt{f_+(\beta)}}\lim_{\kappa\to-\infty}\frac{e^{(c+1)\kappa}\sqrt{\kappa}}{e^{f_+(\beta)\kappa/2}} = \\ = \frac{2\sqrt{2\pi}(c+1)}{S_0\sqrt{f_+(\beta)}}\lim_{\kappa\to-\infty}e^{\kappa\left(c+1-\frac{f_+(\beta)}{2}\right)}\sqrt{\kappa} = \\ = \frac{2\sqrt{2\pi}(c+1)}{S_0\sqrt{f_+(\beta)}}\lim_{\kappa\to-\infty}e^{\kappa\left(c-\frac{f_-(\beta)}{2}\right)}\sqrt{\kappa} = \begin{cases} 0 & ,c>f_-(\beta)/2, \\ +\infty & ,c\leq f_-(\beta)/2. \end{cases}$$

Como $q > f_-(\beta)/2$

$$\frac{P^{BS}(\kappa, \hat{\sigma}(\kappa))}{P^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})} = \frac{O(e^{\kappa(q+1)})}{P^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})} \overset{\kappa\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então, existe $\kappa_0 < 0$ tal que

$$P^{BS}(\kappa, \hat{\sigma}(\kappa)) < P^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T}),\ \forall\ \kappa < \kappa_0,$$

que é equivalente a

$$\hat{\sigma}(\kappa) < \sqrt{\beta|\kappa|/T}),\ \forall\ \kappa < \kappa_0.$$

Portanto

$$\beta_L = \limsup_{\kappa\to-\infty} \frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{|\kappa|/T} < \beta.$$

$\star$ $\tilde{q} \geq f_-(\beta_L)/2$

Basta verificar que para qualquer $q \in (0, f_-(\beta_L)/2)$, teremos

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{-q}] < +\infty.$$

Mas definindo $f(x) = x^{-q}$, podemos aplicar a Proposição 2.35 (com $K \to +\infty$) e concluir que

$$S_T^{-q} = f(S_T) = \int_0^{+\infty} -q(-q-1)x^{-q-2}(x - S_T)^+ dx = q(q+1)\int_0^{+\infty} x^{-q-2}(x - S_T)^+ dx.$$

Então

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{-q}] = q(q+1)\int_0^{+\infty} x^{-q-2}\mathbb{E}_{P^*}[(x - S_T)^+]dx = q(q+1)e^{rT}\int_0^{+\infty} x^{-q-2}P_0(x)dx$$

Agora seja β tal que $f_-(\beta)/2 \in (q, f_-(\beta_L)/2)$. Como f_- é decrescente em $(0, 2)$, nós temos que $\beta_L \leq \beta$ implica $\hat{\sigma}(\kappa) \leq \sqrt{\beta|\kappa|/T}$ para κ suficentemente grande. Logo, nesse caso teremos

$$\frac{P_0(K(\kappa))}{e^{\kappa(1+f_-(\beta)/2)}} \leq \frac{P^{BS}(\kappa, \sqrt{\beta|\kappa|/T})}{e^{\kappa(1+f_-(\beta)/2)}} \overset{\kappa\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

Como $e^{\kappa(1+f_-(\beta)/2)} = (K(\kappa)/S_0e^{rT})^{(1+f_-(\beta)/2)}$, então existe K_0 tal que $P_0(K) < K^{(1+f_-(\beta)/2)},\ \forall\ K < K_0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{-q}] &= q(q+1)e^{rT}\left(\int_0^{K_0} x^{-q-2}P_0(x)dx + \int_{K_0}^{+\infty} x^{-q-2}P_0(x)dx\right) \leq \\ &\leq q(q+1)e^{rT}\left(\int_0^{K_0} x^{-q-1+f_-(\beta)/2}dx + \int_{K_0}^{+\infty} x^{-q-2}e^{-rT}xdx\right) < +\infty\end{aligned}$$

já que $-q-1 < -1$ e $-q + f_-(\beta)/2 - 1 > -1$. □

Observação 2.43. Os Teoremas 2.40 e 2.42 têm implicações para a extrapolação da SVI. Eles rejeitam as que crescem mais rápido que $\sqrt{|x|}$, e a menos que os momentos de todas as ordens de S_T sejam finitos, eles também rejeitam as que crescem mais devagar que $\sqrt{|x|}$. Agora, em um grande número de modelos, S_T tem uma distribução cuja função característica f tem forma explícita. Nesse caso podemos calcular o p-ésimo momento de S_T extendendo f a uma faixa do plano complexo que contenha o número $-ip$ e calculando o seu valor nesse ponto. Se tal extensão não existir, o p-ésimo momento é infinito.

2.3.2 Variação Regular e o Comportamento Assintótico da SVI

Introdução

Estudaremos agora o comportamento assintótico da superfície de volatilidade implícita de uma maneira mais precisa e para isso lançaremos mão de resultados sobre funções de variação regular. Seguiremos o artigo [6].

Funções de Variação Regular

Definição 2.44. Diremos que uma função real Borel-mensurável e positiva, $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$, varia regularmente com índice α se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(\lambda x)}{g(x)} = \lambda^{\alpha}, \quad \forall\ \lambda > 0,$$

e escreveremos $g \in R_{\alpha}$

Note que esta definição pode ser estendida para funções mensuráveis que são positivas para x suficientemente grande.

Observação 2.45. Dizemos que $g \sim h$ se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1.$$

Então

$$g \in R_{\alpha}\ e\ h \sim g \Rightarrow h \in R_{\alpha}.$$

Observação 2.46. Antes de prosseguir, vale notar algumas propriedades das funções de variação regular.

(i) $g \in R_{\alpha} \Rightarrow 1/g \in R_{-\alpha}$

(ii) Seja $g \in R_0$ e $\varepsilon > 0$. Então temos os seguintes limites

$$y^{\varepsilon} g(y) \to \begin{cases} 0 & ,\ y \to 0, \\ +\infty, & y \to +\infty. \end{cases}$$

Um resultado importante na teoria das funções de variação regular é o seguinte lema. Para a demonstração deste lema, assim como dos outros resultados aqui citados sobre funções de variação regular, veja [7].

Lema 2.47 (Lema de Bingham)**.** *Seja $g \in R_{\alpha},\ \alpha > 0$, tal que e^{-g} é localmente integrável em $+\infty$. Então*

$$-\log\left(\int_x^{+\infty} e^{-g(y)} dy\right) \sim g(x).$$

Notação. Denotaremos por F a função de distribuição acumulada dos log-retornos $X = \ln S_T$ na medida neutra ao risco , por $\bar{F}$ a função $1 - F(x)$ e por f, a densidade de probabilidade de F, se essa existir.

Lembre-se de que a fórmula de Black-Scholes em $t = 0$ para uma call com maturidade T, log-strike κ, $S_0 = 1$ (normalizando os preços) e volatilidade total (volatilidade vezes a raiz da maturidade) ν pode ser escrita como

$$C^{BS}(\kappa, \nu) = \Phi(d_+) - e^{\kappa}\Phi(d_-),$$

onde $d_{\pm}(\kappa, \nu) = -\kappa/\nu \pm \nu/2$. Vamos denotar agora os preços de arbitragem da call e da put, respectivamente, por

$$C(\kappa) = \int_{\kappa}^{+\infty} (e^x - e^\kappa) dF(x) \quad \text{e} \quad P(\kappa) = \int_{-\infty}^{\kappa} (e^\kappa - e^x) dF(x)$$

Então, nesse caso, a volatilidade implícita é o único número $\hat{\sigma}(\kappa)$ tal que

$$C^{BS}(\kappa, \hat{\sigma}(\kappa)\sqrt{T}) = C(\kappa)$$

Defina ainda

$$V(\kappa) = \hat{\sigma}(\kappa)\sqrt{T},$$

e considere a seguinte função estritamente decrescente $\psi : [0, +\infty] \longrightarrow [0, 2]$ definida, para $0 \leq x < +\infty$, por

$$\psi(x) = 2 - 4(\sqrt{x^2 + x} - x)$$

e com $\psi(+\infty) = 0$.

Observação 2.48. Note que, usando a notação acima, as conclusões dos Teoremas 2.40 e 2.40 podem ser escritas como

$$\beta_R = \psi(\tilde{p}) \quad \text{e} \quad \beta_L = \psi(\tilde{q}).$$

Resultado Assintótico para a Cauda Direita

Lema 2.49. *Suponha que exista $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}[e^{(1+\varepsilon)X}] < +\infty.$$

Vamos nos referir à hipótese acima como (D). Então, temos que

$$C(\kappa) = \int_{\kappa}^{+\infty} e^x \bar{F}(x) dx.$$

Demonstração. Note que

$$\bar{F}(x) = P^*(X > x) \leq e^{-(1+\varepsilon)x} \mathbb{E}[e^{(1+\varepsilon)X}],$$

pois $X > x \Leftrightarrow e^{(1+\varepsilon)X} > e^{(1+\varepsilon)x}$ e, pela desigualdade de Markov, temos

$$P^*(e^{(1+\varepsilon)X} > e^{(1+\varepsilon)x}) \leq \frac{1}{e^{(1+\varepsilon)x}} \mathbb{E}[e^{(1+\varepsilon)X}].$$

Então, $\bar{F} = O(e^{-(1+\varepsilon)x})$. Agora, note ainda que $d\bar{F}(x) = -dF(x)$. Portanto, integrando por partes,

$$C(\kappa) = -\int_{\kappa}^{+\infty} (e^x - e^\kappa) d\bar{F}(x) = -\bar{F}(x)(e^x - e^\kappa)\Big|_{\kappa}^{+\infty} + \int_{\kappa}^{+\infty} e^x \bar{F}(x) dx = \int_{\kappa}^{+\infty} e^x \bar{F}(x) dx$$

pois existe constante $M > 0$ tal que

$$0 \leq \lim_{x \to +\infty} \bar{F}(x)(e^x - e^\kappa) \leq M \lim_{x \to +\infty} e^{-(1+\varepsilon)x}(e^x - e^\kappa) = M \lim_{x \to +\infty} e^{-\varepsilon x} - e^{-(1+\varepsilon)x} e^\kappa = 0.$$

□

Lema 2.50. *Suponha que (D) seja verdadeira e que $-\ln \bar{F} \in R_\alpha$, para algum $\alpha \geq 1$. Então $-\ln C \in R_\alpha$ e vale*

$$-\ln C(\kappa) \sim -\kappa - \ln \bar{F}(\kappa).$$

Demonstração. Note que, claramente, a função identidade $\kappa \mapsto \kappa$ está em R_1. Defina

$$\varphi(\kappa) = -\kappa - \ln \bar{F}(\kappa).$$

A idéia agora é aplicar o Lema 2.47 para $g = \varphi$. Antes de verificarmos que φ satisfaz as hipóteses desse lema, note que ele nos dará diretamente a conclusão desejada:

$$-\ln C = -\ln\left(\int_\kappa^{+\infty} e^{x+\ln \bar{F}(x)} dx\right) \sim \varphi(\kappa).$$

Vamos agora verificar as hipóteses. A primeira e mais importante é:

$\star$ $\varphi \in R_\alpha$, onde $\alpha \geq 1$.

Note que, pela demonstração do Lema 2.49, temos que

$$-\ln(\bar{F}(\kappa)) \geq -\ln(e^{-(1+\varepsilon)\kappa}\mathbb{E}[e^{(1+\varepsilon)X}]) = (1+\varepsilon)\kappa - \ln(\mathbb{E}[e^{(1+\varepsilon)X}]) = (1+\varepsilon)\kappa + \Theta.$$

Agora, defina $L(\kappa) = \dfrac{-\ln \bar{F}(\kappa)}{\kappa^\alpha}$ e note que

$$\varphi(\kappa) = \kappa^\alpha L(\kappa) - \kappa.$$

Então, como $-\ln \bar{F} \in R_\alpha,\ \alpha \geq 1$, temos que $L \in R_0$. Note ainda que

$$\frac{\varphi(\lambda\kappa)}{\varphi(\kappa)} = \frac{\lambda^\alpha \kappa^\alpha L(\lambda\kappa) - \kappa\lambda}{\kappa^\alpha L(\kappa) - \kappa} = \lambda\left(1 + \frac{\lambda^{\alpha-1}L(\lambda\kappa)/L(\kappa) - 1}{1 - 1/(\kappa^{\alpha-1}L(\kappa))}\right).$$

Mas sabemos que vale

$$\lim_{\kappa\to+\infty} \frac{L(\lambda\kappa)}{L(\kappa)} = 1\ , \quad \forall\ \lambda > 0,$$

e que, se $\alpha > 1$, $\kappa^{\alpha-1}L(\kappa) \to +\infty$, quando $\kappa \to +\infty$. Portanto, $\varphi \in R_\alpha$. Agora, no caso em que $\alpha = 1$

$$\frac{\varphi(\lambda\kappa)}{\varphi(\kappa)} = \frac{\lambda^\alpha L(\lambda\kappa) - \kappa\lambda}{L(\kappa) - \kappa}.$$

Então, já que $-\ln(\bar{F}) = (1+\varepsilon)\kappa + \Theta$, podemos concluir que

$$L(\kappa) \geq (1+\varepsilon) + \Theta\kappa^{-1}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varphi(\lambda\kappa)}{\varphi(\kappa)} - \lambda\right| &\leq \lambda\left|\frac{L(\lambda\kappa)/L(\kappa) - 1}{1 - 1/L(\kappa)}\right| \leq \\ &\leq \lambda\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon + (1+\varepsilon)\kappa/C}\left|\frac{L(\lambda\kappa)}{L(\kappa)} - 1\right| \overset{\kappa\to-\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

pois $L \in R_0$. Logo, $\varphi \in R_\alpha$, se $\alpha \geq 1$. Agora a segunda hipótese é:

$\star$ Integrabilidade no infinito de $e^{-\varphi}$.

Note que

$$\int_\kappa^{+\infty} e^{-\varphi(x)} dx = C(\kappa).$$

Mas, por não-arbitragem, $C(\kappa) \leq S_0 < +\infty$. Portanto, $e^{-\varphi}$ é integrável no infinito. □

Lema 2.51. *Suponha que (D) seja verdadeira e que $-\ln C \in R_\alpha$, para algum $\alpha \geq 1$. Então para κ suficientemente grande vale*

$$\frac{\ln(C(\kappa))}{\kappa} = -\frac{\kappa}{2V(\kappa)^2} + \frac{1}{2} - \frac{V(\kappa)^2}{8\kappa} + O\left(\frac{\ln\kappa}{\kappa}\right)$$

e

$$\frac{V(\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-\frac{\ln(C(\kappa))}{\kappa}\right).$$

Demonstração. Pelo o que vimos na demosntração do Teorema 2.40, temos que

$$a = \limsup_{\kappa\to+\infty} \frac{V(\kappa)^2}{\kappa} < 2.$$

Isso implica que $d_\pm$ serão negativos para κ suficientemente grande já que

$$\operatorname{sign}(d_\pm(\kappa)) = \operatorname{sign}\left(\frac{d_\pm(\kappa)}{V(\kappa)}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{-\kappa}{V(\kappa)^2} + \frac{1}{2}\right),$$

onde

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1\ , & x > 0, \\ 0\ , & x = 0, \\ -1\ , & x < 0. \end{cases}$$

Agora lembre-se que se Φ é a distribuição acumulada da normal padrão, temos, para $x > 0$, que

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \Phi(-x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}.$$

Então, para κ suficientemente grande,

$$\Phi(d_+) \geq \frac{e^{-d_+^2/2}}{\sqrt{2\pi}(-d_+)}\left(1 - \frac{1}{d_+^2}\right) \quad \text{e} \quad \Phi(d_-) \leq \frac{e^{-d_-^2/2}}{\sqrt{2\pi}(-d_-)}$$
$$\Rightarrow e^{-d_+^2/2}\left(-\frac{1}{d_+}\right)\left(1 - \frac{1}{d_+^2}\right) - e^{\kappa}e^{-d_-^2/2}\left(-\frac{1}{d_-}\right) \leq \sqrt{2\pi}C(\kappa)$$

e ainda temos que

$$\Phi(d_+) \leq \frac{e^{-d_+^2/2}}{\sqrt{2\pi}(-d_+)} \quad \text{e} \quad \Phi(d_-) \geq \frac{e^{-d_-^2/2}}{\sqrt{2\pi}(-d_-)}\left(1 - \frac{1}{d_-^2}\right).$$
$$\Rightarrow e^{-d_+^2/2}\left(-\frac{1}{d_+}\right) - e^{\kappa}e^{-d_-^2/2}\left(-\frac{1}{d_-}\right)\left(1 - \frac{1}{d_-^2}\right) \geq \sqrt{2\pi}C(\kappa)$$

Já que $\dfrac{d_+^2}{2} = \dfrac{d_-^2}{2} - \kappa$,

$$e^{-d_+^2/2}\left(-\frac{1}{d_+}\left(1 - \frac{1}{d_+^2}\right) + \frac{1}{d_-}\right) \leq \sqrt{2\pi}C(\kappa) \leq e^{-d_+^2/2}\left(\frac{1}{d_-}\left(1 - \frac{1}{d_-^2}\right) - \frac{1}{d_+}\right).$$

Agora defina

$$\varepsilon_+(\kappa) = \ln C(\kappa) + \frac{d_+^2(\kappa)}{2}$$

Com essa definição, podemos escrever a desigualdade acima como

$$-\frac{1}{d_+}\left(1-\frac{1}{d_+^2}\right)+\frac{1}{d_-}\leq\sqrt{2\pi}e^{\varepsilon_+(\kappa)}\leq\frac{1}{d_-}\left(1-\frac{1}{d_-^2}\right)-\frac{1}{d_+}.$$

Mas temos que $a<2$. Então, para κ suficientemente grande vale $V(\kappa)\leq\sqrt{2\kappa}$. Logo

$$-d_-(\kappa)=\frac{\kappa}{V(\kappa)}+\frac{V(\kappa)}{2}\geq\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\to+\infty\quad\text{quando }\kappa\to+\infty,$$

e, portanto, temos a seguinte desigualdade

$$\sqrt{2\pi}e^{\varepsilon_+(\kappa)}\leq-\frac{1}{d_+}.$$

Na realidade, podemos conseguir um limitante melhor, pois $a<2$ implica que existe $\eta\in(0,2)$ tal que

$$V(\kappa)^2<\eta\kappa,$$

para κ suficientemente grande. Fazendo $\eta'=\frac{1}{\sqrt{\eta}}-\frac{\sqrt{\eta}}{2}$, teremos $\eta'\sqrt{\kappa}<-d_+(\kappa)$ e $\eta'>0$. Logo

$$\sqrt{2\pi}e^{\varepsilon_+(\kappa)}\leq\frac{1}{\eta'\sqrt{\kappa}}\Rightarrow\varepsilon_+(\kappa)\leq-\frac{1}{2}\ln\kappa-\ln(\sqrt{2\pi}\eta').$$

Agora, só precisamos de um limitante para $-\varepsilon_+(\kappa)$. Para isso, vamos primeiro mostrar que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\liminf_{n\to+\infty}V(\kappa)\kappa^n>1.$$

Para verificarmos isso, note que $\varepsilon_+(\kappa)\to-\infty$ quando $\kappa\to+\infty$. Então, para κ suficientemente grande, $\varepsilon_+(\kappa)<0$ e, logo,

$$-\ln C(\kappa)=\frac{d_+^2}{2}-\varepsilon_+(\kappa)\geq\frac{d_+^2}{2}.$$

Como estamos supondo que $-\ln C\in R_\alpha$, $\alpha\geq1$, então existe $L\in R_0$ tal que $-\ln C(\kappa)=\kappa^\alpha L(\kappa)$ e vale

$$\kappa^\alpha L(\kappa)\geq\frac{d_+^2}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\kappa}{V(\kappa)}+\frac{V(\kappa)}{2}\right)\geq\frac{\kappa^2}{2V(\kappa)^2}-\frac{\kappa}{2}.$$

Logo

$$\frac{\kappa^2}{V(\kappa)^2}\leq2\kappa^\alpha L(\kappa)+\kappa=\kappa^\alpha\tilde{L}(\kappa),$$

onde $\tilde{L}(\kappa)=2L(\kappa)+\kappa^{-\alpha+1}$ é tal que

$$\frac{\tilde{L}(\lambda\kappa)}{\tilde{L}(\kappa)}=\frac{2L(\lambda\kappa)/L(\kappa)+\lambda^{-\alpha+1}\kappa^{-\alpha+1}L(\kappa)}{2+\kappa^{-\alpha+1}L(\kappa)}.$$

Já que, para κ suficientemente grande, $L(\kappa)\geq d_+^2/2\kappa^\alpha\geq0$, e como vale

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{1}{\kappa^{\alpha-1}L(\kappa)}\leq\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{2V(\kappa)^2}{\kappa-V(\kappa)^2}\leq0,$$

podemos concluir que

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{1}{\kappa^{\alpha-1}L(\kappa)}=0.$$

Portanto

$$\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{\tilde{L}(\lambda\kappa)}{\tilde{L}(\kappa)}=1\Rightarrow\tilde{L}(\kappa)\in R_0.$$

Agora, note que $\tilde{L}(\kappa)\geq 1/V(\kappa)^2\kappa^{\alpha-2}$ e que $1/\tilde{L}(\kappa)\in R_0$. Então, multiplicando a desigualdade ao lado por κ^p, com $p>0$, vemos que

$$\liminf_{n\to+\infty}V(\kappa)\kappa^n>1,$$

para $n>(\alpha-2)^+/2$. Logo, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que para κ suficientemente grande vale

$$\kappa^{-2n}<V(\kappa)^2<\eta\kappa.$$

Logo, nesse caso, temos

$$\begin{aligned}-d_+(\kappa)&=\frac{\kappa}{V(\kappa)}-\frac{V(\kappa)}{2}<\kappa^{n+1}-\frac{1}{2\kappa^n}\leq\kappa^{n+1},\\ -d_-(\kappa)&=\frac{\kappa}{V(\kappa)}+\frac{V(\kappa)}{2}<\kappa^{n+1}-\frac{\sqrt{2\kappa}}{2}\leq 2\kappa^{n+1}.\end{aligned}$$

Agora defina

$$\varepsilon_-(\kappa)=-\frac{1}{d_+}\left(1-\frac{1}{d_+^2}\right)+\frac{1}{d_-}$$

e lembre-se que $\sqrt{2\pi}e^{\varepsilon_+(\kappa)}\geq\varepsilon_-(\kappa)$. Como temos

$$\begin{aligned}\varepsilon_-(\kappa)&=\frac{1}{d_+^3}+\frac{d_+-d_-}{d_+d_-}=\frac{1}{d_+^3}+\frac{V(\kappa)}{d_+d_-}=\frac{d_+^2V(\kappa)+d_-}{d_+^3d_-}=\\ &=\frac{d_+^2V(\kappa)^2+d_-V(\kappa)}{d_+^3d_-V(\kappa)}=\frac{(-\kappa+V(\kappa)/2)^2+(-\kappa-V(\kappa)/2)^2}{d_+^3d_-V(\kappa)},\end{aligned}$$

é interessante definir a seguinte função

$$\begin{aligned}f:[0,&\beta\kappa]\longrightarrow\mathbb{R}\\ &x\longmapsto(-\kappa+x)^2+(-\kappa-x),\end{aligned}$$

onde $\beta=\eta/2<1$. Note que f é estritamente decrescente em $[0,\beta\kappa]$, bastando derivá-la para verificar. Logo, como $V(\kappa)^2/2<\eta\kappa/2=\beta\kappa$, temos que

$$\begin{aligned}\varepsilon_-(\kappa)&=\frac{f(V(\kappa)^2/2)}{d_+^3d_-V(\kappa)}\geq\frac{f(\beta\kappa)}{d_+^3d_-V(\kappa)}=\frac{(-\kappa+\beta\kappa)^2+(-\kappa-\beta\kappa)}{d_+^3d_-V(\kappa)}\\ &=\frac{\kappa^2(1-\beta)^2-\kappa(1+\beta)}{d_+^3d_-V(\kappa)}\geq\frac{(\kappa^2/2)(1-\beta)^2}{d_+^3d_-V(\kappa)}\geq\frac{(\kappa^2/2)(1-\beta)^2}{d_+^3d_-\sqrt{\beta\kappa}}\geq\\ &\geq\frac{(\kappa^2/2)(1-\beta)^2}{(\kappa^{n+1})^3(2\kappa^{n+1})\sqrt{\beta\kappa}}=\gamma\kappa^{2-4(n+1)-1/2}>0.\end{aligned}$$

Então

$$\sqrt{2\pi}e^{\varepsilon_+(\kappa)}\geq\varepsilon_-(\kappa)>\gamma\kappa^{-5/2-4n}>0$$

$$\Rightarrow \ln\sqrt{2\pi} + \varepsilon_+(\kappa) > \ln\gamma + \left(-\frac{5}{2} - 4n\right)\ln\kappa$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_+(\kappa) < \left(\frac{5}{2} + 4n\right)\ln\kappa + \Theta(\gamma),$$

onde $\Theta(\gamma) = -\ln\gamma + \ln\sqrt{2\pi}$. Em particular, como $\sqrt{2\pi}e^{\varepsilon_+(\kappa)} \leq 1/\eta'\sqrt{\kappa}$, $|\varepsilon_+(\kappa)| = O(\ln\kappa)$. Portanto,

$$\ln C(\kappa) = -\frac{d_+^2}{2} + \varepsilon_+(\kappa) = \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2}{2V(\kappa)^2} - \frac{V(\kappa)^2}{8} + \varepsilon_+(\kappa)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa} - \left(-\frac{d_+^2}{2} + \varepsilon_+(\kappa) = \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2}{2V(\kappa)^2} - \frac{V(\kappa)^2}{8}\right)\right| = O\left(\frac{\ln\kappa}{\kappa}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln C(\kappa)}{\kappa} \sim \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2V(\kappa)^2} - \frac{V(\kappa)^2}{8\kappa}.$$

Agora, rearrumando a equação

$$-\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa} + \frac{\varepsilon_+(\kappa)}{\kappa} = \frac{1}{2V(\kappa)^2/\kappa} + \frac{V(\kappa)^2\kappa}{8} - \frac{1}{2},$$

temos que

$$\frac{V(\kappa)^2}{\kappa} = 2 \ + \ 4\left(-\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa} + \frac{\varepsilon_+(\kappa)}{\kappa}\right) \ \pm \ 4\sqrt{\left(-\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa} + \frac{\varepsilon_+(\kappa)}{\kappa}\right)^2 - \left(-\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa} + \frac{\varepsilon_+(\kappa)}{\kappa}\right)}.$$

Mas note que a solução com o último termo positivo viola a condição

$$\limsup_{\kappa\to+\infty} \frac{V(\kappa)^2}{\kappa} < 2.$$

Logo

$$\frac{V(\kappa)^2}{\kappa} = \psi\left(-\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa} + \frac{\varepsilon_+(\kappa)}{\kappa}\right) \sim \psi\left(-\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa}\right).$$

□

Usando os três lemas acima, podemos provar o seguinte resultado, que é o mais importante da seção.

Teorema 2.52 (Comportamento Assintótico da Cauda Direita)**.** *Seja $\alpha > 0$ e suponha que a hipótese (D) seja verdadeira. Considere as afirmações*

(i) $-\ln f(\kappa) \in R_\alpha$,

(ii) $-\ln \bar{F}(\kappa) \in R_\alpha$,

(iii) $-\ln C(\kappa) \in R_\alpha$,

(iv) $\dfrac{V(\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-\dfrac{\ln C(\kappa)}{\kappa}\right)$.

Então

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv).$$

Além disso,

$$(ii) \Rightarrow -\ln C(\kappa) \sim -\kappa - \ln\bar{F}(\kappa) \Rightarrow \frac{V(\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-1 - \frac{\ln\bar{F}(\kappa)}{\kappa}\right),$$

$$(i) \Rightarrow -\ln f(\kappa) \sim -\ln \bar{F}(\kappa) \Rightarrow \frac{V(\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-1 - \frac{\ln f(\kappa)}{\kappa}\right).$$

E ainda, se ou $-\ln f(\kappa)/\kappa$ *ou* $-\ln \bar{F}(\kappa)/\kappa$ *ou* $-\ln C(\kappa)/\kappa$ *tende a infinto quando* $\kappa \to +\infty$*, então*

$$\frac{V(\kappa)^2}{\kappa} \sim -\frac{\kappa}{2\ln f(\kappa)} \quad ou \quad -\frac{\kappa}{2\ln \bar{F}(\kappa)} \quad ou \quad -\frac{\kappa}{2\ln C(\kappa)}.$$

Demonstração. Já sabemos que

$$\bar{F}(\kappa) \leq e^{-(1+\varepsilon)\kappa}\mathbb{E}[e^{(1+\varepsilon)X}] \Rightarrow -\ln \bar{F}(\kappa) \geq (1+\varepsilon)\kappa + \Theta.$$

Então, se $-\ln \bar{F}(\kappa)$ pertencer a algum R_α, teremos $\alpha \geq 1$. Para verificar isso, suponha que $-\ln \bar{F}(\kappa) \in R_\alpha$ com $\alpha \in (0,1)$. Logo, existe $\alpha' \in (\alpha, 1)$, tal que, para κ suficientemente grande, vale $-\ln \bar{F}(\kappa) \leq \kappa^{\alpha'}$ (veja a observação 2.46). Mas isso contradiz o fato de que $-\ln \bar{F}(\kappa) \geq (1+\varepsilon)\kappa + \Theta$.

Temos também que $C(\kappa) \leq e^{-\kappa\varepsilon}\mathbb{E}[e^{(1+\varepsilon)X}]$, que pode ser verificada fazendo-se uma simples integração. Então, pelo mesmo motivo exposto acima, se $-\ln C(\kappa) \in R_\alpha$, teremos $\alpha \geq 1$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Suponha que $-\ln f(\kappa) \in R_\alpha$. Então, aplicando o Lema 2.47 à função $g(x) = -\ln f(x)$, teremos

$$-\ln\left(\int_x^{+\infty} e^{-g(y)}dy\right) \sim g(x).$$

Mas $g(x) = -\ln f(x)$ e $-\ln\left(\int_x^{+\infty} e^{-g(y)}dy\right) = -\ln\left(\int_x^{+\infty} f(y)dy\right) = -\ln \bar{F}(x)$. Logo, temos o desejado.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Segue do Lema 2.50.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Segue do Lema 2.51.

Para concluir o teorema, basta notar que

$$\psi(x) = 2 - 4x(\sqrt{1+1/x} - 1) = 2 - 4x\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + O(x^{-3})\right) \sim \frac{1}{2x}.$$

□

Observação 2.53. Supondo válidas as hipóteses do teorema acima, $V(\kappa)^2/\kappa$ converge se e somente se $-\ln \bar{F}(\kappa)/\kappa$ converge. Já que

$$-\frac{\ln \bar{F}(\kappa)}{\kappa} \geq 1 + \varepsilon + \frac{\Theta}{\kappa},$$

teremos que o limite de $-\ln \bar{F}(\kappa)/\kappa$, se existir, será estritamente maior que 1, e ainda, nesse caso, $-\ln \bar{F} \in R_1$. Com isso, (ii) vale.

Exemplo 2.54. Seja f_{BS} a densidade do preço no modelo de Black-Scholes, isto é,

$$f_{BS}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(\ln(x/S_0) - \bar{\mu}T)^2}{2\sigma^2 T}},$$

onde $\bar{\mu} = r - \sigma^2/2$. Logo

$$\ln f_{BS}(x) = -\ln x - \ln \sigma\sqrt{2\pi T} - \frac{(\ln(x/S_0) - \bar{\mu}T)^2}{2\sigma^2 T} =$$
$$= -\ln x - \ln \sigma\sqrt{2\pi T} - \frac{(\ln(x/S_0))^2}{2\sigma^2 T} + \frac{\bar{\mu}}{\sigma^2}\ln(x/S_0) - \frac{\bar{\mu}^2 T}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f_{BS}(x)}{-x^2/2\sigma^2 T} = 1$$

$$\Rightarrow -\ln f_{BS}(x) \sim \frac{x^2}{2\sigma^2 T}.$$

Portanto, $-\ln f_{BS}(x) \in R_2$ e temos que

$$-\frac{\ln f_{BS}(x)}{x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Juntando todas essas informações podemos aplicar o teorema acima e concluir que, como já esperávamos,

$$\frac{V(x)^2}{x} \sim \frac{1}{-2\ln(f_{BS}(x))/x} \sim \frac{\sigma^2 T}{x} \Rightarrow V(x) \sim \sigma\sqrt{T}$$

Exemplo 2.55. Suponha que S_T, quando descontado, seja um martingal sob a medida neutra ao risco. Suponha ainda que as hipóteses do Teorema 2.52 sejam satisfeitas. Lembre-se que

$$V(\kappa) = V(\kappa, T) = \hat{\sigma}_0(\kappa, T)\sqrt{T}.$$

Então, o Teorema 2.52 nos diz que

$$\frac{\hat{\sigma}_0(\kappa, T)T}{\kappa} \sim \psi\left(-\frac{\ln C(\kappa)}{\kappa}\right).$$

Lembre-se que, com κ fixo, a função $C(\kappa, T)$ é crescente em T. Logo, como as funções $-\ln(\cdot)/\kappa$ e ψ são decrescentes, temos que

$$\psi\left(-\frac{\ln C(\kappa, T)}{\kappa}\right)$$

é crescente em T. Então, o resultado assintótico respeita o conhecido fato de que $\hat{\sigma}_0(\kappa, T)T$ é crescente em T.

Resultado Assintótico para a Cauda Esquerda

Iremos aqui só enunciar os resultados, pois eles têm prova análoga ao caso da cauda direita.

Lema 2.56. *Suponha que exista $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{E}[e^{-\varepsilon X}] < +\infty$. Então,*

$$P(-\kappa) = \int_{\kappa}^{+\infty} e^{-x} F(-x) dx.$$

Lema 2.57. *Suponha que existam $\varepsilon > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\mathbb{E}[e^{-\varepsilon X}] < +\infty$ e $-\ln F(-\kappa) \in R_\alpha$. Então, $-\ln P(-\kappa) \in R_\alpha$ e $-\ln P(-\kappa) \sim \kappa - \ln F(-\kappa)$.*

Lema 2.58. *Suponha que existam $\varepsilon > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\mathbb{E}[e^{-\varepsilon X}] < +\infty$ e $-\ln P(-\kappa) \in R_\alpha$. Então*

$$\frac{V(-\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-1 - \frac{\ln P(-\kappa)}{\kappa}\right).$$

Teorema 2.59 (Comportamento Assintótico da Cauda Esquerda)**.** *Seja $\alpha > 0$ e suponha que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{E}[e^{-\varepsilon X}] < +\infty$. Considere as afirmações*

(i) $-\ln f(-\kappa) \in R_\alpha$,

(ii) $-\ln F(-\kappa) \in R_\alpha$,

(iii) $-\ln P(-\kappa) \in R_\alpha$,

(iv) $\dfrac{V(-\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-1 - \dfrac{\ln P(-\kappa)}{\kappa}\right)$.

Então

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv).$$

Além disso

$$(ii) \Rightarrow -\ln P(-\kappa) \sim \kappa - \ln F(-\kappa) \Rightarrow \frac{V(-\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-\frac{\ln F(-\kappa)}{\kappa}\right),$$
$$(i) \Rightarrow -\ln f(-\kappa) \sim -\ln F(-\kappa) \Rightarrow \frac{V(-\kappa)^2}{\kappa} \sim \psi\left(-\frac{\ln f(-\kappa)}{\kappa}\right).$$

E ainda, se ou $-\ln f(-\kappa)/\kappa$ ou $-\ln F(-\kappa)/\kappa$ ou $-\ln p(\kappa)/\kappa$ tende a infinto quando $\kappa \to +\infty$, então

$$\frac{V(-\kappa)^2}{\kappa} \sim -\frac{\kappa}{2\ln f(-\kappa)} \quad ou \quad -\frac{\kappa}{2\ln F(-\kappa)} \quad ou \quad -\frac{\kappa}{2\ln P(-\kappa)}.$$

2.4 A Inclinação da Volatilidade Implícita

Os Teoremas 2.40, 2.42, 2.52 e 2.59 restringem o formato da SVI para preços de exercício extremos: 0 e $+\infty$. Vamos agora, fixando a maturidade, deduzir um limitante para inclinação da volatilidade implícita e, a partir dele, vamos estudar o comportamento assintótico da SVI com respeito à maturidade.

Teorema 2.60. *Defina o quociente de Mill*

$$R(x) = \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} = \frac{\Phi(-x)}{\phi(x)} = \frac{\Phi(-x)}{\phi(-x)}$$

Então

$$-\frac{R(-d_-)}{\sqrt{T}} \leq \frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\kappa} \leq \frac{R(d_+)}{\sqrt{T}} \tag{2.4}$$

Demonstração. Por arbitragem, temos que, se $K_1 \leq K_2$,

$$C_t(K_1) \leq C_t(K_2) \quad \text{e} \quad \frac{P_t(K_1)}{K_1} \geq \frac{P_t(K_2)}{K_2},$$

já que os *payoffs* desses contratos satisfazem as mesmas inequações. Supondo que C_0 é diferenciável em relação a K (com isso, pela paridade Put-Call, P_0 também o é) teremos que

$$\frac{\partial C_0}{\partial K} \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{P_0}{K}\right) \geq 0$$

Como veremos no Capítulo 3, Proposição 3.1, C_0 é sempre diferenciável em relação a K, não importando qual é o modelo suposto para S. Agora, como $C_0 = C^{BS}(\hat{\sigma})$ e $P_0 = P^{BS}(\hat{\sigma})$ teremos que

$$\frac{\partial C_0}{\partial K} = \frac{\partial C^{BS}}{\partial \hat{\sigma}}\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial K} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial K} = -\frac{S_0\phi(d_+)\sqrt{T}}{K}\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial K},$$
$$\frac{\partial P_0}{\partial K} = -\frac{S_0\phi(d_+)\sqrt{T}}{K}\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa} + \frac{\partial P^{BS}}{\partial K}$$

e ainda

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^{BS}}{\partial K} &= S_0\phi(d_+)\frac{\partial d_+}{\partial K} - e^{-rT}\Phi(d_-) - Ke^{-rT}\phi(d_-)\frac{\partial d_-}{\partial K} = \\ &= -\frac{S_0\phi(d_+)}{K\hat{\sigma}\sqrt{T}} + \frac{e^{-rT}\phi(d_-)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} - e^{-rT}\Phi(d_-), \\ \frac{\partial P^{BS}}{\partial K} &= \frac{\partial P^{BS}}{\partial K} + e^{-rT} = -\frac{S_0\phi(d_+)}{K\hat{\sigma}\sqrt{T}} + \frac{e^{-rT}\phi(d_-)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} + e^{rT}\Phi(-d_-),\end{aligned}$$

onde foi usado a paridade Put-Call para fórmula da derivada de P^{BS}. Agora note que P_0/K é crescente em K e que

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{P_0}{K}\right) = \frac{1}{K}\frac{\partial P_0}{\partial K} - \frac{P_0}{K^2}.$$

Então, temos que

$$\frac{\partial P_0}{\partial K} \geq \frac{P_0}{K}.$$

Usando isso, e lembrando-se que $P_0 = P^{BS}(\hat{\sigma})$, temos

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa} \leq -\frac{1}{\hat{\sigma}T} + \frac{e^{-rT}\phi(d_-)K}{S_0\phi(d_+)\hat{\sigma}T} + \frac{\Phi(-d_+)}{\phi(d_+)\sqrt{T}}$$

Mas note que

$$d_+^2 - d_-^2 = -2\ln(S_0/K) - 2rT.$$

Logo

$$\frac{\phi(d_-)}{\phi(d_+)} = e^{-\frac{1}{2}(2-2\ln(S_0/K)-2rT)} = e^{rT}\frac{S_0}{K} \Rightarrow \frac{e^{-rT}\phi(d_-)K}{S_0\phi(d_+)} = 1. \tag{2.5}$$

Então, vale a seguinte limitação inferior para a derivada de $\hat{\sigma}$ com relação a κ

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa} \leq \frac{\Phi(-d_+)}{\phi(d_+)\sqrt{T}}.$$

Analogamente, temos que

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa} \geq -\frac{\Phi(d_-)}{\phi(d_-)\sqrt{T}}.$$

Para verificar essa desigualdade, basta notar que C_0 é decrescente em relação K e usar (2.5). Portanto

$$-\frac{R(-d_-)}{\sqrt{T}} \leq \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa} \leq \frac{R(d_+)}{\sqrt{T}}.$$

□

Vamos agora analisar o caso $\kappa = 0$.

Proposição 2.61. *Fixe $\kappa = 0$ e suponha que*

$$\lim_{T\to 0} \hat{\sigma}(0,T) < +\infty \quad e \quad \lim_{T\to+\infty} \hat{\sigma}(0,T) > 0$$

Logo

$$\left|\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa}(0,T)\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \ \textit{quando } T \to 0,$$
$$\left|\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \kappa}(0,T)\right| = O\left(\frac{1}{T}\right) \quad \textit{quando } T \to +\infty.$$

Demonstração. Para $\kappa = 0$, temos que

$$d_\pm = \pm\frac{\hat{\sigma}(0,T)\sqrt{T}}{2}.$$

Então, pelas hipóteses da proposição,

$$\lim_{T\to 0} d_\pm = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{T\to+\infty} d_\pm = \pm\infty.$$

Logo, a continuidade de $R(\kappa)$ nos diz que

$$\lim_{T\to 0} R(d_\pm) = R(0) = 1/2$$

.
Agora, note que $\phi'(x) = x\phi(x)$. Portanto,

$$\lim_{\kappa\to+\infty} R(\kappa) = \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{1-\Phi(\kappa)}{\phi(\kappa)} = \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{-\phi(\kappa)}{-\phi(\kappa)\kappa} = \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{1}{\kappa}$$

Com isso, pode-se concluir que para $T \to +\infty$

$$R(d_\pm) \sim \frac{1}{d_\pm} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Então, pela fórmula (2.4), temos o desejado. □

2.5 Condições de Não-Arbitragem para a Volatilidade Implícita

Foram vistas na Proposição 2.25 condições, necessárias e suficientes, para que uma função $c(T,\cdot)$ seja um preço de call. Veja a Seção 2.2 para maiores detalhes. Agora, vamos derivar condições para que a volatilidade implícita de Black-Scholes seja livre de arbitragem, para algum sentido de arbitragem. Nessa seção, vamos olhar a volatilidade implícita como função de $\kappa = \ln(Ke^{-rT}/S_0)$ e as calls e puts como função de K, pois a correspondência biunívoca entre κ e K nos permite isso.

Definição 2.62. Diremos que uma função $\hat{\sigma} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma volatilidade implícita se $c(T,K) = C^{BS}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa))$ for uma call e $p(T,K) = P^{BS}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa))$ for uma put. Diremos ainda que, para $T > 0$ fixo, $\hat{\sigma}(T,\cdot)$ é uma volatilidade implícita se as condições acima forem satisfeitas com $T > 0$ fixo.

Observação 2.63. Fixe $T > 0$ e $K > 0$. Como o modelo de Black-Scholes é livre de arbitragem, temos que

$$c(T,K) - p(T,K) = C^{BS}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa)) - P^{BS}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa)) = S - Ke^{-rT},$$

ou seja, $c(T,K)$ e $p(T,K)$ satisfazem a paridade Put-Call.

Vamos supor agora que $\hat{\sigma}$ é duas vezes continuamente diferenciável com respeito a κ. Note que isso é equivalente a supor o mesmo para $c(T,K)$.

Proposição 2.64. *Uma função $\hat{\sigma}(T,\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma volatilidade implícita para $T > 0$ fixo se e somente se as seguinte condições forem satisfeitas*

(i) $\lim\limits_{\kappa\to\pm\infty} \dfrac{\hat{\sigma}^2(T,\kappa)}{|\kappa|/T} \in [0,2]$

(ii) $-\dfrac{R(-d_-(\kappa))}{\sqrt{T}} \leq \dfrac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\kappa} \leq \dfrac{R(d_+(\kappa))}{\sqrt{T}}$, $\forall\ \kappa \in \mathbb{R}$.

(iii) $\hat{\sigma}(T,\kappa) > 0$, $\forall\ \kappa \in \mathbb{R}$.

(iv) $\dfrac{\partial^2\hat{\sigma}}{\partial\kappa^2}(T,\kappa) \geq -\dfrac{1}{\hat{\sigma}(T,\kappa)} + \dfrac{2\kappa}{\hat{\sigma}^2(T,\kappa)T}\dfrac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\kappa}(T,\kappa) - \dfrac{\kappa^2}{\hat{\sigma}^3(T,\kappa)T}\left(\dfrac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\kappa}(T,\kappa)\right)^2 + \dfrac{\hat{\sigma}(T,\kappa)T}{4}\left(\dfrac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\kappa}(T,\kappa)\right)^2.$

Demonstração. Primeiramente note que (iv) é equivalente ao preço da call $c(T,K) = C^{BS}(S,T,K,$ $\hat{\sigma}(T,K))$ e da put $p(T,K) = P^{BS}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,K))$ satisfazerem

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2}(T,K) \geq 0\ , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial K^2}(T,K) \geq 0.$$

Para se verificar isso, basta calcular as derivadas acima diretamente. Então a ida da proposição segue de forma clara pelos resultados vistos por todo o capítulo. Para verificarmos a volta, vamos mostrar que os itens acima implicam os quatro itens das Proposições 2.25 e 2.28 da Seção 2.2.

Para começarmos,

$$d_\pm(\kappa,\hat{\sigma}(T,\kappa)) = \frac{\kappa}{\hat{\sigma}(T,\kappa)\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\hat{\sigma}(T,\kappa)\sqrt{T} = \left(\frac{\kappa/T}{\hat{\sigma}^2(T,\kappa)} \pm \frac{1}{2}\right)\hat{\sigma}(T,\kappa)\sqrt{T},$$

que implica, pelo item(i) acima,

$$\lim_{\kappa\to\pm\infty} d_\pm(\kappa,\hat{\sigma}(T,\kappa)) = \pm\infty.$$

Então, $c(T,K)$ e $p(T,K)$ satisfazem o item (i) das Proposições 2.25 e 2.28 já citadas. Pelo que foi visto no Teorema 2.60, o item (ii) acima implica que

$$\frac{\partial c}{\partial K}(T,K) \leq 0\ , \quad \frac{\partial p}{\partial K}(T,K) \geq 0.$$

Logo, os itens (ii) das Proposições 2.25 e 2.28 também são satisfeito. Agora, note que o item (iii) da mesma proposição não compara preços de calls com diferentes preços de exercícios. Fixe então κ_0 (com isso, estamos também fixando um K_0) e note que o modelo de Black-Scholes com volatilidade constante igual a $\hat{\sigma}(T,\kappa_0) > 0$ é livre de arbitragem. Com isso

$$c(T,K_0) = C^{BS}(S,T,K_0,\hat{\sigma}(T,\kappa_0)) \geq (S - e^{-rT}K_0)^+ \quad \text{e} \quad p(T,K_0) \geq (e^{-rT}K_0 - S)^+$$

e, logo, $c(T,K_0)$ e $p(T,K_0)$ satisfazem o item (iii) das proposições 2.25 e 2.28. Pelo o que foi visto no início da demonstração, os itens (iv) de ambas as proposições são equivalentes. Portanto, $\hat{\sigma}(T,\kappa)$ é uma volatilidade implícita. □

Lema 2.65. *Suponha que $\hat{\sigma}(T,\cdot)$ satisfaç as condições da proposição anterior para cada $T>0$ fixo. Então, $\hat{\sigma}$ será uma volatilidade implícita se e somente se, para todo $\kappa\in\mathbb{R}$ e $T>0$,*

$$\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial T}(T,\kappa)\leq\frac{rR(d_+(T,\kappa))}{\sqrt{T}}-\frac{\hat{\sigma}(T,\kappa)}{2T}.$$

Demonstração. Pelo o que foi visto nos Lemas 2.26 e 2.29, $\hat{\sigma}$ será uma volatilidade implícita se, e só se, $e^{rT}c(T,K)=e^{rT}C^{BS}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa))$ e $e^{rT}p(T,K)=e^{rT}P^{BS}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa))$ forem crescentes em T. Logo, pela hipótese de suavidade em $\hat{\sigma}$, é preciso que

$$\frac{\partial c}{\partial T}(T,K)\geq -rc(T,K)\quad\text{e}\quad\frac{\partial p}{\partial T}(T,K)\geq -rp(T,K).$$

Então, pela regra da cadeia e usando as fórmulas das derivadas da fórmula de Black-Scholes

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial T}(T,K)&=\frac{\partial C^{BS}}{\partial T}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa))+\frac{\partial C^{BS}}{\partial\hat{\sigma}}(S,T,K,\hat{\sigma}(T,\kappa))\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial T}(T,\kappa)=\\&=\frac{S\phi(d_+(T,K))\hat{\sigma}(T,\kappa)}{2\sqrt{T}}+rKe^{-rT}\Phi(d_-(T,K))+S\phi(d_+(T,K))\sqrt{T}\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial T}(T,\kappa)\end{aligned}$$

e, analogamente, temos

$$\frac{\partial p}{\partial T}(T,K)=\frac{S\phi(d_+(T,K))\hat{\sigma}(T,\kappa)}{2\sqrt{T}}-rKe^{-rT}\Phi(-d_-(T,K))+S\phi(d_+(T,K))\sqrt{T}\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial T}(T,\kappa).$$

Logo, após alguns cálculos e lembrando que

$$R(x)=\frac{\Phi(-x)}{\phi(-x)}=\frac{\Phi(-x)}{\phi(x)}$$

temos o desejado. □

Usar o Lema 2.65 pode ser muito complicado, pois é necessário calcular explicitamente a derivada de $\hat{\sigma}$ com respeito a T. Mas há uma outra maneira de garantir não-arbitragem entre maturidades. Para isso fixe um log-strike $\kappa=\ln(Ke^{-rT}/S)$. Já vimos que podemos escrever

$$C^{BS}(S,\kappa,\nu)=S(\Phi(d_+(\kappa,\nu))-e^{\kappa}\Phi(d_-(\kappa,\nu))),$$

onde $d_\pm=-\kappa/\nu\pm\nu/2$ e ν é a volatilidade total (volatilidade vezes a raiz da maturidade). Então, uma simples conta nos mostra que

$$\frac{e^{rT}C^{BS}(S,\kappa,\nu)}{K}=e^{-\kappa}\Phi(d_+(\kappa,\nu))-\Phi(d_-(\kappa,\nu))=:f(\kappa,\nu).$$

Note ainda que

$$\frac{\partial f}{\partial\nu}(\kappa,\nu)=S\phi(d_+(\kappa,\nu))>0.$$

Agora, denote $\hat{\nu}(T,\kappa)=\hat{\sigma}(T,\kappa)\sqrt{T}$. Então

$$e^{rT}c(T,K)=Kf(\kappa,\hat{\nu}(T,\kappa)),$$

e como f é crescente com respeito a ν, $e^{rT}c(T,K)$ será crescente com respeito a T se, e somente se, $\hat{\nu}(T,\kappa)$ for crescente com respeito a T. Com isso, temos o seguinte lema:

Lema 2.66. *$c(T,K)$ será livre de arbitragem estrita para todo $T>0$ e $K>0$ se, e somente se, $\hat{\sigma}(T,K)\sqrt{T}$ for crescente com respeito à maturidade T.*

e seu equivalente para puts

Lema 2.67. *$p(T,K)$ será livre de arbitragem estrita para todo $T>0$ e $K>0$ se, e somente se, $\hat{\sigma}(T,K)\sqrt{T}$ for crescente com respeito À maturidade T.*

E portanto, temos o seguinte resultado

Lema 2.68. *$\hat{\sigma}(T,K)$ será uma volatilidade implícita para todos $T>0$ e $K>0$ se, e somente se, $\hat{\sigma}(T,K)$ for uma volatilidade implícita para cada $T>0$ fixo e $\hat{\sigma}(T,K)\sqrt{T}$ for crescente com respeito à maturidade T.*

2.5.1 Aplicação

Jim Gatheral propôs em [20] a seguinte parametrização suave para a superfície de volatilidade implícita:

$$\hat{\sigma}_G^2(T,\kappa)=a(T)+b(T)\left(\rho(T)(\kappa-m(T))+\sqrt{(\kappa-m(T))^2+\sigma^2(T)}\right).$$

Quais serão as condições sobre os parâmetros a, b, ρ, m e σ para que a superfície $\hat{\sigma}_G^2(T,\kappa)$ seja livre de arbitragem? Para responder a essa pergunta, vamos lançar mão da Proposição 2.64 e do Lema 2.68.

Primeiramente, $\hat{\sigma}_G^2(T,\kappa)$ será positiva para todo κ se, e somente se, o mínimo dessa função existir e for positivo. Como essa função é suave, vamos aplicar o teste da derivada segunda para determinar condições sobre os parâmetros de modo que a função seja positiva. Um simples cálculo nos mostra que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\sigma}_G^2}{\partial\kappa}(T,\kappa)&=b\rho+\frac{\kappa-m}{\sqrt{(\kappa-m)^2+\sigma^2}},\\ \frac{\partial^2\hat{\sigma}_G^2}{\partial\kappa^2}(T,\kappa)&=\frac{1}{\sqrt{(\kappa-m)^2+\sigma^2}}-\frac{1}{2}\frac{(\kappa-m)^2}{((\kappa-m)^2+\sigma^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Então, para $T>0$ fixo, os pontos críticos de $\hat{\sigma}_G^2$ são

$$\kappa_\pm=m\pm b\rho\sigma\sqrt{\frac{1}{1-b^2\rho^2}}.$$

Note que, tacitamente, já estamos supondo que $1-b^2\rho^2>0$. Agora, nos pontos críticos

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_G^2(T,\kappa_\pm)&=a+\sigma\frac{1+b^2\rho^2}{\sqrt{1-b^2\rho^2}},\\ \frac{\partial^2\hat{\sigma}_G^2}{\partial\kappa^2}(T,\kappa)&=\sqrt{\frac{1-b^2\rho^2}{\sigma^2}}\left(1-\frac{1}{2}b^2\rho^2\right).\end{aligned}$$

Logo, o item (iii) da Pproposição 2.64 será válido se, e somente se

$$b^2\rho^2<2\quad\text{e}\quad a+\sigma\frac{1+b^2\rho^2}{\sqrt{1-b^2\rho^2}}>0.$$

Para os itens (ii) e (iv), basta usar as derivadas já calculadas acima. Vale lembrar que aqui estamos parametrizando a variância e não a volatilidade, e portanto devemos usar

$$\frac{\partial\hat{\sigma}_G^2}{\partial\kappa}(T,\kappa)=2\hat{\sigma}_G(T,\kappa)\frac{\partial\hat{\sigma}_G}{\partial\kappa}(T,\kappa).$$

Já para o item (i), note que

$$\lim_{\kappa\to\pm\infty}\frac{\hat{\sigma}_G^2(T,\kappa)}{|\kappa|/T}=\begin{cases}b\rho T+bT\ ,\ \text{se}\quad\kappa\to+\infty,\\ -b\rho T+bT\ ,\ \text{se}\quad\kappa\to-\infty.\end{cases}$$

Portanto, o item (i) é satisfeito se e só se

$$0 \leq bT(1 \pm \rho) \leq 2.$$

A não-arbitragem entre as maturidades é garantida pedindo que $\hat{\sigma}_G^2(T, \kappa)T$ seja crescente com respeito a T, vide Lema 2.68.

Capítulo 3

Volatilidade Local

Seja $C_t(T,K)$ o preço de arbitragem de uma call (T,K), sob um ativo S, no instante t e defina $C = C_0$. Nosso primeiro objetivo será determinar, a partir dos preços $\{C(T,K)\ ;\ T>0\ ,\ K>0\}$, uma única lei de probabilidade para S_T sob a probabilidade neutra ao risco P^*. Mas isso, como veremos, não é suficiente para determinarmos uma difusão para o ativo subjacente de modo que os preços das calls nesse modelo sejam iguais a $\{C(T,K)\}$. Mostraremos então que, se nos restringirmos às difusões neutras ao risco (com termo de arrasto igual a rS_t, onde r é a taxa de juros), existirá uma única volatilidade $\sigma(t,S_t)$, definida através de uma fórmula que só depende de $C(T,K)$, a fórmula de Dupire, de modo que a difusão

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t,S_t)S_t dW_t^*$$

aprece as calls com valores iguais a $\{C(T,K)\}$. A volatilidade $\sigma(t,S_t)$ é chamada de *volatilidade local*. Veremos uma interpretação dessa volatilidade, quando a dinâmica do ativo subjacente for na realidade um processo de Itô qualquer. Iremos ainda deduzir uma fórmula para a volatilidade local em termos da volatilidade implícita e vice-versa. Nos basearemos principalmente em [13], [29] e [39].

3.1 Lei de Probabilidade Neutra ao Risco

Proposição 3.1. *Seja $C(T,K)$ o preço de arbitragem em $t=0$ de uma call sobre S com preço de exercício K e maturidade T. Suponha ainda que S_T seja uma variável aleatória contínua sob a medida neutra ao risco P^*. Então*

$$\frac{\partial C}{\partial K}(T,K) = -e^{-rT}P^*(S_T > K)$$

Demonstração. Defina $h(x,K) = (x-K)^+$. Então podemos escrever

$$C(T,K) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[h(S_T,K)],$$

e note que

$$\frac{\partial h}{\partial K} = -\chi_{(K,+\infty)}(x)\ , \quad \forall\ x \neq K.$$

Agora, seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $t_n \to 0$ e defina

$$h_n(x,K) = \frac{h(x,K+t_n) - h(x,K)}{t_n}.$$

Logo, temos que para $x \neq K$

$$h_n(x,K) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial h}{\partial K}(x,K),$$

e existe $C > 0$ tal que $|h_n(x, K)| \leq C$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, se denotarmos a função de distribuição de probabilidade de S_T sob P^* por F_T, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x, K) dF_T(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial K}(x, K) dF_T(x) = \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{\partial h}{\partial K}(S_T, K)\right].$$

O Teorema acima pode ser aplicado já que, por S_T ser uma variável aleatória contínua, ou seja, $P^*(S_T = K) = 0$. Agora, como

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x, K) dF_T(x) = \frac{\mathbb{E}_{P^*}[h(S_T, K + t_n)] - \mathbb{E}_{P^*}[h(S_T, K)]}{t_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial K}\mathbb{E}_{P^*}[h(S_T, K)],$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K}(T, K) = e^{-rT}\frac{\partial}{\partial K}\mathbb{E}_{P^*}[h(S_T, K)] = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{\partial h}{\partial K}(S_T, K)\right] = \\ = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}\left[-\chi_{(K,+\infty)}(S_T)\right] = -e^{-rT}P^*(S_T > K).\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2. *Sob as mesmas hipóteses da proposição anterior, $C(T, K)$, para $T > 0$ fixo, é duas vezes derivável em relação a K se, e somente se, S_T tiver densidade sob P^*. Nesse caso, se denotarmos a densidade de S_T por f_T, vale a seguinte igualdade*

$$f_T(K) = e^{rT}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K)$$

Demonstração. Temos que, pela proposição anterior

$$\frac{\partial C}{\partial K}(T, K) = -e^{-rT}P^*(S_T > K) = -e^{rT}(1 - F_T(K))$$

e, portanto,

$$F_T(K) = e^{rT}\frac{\partial C}{\partial K}(T, K) + 1.$$

A conclusão do corolário segue, facilmente, dessa igualdade. □

Observação 3.3. Vale notar que todos os dois resultados acima não dependem do processo que S segue. Além disso, note que se pode concluir, pelo exposto, que as as distribuições marginais unidimensionais do processo de preço são unicamente determinadas pelos preços $C(T, K)$, ou, equivalentemente, pela superfície de volatilidade implícita do modelo de Black-Scholes $\hat{\sigma}(T, K)$. Mas, como se sabe, o conhecimento dessas distribuições marginais não é suficiente para especificarmos univocamente o processo estocástico de S, mesmo que suponhamos que ele seja markoviano, [13].

3.2 Volatilidade Local

Hipóteses. Vamos supor que conhecemos uma família de preços $\mathcal{C}(T, K)$ que foram obtidos de um modelo desconhecido livre de arbitragem. Mais precisamente, vamos supor que existem um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}, P^*)$ e um martingal M_t nesse espaço tal que $M_0 = S_0$ e

$$\mathcal{C}(T, K) = \mathbb{E}_{P^*}[(M_T - Ke^{-rT})^+].$$

Claramente a idéia era usar os preços de mercado dessas calls, mas não sabemos se esses preços são livres de arbitragem.

Definição 3.4. Suponha que, sob P^*, o processo de S seja da forma

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t, S_t)dW_t^*)$$

com $S_0 > 0$ e onde W^* é um movimento browniano sob P^*. Definiremos a função $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$C(T, K) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T - K)^+] = \mathcal{C}(T, K),$$

para todo $T > 0$ e $K > 0$, de volatilidade local para $\mathcal{C}$.

Observação 3.5. No caso em que $\mathcal{C}(T, K)$ é dado pelo modelo de Black-Scholes com volatilidade σ, um simples cálculo nos diz que

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial T}(T, K) - \frac{1}{2}\sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}(T, K) + rK\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial K}(T, K) = 0.$$

Como veremos a seguir, uma fórmula análoga a essa continua válida em casos mais gerais.

Proposição 3.6. *Suponha que a função $\sigma(t, S_t)$ satisfaça as seguintes hipóteses para garantirmos uma única solução forte da EDE em questão (veja o Teorema 1.83)*

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \Theta|x - y|, \ \forall \ x, y \in \mathbb{R} \ e \ \forall \ t > 0,$$
$$\sigma^2(t, x) \leq \Theta(1 + |x|^2), \ \forall \ x \in \mathbb{R} \ e \ \forall \ t > 0.$$

Suponha ainda que S_t possua uma densidade contínua, f_t, para todo $t > 0$. Então, se considerarmos o preço de arbitragem

$$C(T, K) = \mathbb{E}_{P^*}[(e^{-rT}S_T - Ke^{-rT})^+],$$

teremos que, para $T^* > 0$ arbitrariamente grande, $C \in C^{2,1}([0, T^*] \times \mathbb{R})$ e satisfaz a seguinte EDP, que denominaremos de EDP de Dupire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial T}(T, K) - \dfrac{1}{2}\sigma^2(T, K)K^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) + rK\dfrac{\partial C}{\partial K}(T, K) = 0, \\ \\ C(0, K) = (S_0 - K)^+. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente, defina $S_t^* = e^{-rt}S_t$. Como

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t, S_t)dW_t^*),$$

temos que

$$dS_t^* = d(e^{-rt}S_t) = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = -rS_t^*dt + rS_t^*dt + S_t^*\sigma(t, S_t)dW_t^* = S_t^*\sigma(t, S_t)dW_t^*$$

Agora note que a seguinte desigualdade vale:

$$e^{-2rt}S_t^2\sigma^2(t, S_t) \leq \Theta e^{-2rt}S_t^2(1 + S_t^2)$$

e que S_t é uma função contínua de t P^*-quase certamente. Logo, para todo $T^* > 0$,

$$P^*\left(\int_0^{T^*} e^{-2rt}S_t^2\sigma^2(t, S_t)dt < +\infty\right) = 1$$

e, portanto, S_t^* é um martingal local contínuo em $[0, T^*]$ sob P^*. Isso nos vai permitir aplicar a fórmula de Tanaka a $(S_t^* - K)^+$. Antes disso, seja f_t^* a densidade de probabilidade de S_t^*. Como S_t tem densidade

contínua, f_t^* também é contínua. Já vimos que o fato do ativo subjacente ter densidade é equivalente aos preços $C(T,K)$ serem duas vezes diferenciáveis em relação a K. Da fórmula

$$C(T, Ke^{rT}) = \int_{\mathbb{R}} (x-K)^+ f^*(x,t)dx,$$

podemos concluir, derivando duas vezes com respeito a K, que

$$f_t^*(K) = e^{2rT}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, Ke^{rT})$$

e, com isso, que $C(T,K)$ é, na verdade, duas vezes *continuamente* diferenciável em relação a K. Agora, aplicando a fórmula de Tanaka para $(S_t^* - K)^+$, temos que

$$(S_t^* - K)^+ = (S_0^* - K)^+ + \int_0^t \chi_{(K,+\infty)}(S_s^*)dS_s^* + L_t^{S^*}(K), \tag{3.1}$$

onde $L_t^{S^*}$ é o *tempo local* de S^* em t. Lembre-se da seguinte fórmula, Proposição 1.71, que será importante nas contas que seguem

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)L_t^{S^*}(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^t h(S_s^*){S_s^*}^2\sigma^2(s, e^{rs}S_s^*)ds,$$

para toda h mensurável. Aplicando $\mathbb{E}_{P^*}$, multiplicando por h contínua de suporte compacto e integrando na reta com relação a K a equação (3.1), temos que

$$\int_{\mathbb{R}} h(K)C(T, Ke^{rT})dK = \int_{\mathbb{R}} h(K)(S_0^* - K)^+ dK + \int_{\mathbb{R}} h(K)\mathbb{E}_{P^*}[L_t^{S^*}(K)]dK.$$

Vamos agora desenvolver melhor o último termo da soma acima. Pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} h(K)\mathbb{E}_{P^*}[L_t^{S^*}(K)]dK = \mathbb{E}_{P^*}\left[\int_{\mathbb{R}} h(K)L_t^{S^*}(K)dK\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^T h(S_t^*){S_t^*}^2\sigma^2(t, e^{rt}S_t^*)dt\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} h(K)\int_0^T K^2\sigma^2(t, e^{rt}K)f^*(K,t)dtdK.$$

Então, a seguinte igualdade vale para toda h contínua e com suporte compacto

$$\int_{\mathbb{R}} h(K)C(T, Ke^{rT})dK = \int_{\mathbb{R}} h(K)\left((S_0^* - K)^+ + \frac{1}{2}\int_0^T K^2\sigma^2(t, e^{rt}K)f_t^*(K)dt\right)dK$$

e, portanto

$$C(Ke^{rT}, T) = (S_0^* - K)^+ + \frac{1}{2}\int_0^T K^2\sigma^2(t, e^{rt}K)f^*(K,t)dt. \tag{3.2}$$

Isso nos diz que $C(T.K)$ é continuamente derivável em relação a T e vale

$$\frac{\partial}{\partial T}C(T, Ke^{rT}) = \frac{1}{2}K^2\sigma^2(t, e^{rt}K)f_t^*(K).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial T}C(T, Ke^{rT}) = \frac{\partial C}{\partial K}(T, Ke^{rT})rKe^{rT} + \frac{\partial C}{\partial T}(T, Ke^{rT}).$$

Usando a fórmula para $f_t^*(K)$ e substituindo Ke^{rT} por K temos que $C(T,K)$ satisfaz a EDP desejada. Além disso, pela equação (3.2)

$$C(0,K) = (S_0^* - K)^+ = (S_0 - K)^+$$

□

Uma aplicação dos Teoremas 1.89 e 1.90 nos fornece uma condição sobre a volatilidade local para a existência e unicidade de soluções para a EDP de Dupire.

Teorema 3.7. *Suponha existam Θ, θ tais que a volatilidade local satisfaça a seguinte desigualdade*

$$\Theta \geq \sigma(t, e^x) \geq \theta > 0 \ , \quad \forall \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$$

e que seja contínua em t uniformemente em $[0,T]\times\mathbb{R}$ e Hölder contínua em x uniformemente em $[0,T]\times\mathbb{R}$. Então, a EDP de Dupire tem uma única solução.

Demonstração. Considere a mudança de variável $\overline{K} = \ln K$. Então a EDP de Dupire se torna

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial T}(T,\overline{K}) - \dfrac{1}{2}\sigma^2(T,\overline{K})\dfrac{\partial^2 C}{\partial \overline{K}^2}(T,\overline{K}) + r\dfrac{\partial C}{\partial \overline{K}}(T,\overline{K}) = 0, \\ \\ c(0,\overline{K}) = (S_0 - e^{\overline{K}})^+. \end{cases}$$

que, pelas hipóteses sobre σ, satisfaz os Teoremas 1.89 e 1.90.

Observação 3.8. De agora em diante sempre iremos supor que as condições do Teorema 3.7 são satisfeitas.

Observação 3.9. A EDP de Black-Scholes nos dá o preço de uma call (T,K) fixa para qualquer data t e com o ativo valendo um valor qualquer S. Note ainda que essa equação funciona de forma *backward*, pois sabemos o valor da opção na data T. Já a EDP de Dupire nos dá o preço de uma call qualquer sabendo somente o preço inicial do ativo subjacente e, diferentemente da EDP de Black-Scholes, ela é *forward*.

O próximo corolário é o principal resultado do capítulo.

Corolário 3.10. *Defina*

$$\mathcal{C}(T,K) = \mathbb{E}_{P^*}[(M_T - Ke^{-rT})^+],$$

onde M é um martingal sob um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}, P^*)$. Suponha que $\mathcal{C}(T,K)$ é uma vez continuamente diferenciável em relação a T e duas vezes em relação a K e que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}(T,K) > 0, \ \forall \ T, K \geq 0.$$

Se a função

$$\sigma^2(T,K) = 2\frac{\dfrac{\partial \mathcal{C}}{\partial T}(T,K) + rK\dfrac{\partial \mathcal{C}}{\partial K}(T,K)}{K^2\dfrac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}(T,K)}$$

satisfizer as condições do Teorema 3.7 e for regular o suficiente para que a solução da EDE

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t,S_t)S_t dW_t^*$$

exista e seja única no sentido forte e tal que exista uma função de densidade de probabilidade contínua para S_t, então $\sigma(t,S_t)$ será a única volatilidade local para $C(T,K)$. Denominaremos a fórmula acima para $\sigma(t,S_t)$ de fórmula de Dupire.

Demonstração. Seja

$$C(T,K) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T - K)^+]$$

o preço de arbitragem da call (T,K). Pela proposição anterior, $C \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T^*],\mathbb{R})$ e a seguinte EDP é verdadeira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial T}(T,K) - \dfrac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K) + rK\dfrac{\partial C}{\partial K}(T,K) = 0, \\ \\ C(0,K) = (S_0 - K)^+. \end{cases}$$

Agora, pela hipótese do corolário, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial T}(T,K) - \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}(T,K) + rK\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial K}(T,K) = 0.$$

Além disso

$$\mathcal{C}(0,K) = \mathbb{E}_{P^*}[(M_0 - K)^+] = \mathbb{E}_{P^*}[(S_0 - K)^+] = (S_0 - K)^+.$$

Portanto, pela unicidade de soluções da EDP acima $\mathcal{C}(T,K) = C(T,K)$ e, com isso, $\sigma(T,K)$ é a volatilidade local para os preços $\mathcal{C}(T,K)$. Agora, suponha que exista $\tilde{\sigma}(T,K)$ volatilidade local para $\mathcal{C}(T,K)$ tão regular quanto $\sigma(T,K)$. Então a proposição anterior nos diz que a seguinte EDP vale

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial T}(T,K) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(T,K)K^2\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}(T,K) + rK\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial K}(T,K) = 0.$$

Na verdade, a proposição nos diz que a função $e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(\tilde{S}_T - K)^+]$ satisfaz a EDP, onde $\tilde{S}$ é a solução da EDE com $\tilde{\sigma}$ no lugar de σ, mas o fato de $\tilde{\sigma}$ ser volatilidade local nos garante que $\mathcal{C}(T,K) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(\tilde{S}_T - K)^+]$. Como $\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2} \neq 0$, temos que

$$\tilde{\sigma}^2(T,K) = 2\frac{\dfrac{\partial \mathcal{C}}{\partial T}(T,K) + rK\dfrac{\partial \mathcal{C}}{\partial K}(T,K)}{K^2\dfrac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}(T,K)} = \sigma^2(T,K)$$

e, portanto, σ é única. □

O Teorema que segue, além de ser uma generalização da proposição acima, ele nos fornece uma interessante interpretação da volatilidade local. A referência desse Teorema é [29].

Teorema 3.11. *Seja S_t um P-semimartingal contínuo tal que exista uma medida de probabilidade neutra ao risco P^* em $(\Omega,\mathcal{A})$ de modo $e^{-rt}S_t$ seja um martingal $\mathcal{H}^1$ sob P^* com relação a uma filtração $\mathcal{F}_t$. Suponha que, para $T^* > 0$ fixo, S_T tenha densidade sob P e que $\langle S\rangle_T$ seja diferenciável, para todo $T \leq T^*$. Então*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial T}(T,K) - \dfrac{1}{2}H_T(K)\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K) + rK\dfrac{\partial C}{\partial K}(T,K) = 0, \\ \\ C(0,K) = (S_0 - K)^+, \end{cases}$$

onde $H_T(K) = \mathbb{E}_{P^*}\left[\dfrac{d}{dT}\langle S\rangle_T \middle| S_T = K\right]$

Observação 3.12. Para a definição precisa do espaço $\mathcal{H}^1$, veja a Definição 1.22.

Demonstração. Como S é um semimartingal sob a medida original P, ele também será sob a medida martingal equivalente, P^*. Sejam A um processo adaptado de variação finita e M um martingal local sob P^* tais que

$$S_t = S_0 + A_t + M_t$$

sob P^* com $A_0 = 0$ e $M_0 = 0$. Agora, note que

$$d(e^{-rt}S_t) = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = e^{-rt}(-rS_t dt + dA_t) + e^{-rt}dM_t.$$

Pela unicidade da decomposição dos semimartingais e já que $e^{-rt}dM_t$ e $e^{-rt}S_t$ são martingais locais, podemos concluir que, para todo $t \in [0, T^*]$,

$$\int_0^t e^{-ru}(-rS_u du + dA_u) = 0,$$

e como $e^{-ru} > 0$, $\forall\ u \in \mathbb{R}$, temos que

$$A_t = r\int_0^t S_u du.$$

Logo, sob P^*,

$$S_t = S_0 + r\int_0^t S_u du + M_t.$$

Vamos verificar agora que M_t é na verdade um P^*-martingal. Por $e^{-rt}S_t$ ser um P^*-martingal sob P^*, temos que, para $0 \leq s \leq t \leq T^*$, $\mathbb{E}_{P^*}[S_t \mid \mathcal{F}_s] = e^{-r(s-t)}S_s$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P^*}[M_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{P^*}\left[S_t - S_0 - r\int_0^t S_u du \middle| \mathcal{F}_s\right] = \\
&= e^{-r(s-t)}S_s - S_0 - r\int_0^s S_u du + \mathbb{E}_{P^*}\left[-r\int_s^t S_u du \middle| \mathcal{F}_s\right] = \\
&= e^{-r(s-t)}S_s - S_0 - r\int_0^s S_u du - r\int_s^t \mathbb{E}_{P^*}[S_u|\mathcal{F}_s]du = \\
&= e^{-r(s-t)}S_s - S_0 - r\int_0^s S_u du - r\int_s^t e^{-r(s-u)}S_s du = \\
&= e^{-r(s-t)}S_s - S_0 - r\int_0^s S_u du - S_s\left(e^{-r(s-u)}\Big|_s^t\right) = \\
&= S_s - S_0 - r\int_0^s S_u du = M_s
\end{aligned}$$

e, portanto, M é uma P^*-martingal. Agora, como $S_t \geq 0$, temos que, P^*-quase certamente, $S_t \geq M_t$. Então

$$\mathbb{E}_{P^*}[\overline{M}_t] \leq \mathbb{E}_{P^*}[\overline{S}_t] \leq C\mathbb{E}_{P^*}[\overline{e^{-rt}S_t}] < +\infty,$$

onde $\overline{M}_t = \sup_{0\leq s\leq t} M_s$. Logo, M é um P^*-martingal $\mathcal{H}^1$. Seja agora $L_T^S(K)$ o tempo local de S em (T, K). A fórmula de Tanaka nos diz que

$$\begin{aligned}
(S_T - K)^+ &= (S_0 - K)^+ + \int_0^T \chi_{(K,+\infty)}(S_t)dS_t + L_T^S(K) = \\
&= (S_0 - K)^+ + r\int_0^T \chi_{(K,+\infty)}(S_t)S_t dt + \int_0^T \chi_{(K,+\infty)}(S_t)dM_t + L_T^S(K). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Note que $N_t = \int_0^t \chi_{(K,+\infty)}(S_u)dM_u$ é um P^*-martingal local com $N_0 = 0$ e que $\langle N\rangle_t = \int_0^t \chi_{(K,+\infty)}(S_u)d\langle M\rangle_u$. Logo

$$\langle N\rangle_t \leq \langle M\rangle_t \Rightarrow \mathbb{E}_{P^*}\left[\sqrt{\langle N\rangle_t}\right] \leq \mathbb{E}_{P^*}\left[\sqrt{\langle M\rangle_t}\right].$$

Agora, pela desigualdade de Davis, Teorema 1.29, existem θ e Θ constantes positivas tais que

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[\overline{N}_t\right] \leq \Theta\mathbb{E}_{P^*}\left[\sqrt{\langle N\rangle_t}\right] \leq \Theta\mathbb{E}_{P^*}\left[\sqrt{\langle M\rangle_t}\right] \leq \theta\Theta\mathbb{E}_{P^*}\left[\overline{M}_t\right] < +\infty.$$

Logo, N é um martingal sob P^*. Então, aplicando $\mathbb{E}_{P^*}$ na equação (3.3), temos que

$$\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] = \mathbb{E}_{P^*}[(S_0-K)^+] + r\int_0^T \mathbb{E}_{P^*}\left[\chi_{(K,+\infty)}(S_t)S_t\right]dt + \mathbb{E}_{P^*}[L_T^S(K)].$$

Sabemos que, como L_T^S é o tempo local de S em T, para qualquer $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, teremos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_T^S(K)g(K)dK = \frac{1}{2}\int_0^T g(S_t)d\langle S\rangle_t = \frac{1}{2}\int_0^T g(S_t)\frac{d\langle S\rangle_t}{dt}dt,$$

onde a última igualdade segue do fato de $\langle S\rangle_t$ ser diferenciável. Então, aplicando o Teorema de Fubini diversas vezes,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}_{P^*}[L_T^S(K)]g(K)dK &= \mathbb{E}_{P^*}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} L_T^S(K)g(K)dK\right] = \mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{1}{2}\int_0^T g(S_t)\frac{d\langle S\rangle_t}{dt}dt\right] = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \mathbb{E}_{P^*}\left[g(S_t)\frac{d\langle S\rangle_t}{dt}\right]dt = \frac{1}{2}\int_0^T \mathbb{E}_{P^*}\left[\mathbb{E}_{P^*}\left[g(S_t)\ \frac{d\langle S\rangle_t}{dt}\middle|\ S_t\right]\right]dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \mathbb{E}_{P^*}\left[g(S_t)\mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{d\langle S\rangle_t}{dt}\middle|\ S_t\right]\right]dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty} g(K)\mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{d\langle S\rangle_t}{dt}\middle|\ S_t = K\right]f_t(K)dKdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(K)\left(\int_0^T H_t(K)f_t(K)dt\right)dK.
\end{aligned}$$

Como g é arbitrária, podemos concluir que

$$\mathbb{E}_{P^*}[L_T^S(K)] = \frac{1}{2}\int_0^T H_t(K)f_t(K)dt \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T}\mathbb{E}_{P^*}[L_T^S(K)] = \frac{1}{2}H_T(K)f_T(K).$$

Portanto, $\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+]$ é diferenciável com relação a T e valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] &= r\mathbb{E}_{P^*}[S_T\chi_{(K,+\infty)}(S_T)] + \frac{1}{2}f_T(K)H_T(K) = \\
&= r\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+ + K\chi_{(K,+\infty)}(S_T)] + \frac{1}{2}f_T(K)H_T(K) = \\
&= r\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] + rKP^*(S_T > K) + \frac{1}{2}f_T(K)H_T(K) = \\
&= r\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] - rKe^{rT}\frac{\partial C}{\partial K}(T,K) + \frac{1}{2}e^{rT}H_T(K)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K).
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial T}(T,K) &= \frac{\partial}{\partial K}e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] = \\ &= e^{-rT}\frac{\partial}{\partial K}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] - re^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] = \\ &= \frac{1}{2}H_T(K)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K) - rK\frac{\partial C}{\partial K}(T,K).\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial C}{\partial T}(T,K) = \frac{1}{2}H_T(K)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K) - rK\frac{\partial C}{\partial K}(T,K).$$

□

Observação 3.13. Já vimos que, sob P^*

$$S_t = S_0 + r\int_0^t S_u du + M_t.$$

Note que $\langle S\rangle_t = \langle M\rangle_t$. Agora, sejam W^* um P^*-movimento Browniano e $\mathcal{F}_t^{W^*}$ a filtração gerada por ele. Suponha que M seja, na verdade, um $\mathcal{F}_t^{W^*}$-martingal quadrado integrável sob P^* (isso implica que S, quando descontado, é também um $\mathcal{F}_t^{W^*}$-martingal sob P^*). Então, pelo Teorema 1.68, existe $\phi(\omega,t) \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T^*]$ tal que

$$M_t = \int_0^t \phi(s,\omega)dW_s^*.$$

Logo,

$$\langle S\rangle_t = \langle M\rangle_t = \int_0^t \phi^2(s,\omega)ds.$$

Portanto, se $e^{-rt}S_t$ for um $\mathcal{F}_t^{W^*}$-martingal quadrado integrável, a sua variação quadrática será diferenciável.

Corolário 3.14. *Sob as mesmas condições do Teorema 4.9, temos que*

$$C(T,K) = \mathbb{E}_{P^*}[(S_0-K_T)^+|K_0 = K],$$

onde K_t tem a seguinte dinâmica

$$dK_t = -rK_t dt + \sqrt{H_T(K_t)}dW_t^*.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.9 e definindo $\Pi(K,t) = C(K,T-t)$, temos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial t}(K,t) + \dfrac{1}{2}H_T(K)\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2}(K,t) - rK\dfrac{\partial \Pi}{\partial K}(K,t) = 0, \\ \Pi(T,K) = (S_0-K)^+. \end{cases}$$

Então, pela fórmula de Feynman-Kac, Teorema 1.86,

$$C(T,K) = \Pi(0,K) = \mathbb{E}_{P^*}[(S_0-K_T)^+|K_0 = K],$$

onde K_t satisfaz a EDE $dK_t = -rK_t dt + \sqrt{H_T(K_t)}dW_t^*$. □

Observação 3.15. Sob as hipótese do Teorema 4.9, podemos aplicar o Corolário 3.10 e concluir que a volatilidade local σ dos preços de arbitragem $C(T,K) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T - K)^+]$ satisfazem a igualdade

$$\sigma^2(T,K) = \frac{1}{K^2}H_T(K) = \frac{1}{K^2}\mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{d}{dT}\langle S\rangle_T \middle| S_T = K\right].$$

Essa equação nos fornece uma interpretação para a volatilidade implícita, como veremos nos exemplos.

Exemplo 3.16 (Modelo de Black-Scholes)**.** Suponha que o processo de preço seja $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*$. Então

$$\langle S\rangle_t = \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle S\rangle_t = \sigma^2 S_t^2.$$

Logo, $H_T(K) = \mathbb{E}_{P^*}[\sigma^2 S_t^2 | S_T = K] = \sigma^2 K^2$ e, portanto, pelo corolário anterior $C(T,K) = E[(S_0 - K_T)^+ | K_0 = K]$, onde $dK_t = -rK_t dt + \sigma K_t dW_t^*$, que nos dá a fórmula de Black-Scholes.

Exemplo 3.17 (Volatilidade Estocástica Geral)**.** Considere o caso em que a dinâmica sob P^* do ativo S_t seja um processo de Itô da forma

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t^*,$$

onde W^* é um movimento browniano sob P^*. Nesse caso,

$$\langle S\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 S_s^2 ds \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle S\rangle_t = \sigma_t^2 S_t^2.$$

Portanto, $H_T(K) = K^2\mathbb{E}_{P^*}[\sigma_T^2 \mid S_T = K]$ e a volatilidade local para esse modelo é

$$\sigma^2(T,K) = \mathbb{E}_{P^*}[\sigma_T^2 \mid S_T = K].$$

Nesse caso, uma interpretação da volatilidade local fica clara: ela é a raiz quadrada da esperança da volatilidade estocástica σ_T^2 condicionada a $S_T = K$.

Exemplo 3.18 (Volatilidade Estocástica do Tipo Bachelier)**.** Suponha que $dS_t = \nu_t dW_t^*$ com $S_0 = 0$ (note que $r = 0$) e que $d\nu_t = \sigma dW_t^*$. Então

$$\nu_t = \sigma W_t^* \Rightarrow dS_t = \sigma W_t^* dW_t^* \Rightarrow S_t = \sigma\left(\frac{{W_t^*}^2}{2} - \frac{1}{2}t\right).$$

Logo,

$$H_T(K) = \mathbb{E}_{P^*}[\nu_T^2 | S_T = K] = \sigma^2\mathbb{E}_{P^*}[{W_T^*}^2 | S_T = K] = \sigma^2\mathbb{E}_{P^*}\left[2\,\frac{S_T}{\sigma} + T \middle| S_T = K\right] = \sigma^2 T + 2\sigma K$$

e, portanto, $C(T,K)$ satisfaz a seguinte EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial T}(T,K) + \dfrac{1}{2}(\sigma^2 T + 2\sigma K)\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K) = 0, \\ C(T,K) = 0. \end{cases}$$

Vantagens e Desvantagens dos Modelos de Volatilidade Local

A vantagem óbvia dos modelos de volatilidade local é que eles são livres de arbitragem e ajustam perfeitamente o *smile* observado no mercado, desde que ele seja também livre de arbitragem. Além disso, esses modelos são completos se a volatilidade local for positiva e com isso qualquer derivativo pode ser perfeitamente replicado no modelo.

Uma desvantagem é que, obviamente, os preços das *calls* e das *puts* são mensurados somente para um conjunto discreto de pontos, e não contínuo. Outra, talvez mais grave, é que eles se baseiam na crença de que os preços das opções européias determinam o preço de qualquer derivativo, ou seja, que toda a informação relevante para apreçar derivativos está contida nas calls, puts e no ativo.

3.2.1 Volatilidade Local em Termos da Volatilidade Implícita

Notação. Vamos simplicar a fórmula de Black-Scholes, usando a seguinte notação $\zeta = \zeta(\tau,\kappa) = \hat{\sigma}^2(\tau,\kappa)\tau$ para a volatilidade total. Com isso, podemos escrever

$$C(S_t,\tau,\kappa) = C^{BS}(S_t,\tau,\kappa,\zeta) = S_t e^{r(T-t)}\left(\Phi\left(-\frac{\kappa}{\sqrt{\zeta}}+\frac{\sqrt{\zeta}}{2}\right) - e^{\kappa}\Phi\left(-\frac{\kappa}{\sqrt{\zeta}}-\frac{\sqrt{\zeta}}{2}\right)\right).$$

Iremos escrever ainda σ_L para designar a volatilidade local.

Proposição 3.19. *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 3.6, temos que*

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = \sigma_L^2(\kappa,\tau)\left\{1 - \frac{\kappa}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\kappa} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{\omega}+\frac{\kappa^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial\kappa}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\kappa^2}\right\}$$

ou ainda, em termos da volatlidade implícita, $\hat{\sigma}$,

$$\left\{\left(1-\frac{\kappa}{\hat{\sigma}}\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\kappa}\right)^2 - \frac{1}{4}\hat{\sigma}^2\tau^2\left(\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\kappa}\right)^2 + \hat{\sigma}\tau\frac{\partial^2\hat{\sigma}}{\partial\kappa^2}\right\}\sigma_L^2(\kappa,\tau) = \hat{\sigma}^2 - 2\hat{\sigma}\tau\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\tau}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Para provar a primeira equação, basta usar a fórmula $C(\kappa,\tau) = C^{BS}(\kappa,\tau,\omega)$, a conclusão da Proposição 3.6 e usar a regra da cadeia diversas vezes. Já a segunda, deve-se usar a fórmula $\omega(\kappa,\tau) = \hat{\sigma}(\kappa,\tau)\tau$. □

Corolário 3.20. *Seja $\hat{\sigma}_0$ a solução da equação (3.4) com $\tau = 0$. Então*

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_0(\kappa)} = \int_0^1 \frac{1}{\sigma_L(\kappa\xi,0)}d\xi.$$

Demonstração. Pela proposição anterior, temos que

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_L^2(\kappa,0)\left(1-\frac{\kappa}{\hat{\sigma}_0}\frac{\partial\hat{\sigma}_0}{\partial\kappa}\right)^2 \Rightarrow \hat{\sigma}_0 + \sigma_L^2(\kappa,0)\frac{\kappa}{\hat{\sigma}_0}\frac{\partial\hat{\sigma}_0}{\partial\kappa} = \sigma_L^2(\kappa,0).$$

Defina $f(\kappa) = (\hat{\sigma}_0(\kappa))^{-1}$. Então

$$f'(\kappa) = -\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}\frac{\partial\hat{\sigma}_0}{\partial\kappa} = -\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}\left(-\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\kappa\sigma_L(\kappa,0)}+\frac{\hat{\sigma}_0}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa\sigma_L(\kappa,0)} - \frac{1}{\kappa\hat{\sigma}_0} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\sigma_L(\kappa,0)} - f(\kappa)\right).$$

Logo, se escrevermos $b(\kappa) = 1/\sigma_L(\kappa,0)$, teremos que f satisfaz a seguinte a seguinte EDO

$$\kappa f'(\kappa) + f(\kappa) - b(\kappa) = 0 \Rightarrow f'(\kappa) + \frac{1}{\kappa}f(\kappa) = \frac{b(\kappa)}{\kappa} \Rightarrow (f(\kappa)\kappa)' = b(\kappa).$$

Integrando de 0 a κ ambos os lados da equação acima

$$f(\kappa)\kappa = C + \int_0^\kappa b(\eta)d\eta.$$

Fazendo $\kappa = 0$, concluimos que $C = 0$. Então

$$f(\kappa) = \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa b(\eta)d\eta = \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa \frac{1}{\sigma_L(\eta,0)}d\eta.$$

Mudando a variável η para $\xi = \eta/\kappa$, concluimos o desejado. □

Observação 3.21. Supondo que σ_L é limitada, uniformente contínua e que exista $\bar{\sigma} < +\infty$ e $\underline{\sigma} > 0$ tais que $\bar{\sigma} \leq \sigma_L \leq \underline{\sigma}$, pode-se mostrar, veja [5], que

$$\hat{\sigma}_0(\kappa) = \lim_{\tau\to 0}\hat{\sigma}(\kappa,\tau)$$

e que, se existirem $\sigma_\pm(\tau) = \lim_{\kappa\to\pm\infty}\sigma_L(\kappa,\tau)$,

$$\lim_{\kappa\to\pm\infty}\hat{\sigma}(\kappa,\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sigma_\pm(s)ds}.$$

3.2.2 Volatilidade Implícita em Termos da Volatilidade Local

Considere uma call européia com maturidade T e preço de exercício K sobre um ativo S_t cuja dinâmica sob P^* é descrita pelo processo de Itô

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t^*.$$

Vamos tentar determinar uma função $\mathcal{F}_0$-mensurável $v_{K,T}(t)$ tal que, se definirmos

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{T-t}\int_t^T v_{K,T}(\tau)d\tau \ ,$$

teremos

$$\hat{\sigma}_0(T,K) = \bar{\sigma}(0). \tag{3.5}$$

Agora considere a seguinte função

$$g(t,S_t) = e^{-rT}C^{BS}(S_t, T-t, K, \bar{\sigma}(t)).$$

Então, pela fórmula de Itô,

$$g(T,S_T) - g(0,S_0) = \int_0^T \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}(t,S_t)\right)dt + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)dS_t.$$

Note ainda que $g(T,S_T) = e^{-rT}(S_T - K)^+$. Seja $C(S_0,K,T)$ o preço de arbitragem da call em questão. Logo

$$\begin{aligned} C(S_0,K,T) &= \mathbb{E}_{P^*}[e^{-rT}(S_T-K)^+ \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_{P^*}[g(T,S_T) \mid \mathcal{F}_0] = \\ &= g(0,S_0) + \mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^T \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}(t,S_t)\right)dt + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)dS_t \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right]. \end{aligned}$$

Lembre-se que $C^{BS}(S_t, T-t, K, \bar{\sigma}(t))$ satisfaz a EDP de Black-Scholes com volatilidade igual a $v_{K,T}(t)$ e, portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,S_t) = -rg(t,S_t) + e^{-rT}\frac{\partial C^{BS}}{\partial t}(t,S_t) = -\frac{1}{2}v_{K,T}(t)S_t^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}(t,S_t) - rS_r\frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t).$$

Note ainda que

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^T \frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)dS_t \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^T rS_t\frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)dt \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right].$$

Então

$$C(S_0,K,T) = C^{BS}(S_0,T,K,\bar{\sigma}(0)) + \mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^T \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - v_{K,T}(t))S_t^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}(t,S_t)dt \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right].$$

Olhando a equação acima e lembrando-se da definição de volatilidade implícita, podemos concluir que para (3.5) ser verdadeira é suficiente que

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^T \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - v_{K,T}(t))S_t^2\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2}(S_t,T-t,K,\bar{\sigma}(t))dt \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right] = 0.$$

Agora, já que queremos que $v_{K,T}(t)$ seja $\mathcal{F}_0$-mensurável, podemos tomar

$$v_{K,T}(t) = \frac{\mathbb{E}_{P^*}[\sigma_t^2 S_t^2\Gamma^{BS}(S_t,T-t,K,\bar{\sigma}(t)) \mid \mathcal{F}_0]}{\mathbb{E}_{P^*}[S_t^2\Gamma^{BS}(S_t,T-t,K,\bar{\sigma}(t)) \mid \mathcal{F}_0]},$$

onde $\Gamma^{BS} = \partial^2 C^{BS}/\partial S^2$.

Defina agora a medida de probabilidade G_t através da derivada de Radon-Nikodým

$$\frac{dG_t}{dP^*} = \frac{S_t^2\Gamma^{BS}(S_t,T-t,K,\bar{\sigma}(t))}{\mathbb{E}_{P^*}[S_t^2\Gamma^{BS}(S_t,T-t,K,\bar{\sigma}(t)) \mid \mathcal{F}_0]}.$$

Logo, podemos escrever $v_{K,T}(t) = \mathbb{E}_{G_t}[\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_0]$, e, portanto, temos a seguinte fórmula para a volatilidade implícita no caso em que o ativo segue um processo de Itô

$$\hat{\sigma}_0(T,K) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_{G_t}[\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_0]dt.$$

Provamos então o seguinte teorema:

Teorema 3.22. *Suponha que o ativo S_t siga um processo de Itô qualquer com volatilidade σ_t e considere uma call européia, sobre S, com maturidade T e preço de exercício K. Então a volatilidade implícita dessa call pode ser escrita como*

$$\hat{\sigma}_0(T,K) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_{G_t}[\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_0]dt,$$

onde a medida G_t é dada pela derivada de Radon-Nikodým

$$\frac{dG_t}{dP^*} = \frac{S_t^2\Gamma^{BS}(S_t,T-t,K,\bar{\sigma}(t))}{\mathbb{E}_{P^*}[S_t^2\Gamma^{BS}(S_t,T-t,K,\bar{\sigma}(t)) \mid \mathcal{F}_0]}.$$

Capítulo 4

Volatilidade Estocástica

Nesse capítulo iremos estudar os modelos de volatilidade estocástica. Primeiramente iremos expor resultados gerais sobre esses modelos, para depois olharmos mais de perto os modelos de Hull-White e de Heston. No final, falaremos um pouco do uso da Transformada de Fourier para resolvermos o problema de apreçamento de títulos de risco europeus em modelos mais gerais de volatilidade estocástica.

4.1 Introdução

Neste capítulo estaremos interessados, de maneira geral, na seguinte dinâmica para o ativo subjacente

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ d\sigma_t = \alpha(t, S_t, \sigma_t)dt + \beta(t, S_t, \sigma_t)d\widehat{W}_t, \\ S_0 = s_0 \text{ e } \sigma_0 = v_0, \end{cases}$$

onde $\{W, \mathcal{F}\}$ e $\{\widehat{W}, \mathcal{G}\}$ são dois movimentos brownianos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tais que $d[W, \widehat{W}]_t = \rho_t dt$, com $\rho_t = \rho(t, S_t, \sigma_t) \in [-1, 1]$ um processo adaptado e mensurável com relação às filtrações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Suponha que $s_0,\ v_0 \in L^2(\Omega)$. Vamos ainda fixar um horizonte $T > 0$ e supor que o sistema de EDE acima tenha uma única solução forte S e σ.

Considere ainda um ativo livre de risco, B, com seguinte dinâmica

$$dB_t = r_t B_t dt,$$

onde r_t, que chamaremos de *taxa de juros livre de risco*, é uma função determinística e integrável. Note que $d(B_t^{-1}) = -r_t B_t^{-1} dt$.

4.1.1 Medida Martingal Equivalente

Pode-se mostrar que existe um movimento browniano $\{\overline{W}, \mathcal{H}\}$ independente de W tal que

$$\widehat{W}_t = \int_0^t \rho_s d\overline{W}_s + \int_0^t \sqrt{1 - \rho_s^2} dW_s$$

e seja $\lambda_t = \lambda(t, S_t, \sigma_t) \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0, T]$ um processo qualquer. Suponha que $\gamma_t = (r_t - \mu_t)/\sigma_t$ e λ_t satisfaçam a condição de Novikov, Teorema 1.75.

Agora defina um movimento browniano bidimensional $\mathbf{W}_t = (W_t, \overline{W}_t)$ e $\Lambda_t = (\gamma_t, \lambda_t)$. Com isso, já estamos prontos para definir a medida martingal local equivalente, P^*, através da derivada de Radon-Nikodým

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left(\int_0^T \Lambda_t \cdot \mathbf{W}_t - \frac{1}{2}\int_0^T ||\Lambda_t||^2 dt\right).$$

Então, sob P^*, a dinâmica do ativo subjacente se torna

$$\begin{cases} dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^*, \\ d\sigma_t = \tilde{\alpha}(t, S_t, \sigma_t)dt + \beta(t, S_t, \sigma_t)d\widetilde{W}_t, \\ S_0 = s_0 \text{ e } \sigma_0 = v_0, \end{cases}$$

onde $\tilde{\alpha}(t, S_t, \sigma_t) = \alpha(t, S_t, \sigma_t) + \beta(t, S_t, \sigma_t)(\gamma_t\rho_t + \lambda_t\sqrt{1-\rho_t^2}) = \alpha(t, S_t, \sigma_t) - \beta(t, S_t, \sigma_t)\phi_t$ e $\{W^*, \mathcal{F}\}$ e $\{\widetilde{W}, \mathcal{G}\}$ são dois movimentos brownianos em $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ com $d[W^*, \widetilde{W}]_t = \rho_t dt$. Na literatura, o processo γ_t é chamado de *preço de mercado do risco* e ϕ_t de *preço de mercado do risco de volatilidade*. Uma explicação para essa terminologia vai ser dada adiante.

Agora note que o ativo descontado, $S_t^* = B_t^{-1}S_t$, tem a seguinte dinâmica

$$dS_t^* = \sigma_t S_t^* dW_t^*.$$

Portanto, S_t^* é um P^*-martingal local e vale a seguinte fórmula

$$S_t^* = s_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_s dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right\}.$$

Logo, se supusermos ainda que σ_t satisfaz, sob P^*, a condição de Novikov, teremos que S_t^* será, na verdade, um P^*-martingal.

4.1.2 Martingais e Explosões

Note que S_t^* é um martingal sob P^* se, e somente se, $\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] = s_0$. De maneira geral, por S^* ser um martingal local positivo, sempre vale $\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] \leq s_0$.

Definição 4.1 (Medida do Preço do Ativo)**.** Definiremos a medida do preço do ativo no espaço $(\Omega, \mathcal{A})$ como

$$P^{S_T}(A) = \frac{1}{s_0}\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*\chi_A], \quad A \in \mathcal{A}.$$

Observação 4.2. Se S não for um martingal sob P^*, então P^{S_T} e P^* não serão equivalentes em $\mathcal{A}$, e mais, nesse caso, P^{S_T} não será nem uma medida de probabilidade já que

$$P^{S_T}(\Omega) = \frac{1}{s_0}\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] < 1.$$

Definição 4.3 (Tempo de Explosão)**.** Vamos considerar os seguintes tempos de parada

$$\tau_n = \inf\{t > 0 \ ; \ \sigma_t \geq n\} \quad \text{e} \quad \tau = \sup_{n\geq 1}\tau_n.$$

Iremos nos referir a τ como *tempo de explosão* e diremos que σ explode sob P^{S_T} se

$$P^{S_T}(\tau < T) > 0.$$

Vale notar que σ não explode sob P^*; mais especificamente

$$P^*(\tau < T) = P^*(S_T^* = 0) = 0.$$

Para evitar as complicações de não estarmos trabalhando com uma medida de probabilidade, considere os seguintes processos

$$\sigma_t^n = \sigma_{t\wedge\tau_n} \quad \text{e} \quad S_t^n = S_{t\wedge\tau_n}^*$$

Note que S_t^n é um martingal local limitado, e, logo, é um martingal sob P^*. Agora, defina para $T > 0$

$$P^n(A) = \frac{1}{s_0}\mathbb{E}_{P^*}[S_T^n \chi_A] \ , \quad A \in \mathcal{A}$$

Teorema 4.4.

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] = s_0 \lim_{n\to+\infty} P^n(\tau_n > T) = s_0 P^{S_T}(\tau > T)$$

Demonstração. Já vimos que $\{\tau \leq T\}$ é de P^*-medida nula. Então

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] = \mathbb{E}_{P^*}[S_T^* \chi_{\{\tau>T\}}] = s_0 P^{S_T}(\tau > T)$$

Note ainda que $\tau_n \leq \tau_{n+1}$, que implica que $\tau_n \to \tau$, quando $n \to +\infty$. Logo

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] = \mathbb{E}_{P^*}[S_T^* \chi_{\{\tau>T\}}] = \mathbb{E}_{P^*}\left[\lim_{n\to+\infty} S_T^* \chi_{\{\tau_n>T\}}\right]$$

Como $S_T^* = S_T^n$ em $\{\tau_n > T\}$, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{P^*}[S_T^* \chi_{\{\tau_n>T\}}] \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{P^*}[S_T^n \chi_{\{\tau_n>T\}}] = \lim_{n\to+\infty} s_0 P^n(\tau_n > T).$$

□

Corolário 4.5. *S^* é um martingal sob P^* se, e somente se, σ não explode sob a medida do preço do ativo.*

4.1.3 A EDP de Apreçamento

Vamos considerar um derivativo europeu, sobre o ativo S, com maturidade T e *payoff* $g(S_T, \sigma_T)$. Denote $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$ por $\mathbb{F}_t$. O preço de arbitragem desse contrato no instante $t \leq T$ é dado por

$$V(t, S_t, \sigma_t) = B_t \mathbb{E}_{P^*}[B_T^{-1} g(S_T, \sigma_T) \mid \mathbb{F}_t],$$

onde, implicitamente, estamos usando a propriedade de Markov, Teorema 1.85. Agora, considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t, S, v) + \mathcal{D}_t V(t, S, v) = r_t V(t, S, v), \\ \\ V(T, S, v) = g(S, v), \end{cases}$$

onde o operador diferencial $\mathcal{D}_t$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t V(t, S, v) = r_t S \frac{\partial V}{\partial S}(t, S, v) + \tilde{\alpha}(t, S, v)\frac{\partial V}{\partial v}(t, S, v) + \frac{1}{2}S^2 v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S, v) + \\ + \frac{1}{2}\beta^2(t, S, v)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(t, S, v) + \rho_t \beta(t, S, v) S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v}(t, S, v). \end{aligned}$$

Vamos sempre supor que exista uma solução $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ para a EDP acima, a menos que seja dito o contrário. Então Pela fórmula de Feynman-Kac, Teorema 1.86, $V(t, S_t, \sigma_t)$ definida acima é a única solução da EDP acima que satisfaz a condição

$$\max_{0\leq t\leq T} V(t,x) \leq \Theta(1+\|x\|^{2\lambda}) \ , \quad \forall\ x\in\mathbb{R}^2,$$

para $\Theta > 0$ e $\lambda \geq 1$.

Uma outra maneira de derivar a EDP de apreçamento é a seguinte. Suponha que tenhamos um outro derivativo europeu sobre S com mesmo *payoff* g, mas com maturidade $T_1 > T$ **TERMINAR**.

Observação 4.6. Considere agora o caso mais simples

$$f(t,S_t,\sigma_t) = \mathbb{E}_{P^*}[g(S_T,\sigma_T) \mid \mathbb{F}_t].$$

Então f satisfaz seguinte EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,S,v) + \mathcal{D}_t f(t,S,v) = 0, \\ \\ f(T,S,v) = g(S,v). \end{cases}$$

Três escolhas para a função g se tornam interessantes

(i) $g(s,v) = \chi_{\{s\ \leq\ x\}}$, com x fixo.
Então a solução f é dada por

$$f(t,S_t,\sigma_t) = \mathbb{E}_{P^*}[\chi_{\{S_T\ \leq\ x\}} \mid \mathbb{F}_t] = P^*(S_T \leq x \mid \mathbb{F}_t).$$

(ii) $g(s,v) = e^{izs}$, com z fixo.
Nesse caso f é a função caracterítica de S_T condicionada a $\mathbb{F}_t$.

(iii) $g(s,v) = \delta(s-x)$, com x fixo e onde δ é o delta de Dirac concentrada na origem.
Aqui a solução é a densidade de probabilidade de S_T condicionada a $\mathbb{F}_t$ calculada em x.

4.1.4 Preço de Mercado do Risco

Vamos agora olhar novamente para o processo γ_t, cuja interpretação segue diretamente da sua definição

$$\gamma_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t},$$

já que essa razão mede, em unidades da volatilidade σ_t, o excesso de retorno do ativo S com relação ao ativo livre de risco B. Esse é o motivo pelo qual γ_t é chamado de *preço de mercado do risco*. Um modelo que supõe $\gamma_t = 0$ é dito *neutro ao risco*.

4.1.5 Preço de Mercado do Risco da Volatilidade

Aplicando o lema de Itô a V e usando a EDP de apreçamento acima

$$\begin{aligned} dV(t,S_t,\sigma_t) = \Bigg(\frac{\partial V}{\partial t} + r_t S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \tilde{\alpha}(t,S_t,\sigma_t)\frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}S_t^2\sigma_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\beta(t,S_t,\sigma_t)\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \\ + \rho_t\beta(t,S_t,\sigma_t)\sigma_t S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}\Bigg)dt = r_t V(t,S_t,\sigma_t)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_t S_t dW_t^* + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\beta(t,S_t,\sigma_t)d\widetilde{W}_t. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Voltando a olhar o processo sob a medida P, temos que

$$dV(t,S_t,\sigma_t) = r_tV(t,S_t,\sigma_t)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_tS_t(\gamma_tdt + dW_t) + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\beta(t,S_t,\sigma_t)(\phi_tdt + d\widehat{W}_t) =$$
$$= \left(r_tV(t,S_t,\sigma_t) + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_tS_t\gamma_t + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\beta(t,S_t,\sigma_t)\phi_t\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_tS_tdW_t + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\beta(t,S_t,\sigma_t)d\widehat{W}_t. \quad (4.2)$$

Antes de mais nada, note que $(\partial V/\partial S)\sigma_tS_t$ e $(\partial V/\partial\sigma)\beta$ podem ser vistos como uma medida de reatividade da opção com relação ao choques aleatórios do ativo e da volatilidade, respectivamente. Agora, comparando as equações (4.1) e (4.2) temos um interpretação para os processos γ_t e ϕ_t. A primeira mostra que, sob a medida neutra ao risco, o derivativo rende, em média (sob P^*), a mesma quantia que um ativo livre de risco, como era de se esperar. Mas isso, obviamente, não é verdade quando se considera a medida física P. Sob ela, se tem um excesso de retorno por se expor ao risco, tanto do ativo quanto da volatilidade, ambos proporcionais aos riscos expostos. Isso fica claro quando supomos que, por exemplo, a volatilidade seja um processo determinístico ($\beta = 0$), ou seja, não existe nenhuma fonte de risco na volatilidade . Nesse caso, não importa quão grande σ_t seja, o derivativo não terá, por isso, um acréscimo no retorno (note que o excesso de retorno devido ao risco do ativo, apesar de parecer, não depende de σ_t).

4.1.6 Apreçamento de uma Opção Européia

Vamos derivar uma fórmula para o apreçamento do mesmo derivativo descrito na seção anterior, mas com o *payoff* dependendo só do ativo subjacente. Para isso, suponha ainda que $\rho_t = \rho(t,\sigma_t)$ e que $\lambda_t = \lambda(t,\sigma_t)$. Agora considere um movimento browniano $\{\overline{W},\mathcal{H}\}$ independente de $\widetilde{W}$ e tal que

$$W_t^* = \int_0^t \rho_s d\widetilde{W}_s + \int_0^t \sqrt{1-\rho_s^2}d\overline{W}_s.$$

Vale notar a diferença entre essa decomposição e a feita quando definimos a medida martingal local equivalente. Usando essa decomposição, temos a seguinte dinâmica para o ativo, sob P^*,

$$\begin{cases} dS_t = r_tS_tdt + \sigma_tS_t(\rho_td\widetilde{W}_t + \sqrt{1-\rho_t^2}d\overline{W}_t), \\ d\sigma_t = \tilde{\alpha}(t,\sigma_t)dt + \beta(t,\sigma_t)d\widetilde{W}_t. \end{cases}$$

Vamos supor que as hipóteses do Teorema 1.83 sobre solução forte de EDE são satisfeitas por $\tilde{\alpha}$ e β. Então, a EDE $d\sigma_t = \tilde{\alpha}(t,\sigma_t)dt + \beta(t,\sigma_t)d\widetilde{W}_t$ tem uma única solução forte, contínua e adaptada à filtração $\mathcal{G}$ e tal que para todo $T > 0$, existe Θ, que depende de K e T, satisfazendo

$$\mathbb{E}_{P^*}[\sigma_t^2] \leq \Theta(1 + \mathbb{E}_{P^*}[v_0^2])e^{\Theta t}, \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Note que essa limitação implica que σ_t está em $L^2(P^*)$ uniformemente em $t \in [0,T]$ e que, portanto, $\sigma_t \in \mathcal{H}^2[0,T]$.

Pela fórmula de Itô, temos que

$$d\ln S_t = \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt + \sigma_t\left(\sqrt{1-\rho_t^2}d\overline{W}_t + \rho_td\widetilde{W}_t\right).$$

Agora, vamos fixar uma notação. Seja θ_t um processo qualquer. Definiremos

$$\mathcal{F}_t^\theta = \sigma(\theta_s; 0 \leq s \leq t),$$

onde o lado direito da igualdade acima denota a σ-álgebra gerada por θ até t. Então, pelas propriedades de σ, para todo $t > 0$, $\mathcal{F}_t^\sigma \subseteq \mathcal{G}_t$, o que implica que σ_s é independente de $\overline{W}_s$, para todo $s \in [0,T]$. Já que ρ_t só depende de σ_t, e portanto é também independente de $\overline{W}_t$, temos que, pela Proposição 1.59,

$$\int_0^t \sigma_s\sqrt{1-\rho_s^2}d\overline{W}_s \sim \mathcal{N}\left(0\ ,\ \int_0^t (1-\rho_s^2)\sigma_s^2 ds\right).$$

Note que

$$\sigma_t \in \mathcal{H}^2[0,T]\ ,\ |\rho_t| \leq 1 \Rightarrow \sigma_t\rho_t \in \mathcal{H}^2[0,T].$$

Logo, $\int_0^t \sigma_s\rho_s d\widetilde{W}_s$ é um martingal com respeito à filtração $\mathcal{G}$ e, portanto,

$$\ln S_t \mid \mathcal{G}_t \sim \mathcal{N}\left(\ln s_0 + \int_0^t \sigma_s\rho_s d\widetilde{W}_s + \int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right)ds\ ,\ \int_0^t (1-\rho_s^2)\sigma_s^2 ds\right).$$

Vamos definir alguns processos para podermos assim escrever o preço desse derivativo, dado $\mathcal{G}_t$ (que contém $\mathcal{F}_t^\sigma$), como o preço dele no modelo de Black-Scholes com alguma volatilidade e preço inicial. Considere

$$\overline{\sigma_\rho^2} = \frac{1}{T}\int_0^T (1-\rho_t^2)\sigma_t^2 dt\ ,\quad \overline{r} = \frac{1}{T}\int_0^T r_t dt \quad \text{e} \quad Z_T = \int_0^T \sigma_t\rho_t d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2\rho_t^2 dt.$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P^*}[\ln S_T \mid \mathcal{G}] &= \ln s_0 + \int_0^T \sigma_t\rho_t d\widetilde{W}_t + \int_0^T \left(r_t - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt = \\
&= \ln s_0 + \int_0^T \sigma_t\rho_t d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2\rho_t^2 dt + \left(\overline{r} - \frac{1}{2}\overline{\sigma_\rho^2}\right)T = \\
&= \ln(s_0 e^{Z_T}) + \left(\overline{r} - \frac{1}{2}\overline{\sigma_\rho^2}\right)T.
\end{aligned}$$

Denotaremos o preço do derivativo em questão no tempo t no modelo de Black-Scholes com variância ν^2, taxa de juros r e preço do ativo subjacente S em t, como $C_t^{BS}(S,r,g,T,\nu^2)$. Portanto

$$\mathbb{E}_{P^*}[B_T^{-1}g(S_T)|\ \mathcal{G}] = C_0^{BS}(s_0e^{Z_T}, g, T, \overline{r}, \overline{\sigma_\rho^2}),$$

o que nos diz que

$$V(0,s_0,v_0) = \mathbb{E}_{P^*}[C_0^{BS}(S_0e^{Z_T}, g, T, \overline{r}, \overline{\sigma_\rho^2})].$$

4.1.7 Apreçamento de uma Call no Caso Semimartingal

De um modo geral, o ativo S pode ser um semimartingal contínuo qualquer no espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$. Vamos denotar a filtração de S por $\mathcal{F}$. Seguindo [29], é possível, com algumas hipóteses adicionais, derivar uma EDP para o preço de uma call sobre o ativo S. Vamos supor, para não carregar a notação, que a taxa de juros é constante e igual a r. Antes de enunciarmos e demonstramos o principal resultado dessa seção, considere as seguintes observações:

Observação 4.7. Seja F_{X_t} a função de distribuição de $X_t = \ln S_t$ e defina

$$F(x) = \frac{1}{S_0}\int_{-\infty}^x e^{-rT}e^y dF_{X_T}(y).$$

Se S_t, quando descontado, for um martingal na medida neutra ao risco P^*, um simples cálculo nos mostra que F é uma função de distribuição. Agora, note que

$$C(S_0,T,K) = S_0\mathbb{E}_{P^*}\left[\frac{e^{-rT}S_T}{S_0}\chi_{\{S_T\geq K\}}\right] - Ke^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[\chi_{\{S_T\geq K\}}]$$

e, portanto, não importando se S_t é um P^*-martingal, vale

$$C(S_0,T,K) = S_0 \int_{\ln K}^{+\infty} dF(x) - Ke^{-rT} \int_{\ln K}^{+\infty} dF_{X_T}(x).$$

Observação 4.8. No que segue, estaremos supondo, sem mencionar explicitamente, que $\mathcal{F}_0$ é trivial (e, portanto, S_0 é constante) e que, dado $T > 0$, S_T/S_0 não depende de S_0. Nesse caso, se definirmos

$$F(y) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}\left[\left(\frac{S_T}{S_0} - y\right)^+\right],$$

então

$$C(S_0,T,K) = S_0 e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}\left[\left(\frac{S_T}{S_0} - \frac{K}{S_0}\right)^+\right] = S_0 F(K/S_0).$$

Tendo em vista essas observações, o próximo teorema pode ser visto como uma maneira de especificar a distribuição de X_t como função somente da call e, a partir disso, escrever uma EDP para o preço da call.

Teorema 4.9. *Defina a seguinte função* $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$F(y) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}\left[\left(\frac{S_T}{S} - y\right)^+\right].$$

Se F é diferenciável em um intervalo aberto I, então o preço de arbitragem de uma call com maturidade T e preço de exercício K, com $K/S_0 \in I$, satisfaz a seguinte EDP

$$C(S,T,K) = S\frac{\partial C}{\partial S}(S,T,K) + K\frac{\partial C}{\partial K}(S,T,K),$$

se $K/S \in I$.

Demonstração. Sabemos que o preço de arbitragem de uma call é dado pela fórmula

$$C(S,T,K) = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T - K)^+].$$

Então, como já vimos

$$C(S,T,K) = SF(K/S).$$

Então supondo que $K/S \in I$, a igualdade acima nos diz que C é diferenciável com relação a K e S e vale as seguintes fórmulas

$$\frac{\partial C}{\partial S}(S,T,K) = F(K/S) + SF'(K/S)\left(-\frac{K}{S^2}\right) = F(K/S) - \frac{K}{S}F'(K/S).$$
$$\frac{\partial C}{\partial K}(S,T,K) = SF'(K/S)\frac{1}{S} = F'(K/S).$$

Portanto

$$S\frac{\partial C}{\partial S}(S,T,K) + K\frac{\partial C}{\partial K}(S,T,K) = SF(K/S) = C(S,T,K).$$

□

Observação 4.10. Por outro lado, uma solução clássica da EDP acima é da forma $SF(K/S)$ para alguma função F diferenciável. Vamos demonstrar essa afirmativa. Para isso, seja C a solução da EDP mencionada e defina

$$F(S,y) = \frac{1}{S}C(S,T,yS).$$

Então

$$\frac{\partial F}{\partial S}(S,y) = -\frac{1}{S^2}C(S,T,yS) + \frac{1}{S}\frac{\partial C}{\partial S}(S,T,yS) + \frac{y}{S}\frac{\partial C}{\partial K}(S,T,yS) = 0.$$

Logo, F é constante com respeito a S e, portanto, $C(S,T,K) = SF(K/S)$.

Proposição 4.11. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.9, temos que*

$$\frac{\partial C}{\partial S}(S,T,K) = \frac{1}{S}e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[S_T\chi_{\{S_T>K\}}]$$

Demonstração. Já vimos na Proposição 3.1 que

$$\frac{\partial C}{\partial K}(S,T,K) = -e^{-rT}P^*(S_T > K)$$

Então

$$\begin{aligned} C(S,T,K) &= e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+] = e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)\chi_{\{S_T>K\}}] = \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[S_T\chi_{\{S_T>K\}}] - e^{-rT}KP^*(S_T>K) = \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}_{P^*}[S_T\chi_{\{S_T>K\}}] - K\frac{\partial C}{\partial K}(S,T,K) \end{aligned}$$

Logo, usando o teorema anterior, temos o desejado. □

4.2 O Modelo de Hull-White

Definição 4.12. O modelo de Hull-White supõe que, sob P^*,

$$\begin{cases} dS_t = r_tS_tdt + \sigma_tS_tdW_t^*, \\ d\sigma_t = \tilde{\alpha}(t,\sigma_t)dt + \beta(t,\sigma_t)d\widetilde{W}_t, \\ S_0 = s_0 \text{ e } \sigma_0 = v_0, \end{cases}$$

onde $\tilde{\alpha}(t,\sigma_t) = \alpha(t,\sigma_t) + \beta(t,\sigma_t)\lambda_t$ com $\{W^*,\mathcal{F}\}$ e $\{\widetilde{W},\mathcal{G}\}$ independentes, isto é, com $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ independentes. Vamos supor que o processo λ_t, que define a medida neutra ao risco considerada, dependa somente de t e σ_t e manteremos as hipóteses sobre $\tilde{\alpha}$ e β. Então, como já vimos, a EDE $d\sigma_t = \tilde{\alpha}(t,\sigma_t)dt + \beta(t,\sigma_t)d\widetilde{W}_t$ tem uma única solução forte, contínua e adaptada à filtração $\mathcal{G}$ e tal que

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}_{P^*}[\sigma_t^2] < +\infty,$$

Proposição 4.13. *Nesse modelo, o processo descontado S_t^* é um P^*-martingal.*

Demonstração. Pelo que já vimos, S_t^* é um P^*-martingal local positivo. Logo, se mostrarmos que, na verdade,

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_t^*] = \mathbb{E}_{P^*}[s_0],$$

então teremos que S_t^* será um P^*-martingal. Usando as conclusão da seção anterior e notando que, no nosso caso, $\rho_t = 0$,

$$\ln S_t^* \mid \mathcal{G} \sim \mathcal{N}\left(\ln s_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds, \int_0^t \sigma_s^2 ds\right).$$

Sabendo que a média de uma variável aleatória log-normal com média μ e variância σ^2 é $e^{\mu+\sigma^2/2}$, concluimos que

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_t^* \mid \mathcal{G}] = s_0.$$

Então, claramente, temos o desejado. □

Proposição 4.14. *O preço, em um instante t, de qualquer derivativo europeu com maturidade $T > 0$ e com payoff $g(S_T)$ é dado por*

$$B_t \mathbb{E}_{P^*}[B_T^{-1} g(S_T)] = \int_0^{+\infty} C_t^{BS}(S_0, \overline{r}, g, T, \omega) dF_{A_T}(\omega),$$

onde $A_T = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \sigma_t^2 dt$.

Demonstração. Usando a notação da Seção 4.1.6, temos que $\rho_t = 0$, $Z_T = 0$ e $\overline{\sigma_\rho^2} = A_T$ e, portanto,

$$B_t \mathbb{E}_{P^*}[B_T^{-1} g(S_T)] = \mathbb{E}_{P^*}[C_t^{BS}(S_0, \overline{r}, g, T, A_T)].$$

Já que a única fonte aleatória $C_t^{BS}(S_0, \overline{r}, g, T, A_T)$ é a volatilidade integrada A_T, a conclusão da proposição segue. □

4.2.1 A Volatilidade Implícita no modelo de Hull-White

Aqui, as referências são [46] e [48].

Proposição 4.15. *Considere o log-strike $\kappa = \ln(S_t B_T / K B_t)$ e vamos olhar agora a volatilidade implícita como função de κ, e não de K. Então $\hat{\sigma}_t(\kappa, T)$ é uma função par em κ, isto é,*

$$\hat{\sigma}_t(\kappa, T) = \hat{\sigma}_t(-\kappa, T) \quad \forall\ \kappa \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Vamos denotar o preço de uma call com log-strike κ e maturidade T no modelo de Black-Scholes com volatilidade ν por $C_t^{BS}(S, \kappa, T, \nu)$. Então

$$C_t^{BS}(S, -\kappa, T, \nu) = S(\Phi(d_+(-\kappa)) - e^\kappa \Phi(d_-(-\kappa))) = S(e^\kappa C_t^{BS}(S, \kappa, T, \nu) + 1 - e^\kappa),$$

onde $d_\pm(\kappa) = \kappa/\nu\sqrt{T-t} \pm \nu\sqrt{T-t}/2$. Então, pela Proposição 4.14, se denotarmos o preço do mesmo contrato descrito acima no modelo de Hull-White por $C_t^{HW}(S, \kappa, T)$, pela linearidade de $\mathbb{E}_{P^*}$, a fórmula acima também vale para C^{HW}, ou seja,

$$C_t^{HW}(S, -\kappa, T) = S(e^\kappa C_t^{HW}(S, \kappa, T, \nu) + 1 - e^\kappa).$$

Agora, já que $\hat{\sigma}_t(\pm\kappa, T)$ satisfaz a equação $C_t^{HW}(S, \pm\kappa, T) = C_t^{BS}(S, \pm\kappa, T, \hat{\sigma}_t(\pm\kappa, T))$, concluimos que

$$\begin{aligned} S(e^\kappa C_t^{BS}(S, -\kappa, T, \hat{\sigma}_t(-\kappa, T)) + 1 - e^\kappa) &= C_t^{BS}(S, -\kappa, T, \hat{\sigma}_t(-\kappa, T)) = \\ &= C_t^{HW}(S, -\kappa, T) = S(e^\kappa C_t^{HW}(S, \kappa, T, \nu) + 1 - e^\kappa). \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_t^{BS}(S, -\kappa, T, \hat{\sigma}_t(-\kappa, T)) = C_t^{HW}(S, \kappa, T, \nu).$

$\Rightarrow \hat{\sigma}_t(\kappa, T) = \hat{\sigma}_t(-\kappa, T).$ □

Proposição 4.16. *A curva de volatilidade implícita $\hat{\sigma}_t(T,K)$ para t e T fixos é localmente convexa em torno do valor $K_{min} = S_t B_T/B_t$.*

Demonstração. Para facilitar a notação, vamos considerar a variável $\tau = T - t$ e escrever $\hat{\sigma}_t(T,K) = \hat{\sigma}(\tau,K)$. Primeiramente, iremos mostrar, por indução, que essa proposição vale no caso em que A_T assume somente um número finito de possíveis estados. O resultado geral seguirá disso, usando-se um argumento de convergência. Agora, como primeiro passo da indução, considere o caso mais simples, em que A_T só pode assumir dois estados. Vale notar que tudo o que está sendo dito sobre a variável A_T se refere a ela sob a probabilidade neutra ao risco, P^*. Então, no momento, estamos supondo que existem $0 < \nu_1 < \nu_2$ e E_1 e E_2 em $\mathcal{G}_T$ tais que

$$A_T = \nu_1 \chi_{E_1} + \nu_2 \chi_{E_2},$$

onde $P^*(E_1) = \alpha$ e $P^*(E_2) = 1 - \alpha$. Logo, pela Proposição 4.14,

$$C^{BS}(K, \hat{\sigma}(\tau,K)) = \alpha C^{BS}(K,\nu_1) + (1-\alpha) C^{BS}(K,\nu_2).$$

Já que τ está fixo, vamos denotar $\hat{\sigma}(\tau,K)$ por $\hat{\sigma}(\alpha,K)$. Derivando em relação a K, temos

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(K,\hat{\sigma}(\alpha,K))\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial K}(\alpha,K) + \frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(K,\hat{\sigma}(\alpha,K)) = \alpha \frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(K,\nu_1) + (1-\alpha)\frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(K,\nu_2).$$

Nosso objetivo é estudar o sinal da derivada de $\hat{\sigma}$ em relação a K e, portanto, é interessante definir a seguinte função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(\alpha) = \alpha \frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(K,\nu_1) + (1-\alpha)\frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(K,\nu_2) - \frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(K,\hat{\sigma}(\alpha,K)),$$

pois, já que $\partial C^{BS}/\partial K > 0$, temos que

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial K}(\alpha,K)\right) = \operatorname{sign}(f(\alpha)).$$

Agora, como f é contínua em um compacto, sabemos que atinge máximo e mínimo em seu intervalo de definição, mas note que, pela bijetividade da fórmula de Black-Scholes com relação à volatilidade, $\hat{\sigma}(0,K) = \nu_2$ e $\hat{\sigma}(1,K) = \nu_1$ que implica $f(0) = f(1) = 0$. Então, se mostramos que

$$\begin{cases} K < K_{min} \Rightarrow f''(\alpha) > 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1), \\ K = K_{min} \Rightarrow f''(\alpha) = 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1), \\ K > K_{min} \Rightarrow f''(\alpha) < 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1), \end{cases} \tag{4.3}$$

poderemos concluir a proposição nesse caso, já que

$$\begin{cases} f''(\alpha) < 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1) \Rightarrow f(\alpha) > 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1), \\ f''(\alpha) = 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1) \Rightarrow f(\alpha) = 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1), \\ f''(\alpha) > 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1) \Rightarrow f(\alpha) < 0\ , & \forall\ \alpha \in (0,1). \end{cases}$$

Para mostramos que isso realmente vale, vamos supor que estamos no caso em que $f''(\alpha) > 0, \forall\ \alpha \in (0,1)$. Então, pelo teste da segunda derivada, f só poderia atingir o seu valor mínimo no interior do seu domínio. Logo, como f na fronteira vale 0, se existisse $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que $f(\alpha_0) > 0$, então f atingiria seu valor máximo no interior, o que, como acabamos de ver, é um absurdo. Os outros caso seguem de forma análoga.

Portanto vamos determinar a segunda derivada de f:

$$f''(\alpha) = -\frac{\partial^3 C^{BS}}{\partial K \partial \sigma^2}(K,\hat{\sigma}(\alpha,K))\left(\frac{\hat{\sigma}}{\alpha}\right)^2 - \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial K \partial \sigma}(K,\hat{\sigma}(\alpha,K))\frac{\partial^2 \hat{\sigma}}{\partial \alpha^2}.$$

Então, calculando de modo direto as derivadas da fórmula de Black-Scholes que são necessárias acima e a segunda derivada da volatilidade implícita em relação a α, temos a seguinte fórmula

$$f''(\alpha) = 2(C^{BS}(K,\nu_1) - C^{BS}(K,\nu_2))\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\alpha}(\alpha,K)\frac{\ln(K_{min}/K)}{K\tau\hat{\sigma}^3(\alpha,K)}.$$

Note que K, τ e $\hat{\sigma}$ são estritamente positivos e que

$$\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\alpha}(\alpha,K) = \frac{C^{BS}(K,\nu_1) - C^{BS}(K,\nu_2)}{\dfrac{\partial C^{BS}}{\partial\sigma}(K,\hat{\sigma}(\alpha,K))}.$$

Então

$$\text{sign}\left(C^{BS}(K,\nu_1) - C^{BS}(K,\nu_2)\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\alpha}(\alpha,K)\right).$$

Logo,

$$\text{sign}(f''(\alpha)) = \text{sign}\left(\ln\left(\frac{K_{min}}{K}\right)\right);$$

de onde seguem as implicações (4.3).

Considere agora que A_T possa assumir $n+1$ valores distintos $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n < \nu_{n+1}$ com probabilidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, onde $\alpha_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. Suponha, por indução, que a proposição seja válida caso A_T só assuma $k \leq n$ valores distintos. Defina $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e

$$f(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(K,\nu_i) - \frac{\partial C^{BS}}{\partial K}(\hat{\sigma}(\tilde{\sigma},K)).$$

Pela Proposição 4.14, temos a fórmula

$$C^{BS}(K,\hat{\sigma}(\tilde{\sigma},K)) = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i C^{BS}(K,\nu_i).$$

A idéia agora é repetir os mesmos passos do caso $n=2$ e, por isso, vamos derivar a equação acima em relação α_j e α_k, $j,k \in \{1,\ldots,n\}$. Então, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}(\tilde{\alpha}) = 2(C^{BS}(K,\nu_j) - C^{BS}(K,\nu_{n+1}))\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\alpha_k}(\tilde{\alpha},K)\frac{\ln(K_{min}/K)}{K\tau\hat{\sigma}^3(\tilde{\alpha},K)}.$$

Note que o domínio de f é o conjunto

$$D = \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\ ;\ 0 \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \leq 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0\ \ \forall\ i = 1,\ldots,n\right\},$$

cuja fronteira é

$$\partial D = \left(\bigcup_{k=1}^{n+1}\{\alpha_{j_1} = \ldots = \alpha_{j_k} = 0,\ \text{com } j_1,\ldots,j_k \text{ distintos em } \{1,\ldots,n+1\}\}\right)$$

e o interior é

$$D^\circ = \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\ ;\sum_{i=1}^{n}\alpha_i < 1 \text{ e } \alpha_i > 0\ \ \forall\ i = 1,\ldots,n\right\}.$$

Logo, analisando os sinais das segundas derivadas

$$\begin{cases} K < K_{min} \Rightarrow f''(\tilde{\alpha}) > 0 \ , & \forall\ \tilde{\alpha} \in D^\circ, \\ K = K_{min} \Rightarrow f''(\tilde{\alpha}) = 0 \ , & \forall\ \tilde{\alpha} \in D^\circ, \\ K > K_{min} \Rightarrow f''(\tilde{\alpha}) < 0 \ , & \forall\ \tilde{\alpha} \in D^\circ. \end{cases}$$

Note ainda que, em ∂D, A_T só assume $k \leq n$ estados e, logo, pela hipótese de indução, para $\tilde{\alpha} \in \partial D$

$$\begin{cases} K < K_{min} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) < 0, \\ K = K_{min} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) = 0, \\ K > K_{min} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) > 0. \end{cases}$$

Vamos supor que estamos no caso $K < K_{min}$, já que os outros funcionam de forma análoga. Pelo teste da segunda derivada, f não pode atingir o seu valor máximo no interior de D e, logo, o máximo está na fronteira (lembre-se de que f é contínua e D é compacto). Como, nesse caso, f é negativa em ∂D, concluimos que f é negativa em todo o seu domínio, como queríamos demonstrar. Portanto

$$\begin{cases} K < K_{min} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) < 0 \ , & \tilde{\alpha} \in D, \\ K = K_{min} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) = 0 \ , & \tilde{\alpha} \in D, \\ K > K_{min} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) > 0 \ , & \tilde{\alpha} \in D. \end{cases}$$

Então, para concluirmos a demonstração, vamos supor que A_T seja uma variável aleatória $\mathcal{G}_T$-mensurável. Então existe uma seqüência de variáveis aleatórias positivas e que só podem assumir um número finito de valores, $(A_T^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tais que,

$$A_T^n \nearrow A_T \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Usando a continuidade e a monotonicidade na volatilidade da fórmula de Black-Scholes e o Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\mathbb{E}_{P^*}[C^{BS}(K, A_T^n)] \nearrow \mathbb{E}_{P^*}[C^{BS}(K, A_T)] \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Denotando a volatilidade implícita para o preço $\mathbb{E}_{P^*}[C^{BS}(K, A_T)]$ por $\hat{\sigma}(K, A_T)$, temos que

$$C^{BS}(K, \hat{\sigma}(K, A_T^n)) \nearrow C^{BS}(K, \hat{\sigma}(K, A_T)) \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Então, pela bijetividade na volatilidade da fórmula de Black-Scholes,

$$\hat{\sigma}(K, A_T^n) \nearrow \hat{\sigma}(K, A_T) \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Agora, como cada $\hat{\sigma}(K, A_T^n)$ é localmente convexa em torno de K_{min}, concluimos a demonstração. □

4.3 O Modelo de Heston

Definição 4.17. O modelo de Heston supõe a seguinte dinâmica para o ativo S, sob P,

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t, \\ d\nu_t = \widehat{\kappa}(\widehat{\overline{\nu}} - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t} d\widehat{W}_t, \\ S_0 = s_0 \ e \ \nu_0 = v_0, \end{cases}$$

onde $\{W, \mathcal{F}\}$ $\{\widehat{W}, \mathcal{G}\}$ são dois movimentos brownianos em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ com $d[W, \widehat{W}]_t = \rho dt$, ρ constante em $[-1, 1]$. Supõe-se ainda que o preço de mercado do risco da volatilidade é da forma $\lambda\sqrt{\nu}$, onde λ é uma constante. Portanto, na medida P^*,

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^* & , \\ d\nu_t = \kappa(\overline{\nu} - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t} d\widetilde{W}_t & , \\ S_0 = s_0 \ e \ \nu_0 = v_0, \end{cases}$$

onde $\kappa = \kappa^* - \xi\lambda$ e $\overline{\nu} = \overline{\nu}^*\kappa^*/\kappa$. Todos os parâmetros do processo de volatilidade são positivos. Vale notar ainda que, diferentemente dos modelos considerados anteriormente, temos aqui uma EDE para a variância, e não para a volatilidade.

Definição 4.18 (O Processo de Ornstein-Uhlenbeck)**.** Diremos que $(Y_t)_{t\geq 0}$ é um processo de Ornstein-Uhlenbeck (ou, simplismente, OU) se ele é solução da EDE

$$dY_t = -\kappa(Y_t - m)dt + \beta dW_t,$$

onde $\kappa > 0$, $m, \beta \in \mathbb{R}$ e W é um movimento browniano. Aplicando a fórmula de Itô a $e^{\kappa t}Y_t$, temos a seguinte fórmula para Y_t

$$Y_t = e^{-\kappa t}Y_0 + m(1 - e^{-\kappa t}) + \int_0^t \beta e^{-\kappa(s-t)}dW_s.$$

Logo, $Y_t|Y_0$ tem distribuição normal com média e variância dadas por

$$E[Y_t \mid Y_0] = m + e^{-\kappa t}(Y_0 - m),$$

$$\mathrm{Var}(Y_t \mid Y_0) = \int_0^t \beta^2 e^{2\kappa(s-t)}ds = \frac{\beta^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}).$$

Observação 4.19. No artigo original de Heston [23], primeiramente, considerou-se que a volatilidade $(\sqrt{\nu})$ seguia um processo OU da forma

$$d\sqrt{\nu_t} = -\beta\sqrt{\nu_t} + \delta dW_t$$

Então, aplicando o Lema de Itô, Proposição 1.63,

$$d\nu_t = \kappa(\overline{\nu} - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dW_t,$$

onde $\kappa = 2\beta$, $\overline{\nu} = \delta^2/2\beta$ e $\xi = 2\delta$. Note que, apesar de ν_t seguir a mesma dinâmica que a descrita na definição acima, nesse caso só temos dois graus de liberdade, enquanto que no outro temos três. Esse é o motivo pelo qual escolhemos aquela definição para o modelo de Heston.

4.3.1 O Processo de Volatilidade - Modelo CIR

O modelo de Heston supõe que a variância do ativo segue a seguinte dinâmcia sob P^*,

$$d\nu_t = \kappa(\overline{\nu} - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t.$$

Essa EDE é também usada para descrever o comportamento da taxa de juros no modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), ver [12]. Vamos analisar agora algumas características dessa EDE.

Solução da EDE

Vale notar que nós não podemos usar o Teorema usual de existência e unicidade (ver Introdução, Teorema 1.83) no caso acima, pois a função $\sqrt{x}$ não é globalmente Lipschitz contínua. Mas mesmo assim é possível garantir a existência e unicidade de uma solução forte para a EDE acima. Para maiores detalhes, veja o primeiro apêndice do artigo [1].

Densidade de Transição

Sejam $t > s > 0$. Então a densidade de transição de (s, ν_s) para (t, ν_t) é

$$f(t, \nu_t, s, \nu_s) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q\left(2\sqrt{uv}\right),$$

onde

$$c = \frac{2\kappa}{\xi^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}, \quad u = c\nu_s e^{-\kappa(t-s)}, \quad v = c\nu_t, \quad q = \frac{2\kappa\overline{\nu}}{\xi^2} - 1,$$

e I_q é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem q, cuja definição é

$$I_q(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k!\Gamma(q + k + 1)},$$

com Γ sendo a função Gamma e z um número complexo qualquer. Note que a densidade acima é sob a medida P^*.

Média e Variância

Usando a densidade de transição acima, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P^*}[\nu_t \mid \nu_s] &= \overline{\nu} + e^{-\kappa(t-s)}(\nu_s - \overline{\nu}), \\
\mathrm{Var}_{P^*}(\nu_t \mid \nu_s) &= \nu_s \frac{\xi^2}{\kappa}\left(e^{-\kappa(t-s)} - e^{-2\kappa(t-s)}\right) + \overline{\nu}\frac{\xi^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Classificação de Fronteira

Queremos agora saber qual é o comportamento do processo ν_t, que toma valores em $[0, +\infty)$, na fronteira do seu domínio: 0 e $+\infty$. Seguindo [3], temos que

(i) 0 é atingível, se $2\kappa\overline{\nu} < \xi^2$.

(ii) $+\infty$ não é atingível.

Para a demonstração desses fatos é usado o critério para a classificação de fronteira de Feller, veja [28].

O item (ii) pode ser entendido da mesma maneira que a Definição 4.3 da Introdução desse capítulo. Mais especificamente, defina

$$\tau_n = \inf\{t > 0 \ ; \ \nu_t \geq n\} \quad \text{e} \quad \tau = \sup_{n \geq 1} \tau_n.$$

Então, (ii) implica que, para todo $T > 0$, $P^*(\tau < T) = 0$, como já tinhamos visto na demonstração do Teorema 4.4 da Introdução.

Momentos do Processo S^*

Como exposto em [3], os momentos do processo S^* podem ser escritos em termos de momentos exponenciais do processo de volatilidade. Antes de enunciarmos a proposição que faz essa afirmação mais precisa, lembre-se que, sob P^*,

$$\begin{cases}
dS_t^* = \sigma_t S_t^* dW_t^*, \\
d\nu_t = \kappa(\overline{\nu} - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t, \\
S_0^* = s_0 \ e \ \nu_0 = \sigma_0.
\end{cases}$$

Proposição 4.20. *Para todo $k \geq 0$,*

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\right] = s_0^k \mathbb{E}_{P_k^*}\left[e^{\gamma \int_0^T \nu_t dt}\right],$$

onde $\gamma = k(k-1)/2$ e P_k^* é uma medida de probabilidade para a qual o processo ν_t tem a seguinte dinâmica

$$d\nu_t = (\kappa(\overline{\nu} - \nu_t) + \rho\xi k\nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t^k,$$

com $\widetilde{W}_t^k$ um P_k^*-movimento browniano.

Demonstração. Fixe $k \geq 0$. Pelo lema de Itô,

$$dS_t^{*^k} = kS_t^{*^k}\sqrt{\nu_t}dW_t^* + \frac{1}{2}k(k-1)S_t^{*^k}\nu_t dt.$$

Considere agora um movimento browniano $\overline{W}$ independente de $\widetilde{W}$ e tal que

$$dW_t^* = \rho d\widetilde{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}d\overline{W}_t.$$

Então

$$S_t^{*^k} = s_0^k \exp\left\{\rho k\int_0^T \sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}k\int_0^T \sqrt{\nu_t}d\overline{W}_t - \frac{1}{2}k\int_0^T \nu_t dt\right\}.$$

Condicionando com respeito à σ-álgebra gerada por $\widetilde{W}$ de 0 a T, e usando argumentos análogos ao da Seção 4.1.6, concluimos que

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\chi_{\{\tau_n>T\}}\right] = s_0^k\mathbb{E}_{P^*}\left[\chi_{\{\tau_n>T\}}\exp\left\{\rho k\int_0^T \sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}k\int_0^T \nu_t dt + \frac{1}{2}(1-\rho^2)k^2\int_0^T \nu_t dt\right\}\right].$$

Definindo

$$Z_T = \exp\left\{\rho k\int_0^T \sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\rho^2k^2\int_0^T \nu_t dt\right\},$$

e rearranjando os termos, temos que

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\chi_{\{\tau_n>T\}}\right] = s_0^k\mathbb{E}_{P^*}\left[\chi_{\{\tau_n>T\}}Z_T\exp\left\{\gamma\int_0^T \nu_t dt\right\}\right].$$

Seja

$$Z_T^n = Z_{T\wedge\tau_n},$$

que é um P^*-martingal, já que Z_t^n é um P^*-martingal local limitado. Temos ainda que $Z_T = Z_T^n$ em $\{\tau_n > T\}$. Logo

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\chi_{\{\tau_n>T\}}\right] = s_0^k\mathbb{E}_{P^*}\left[\chi_{\{\tau_n>T\}}Z_T^n\exp\left\{\gamma\int_0^T \nu_t dt\right\}\right].$$

Considere a medida $P_k^{*^n}$ definida através da derivada de Radon-Nikodým

$$\frac{dP_k^{*^n}}{dP^*} = Z_T^n.$$

Então

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\chi_{\{\tau_n>T\}}\right] = s_0^k\mathbb{E}_{P_k^{*^n}}\left[\chi_{\{\tau_n>T\}}\exp\left\{\gamma\int_0^T\nu_t dt\right\}\right].$$

Aplicando o Teorema de Girsanov 1.76, concluimos que

$$\widetilde{W}_t^k = \widetilde{W}_t - \int_0^t \chi_{\{u\leq\tau_n\}}\rho k\sqrt{\nu_u}du$$

é um movimento browniano sob $P_k^{*^n}$. Logo, sob essa mesma probabilidade,

$$d\nu_t = (\kappa(\overline{\nu}-\nu_t) + \chi_{\{u\leq\tau_n\}}\rho\xi k\nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t^k.$$

Agora note que ν_t segue o mesmo processo sob $P_k^{*^n}$ e P_k^* até o tempo de explosão τ. Portanto

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\chi_{\{\tau_n>T\}}\right] = s_0^k\mathbb{E}_{P_k^*}\left[\chi_{\{\tau_n>T\}}\exp\left\{\gamma\int_0^T\nu_t dt\right\}\right].$$

Usando o Teorema da Convergência Monótona, como feito na demonstração do Teorema 4.4 da Introdução, e usando o fato de que ν_t não explode sob P^*, temos que

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\right] = \mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\chi_{\{\tau>T\}}\right] = s_0^k\mathbb{E}_{P_k^*}\left[\chi_{\{\tau>T\}}\exp\left\{\gamma\int_0^T\nu_t dt\right\}\right].$$

Pode-se usar novamente o critério de Feller para mostar que ν_t não explode em tempo finito sob P_k^*, isto é, que $\{\tau>T\}$ ocorre P_k^*-quase certamente, para todo $T>0$. Portanto, temos, finalmente, o desejado:

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[S_T^{*^k}\right] = s_0^k\mathbb{E}_{P_k^*}\left[\exp\left\{\gamma\int_0^T\nu_t dt\right\}\right].$$

□

Como uma aplicação da proposição anterior temos o seguinte resultado.

Teorema 4.21. *S^* é um P^*-martingal.*

Demonstração. Já sabemos que S^* é um P^*-martingal local positivo. Aplicando o lema anterior com $k=1$, temos que $\gamma=0$ e, logo,

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^*] = s_0\mathbb{E}_{P_1^*}\left[\exp\left\{0\int_0^T\nu_t dt\right\}\right] = s_0 = S_0^*.$$

Portanto, S^* é, na verdade, um P^*-martingal. □

4.3.2 Apreçamento no Modelo de Heston

Proposição 4.22. *O preço de arbitragem de um derivativo europeu V sobre S, com maturidade T e payoff $g(S_T,\nu_T)$, satisfaz a EDP*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,S,v) + \mathcal{D}V(t,S,v) = rV(t,S,v), \\ \\ V(T,S,v) = g(S,v), \end{cases}$$

onde $\mathcal{D}$ é dado por

$$\mathcal{D}V(t,S,v) = rS\frac{\partial V}{\partial S}(t,S,v) + (\kappa(\overline{\nu}-v) - \xi\lambda v)\frac{\partial V}{\partial v}(t,S,v) + \frac{1}{2}S^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S,v) + \\ + \frac{1}{2}\xi^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(t,S,v) + \rho\xi S v\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v}(t,S,v).$$

Observação 4.23. Vale notar que a notação sofreu uma ligeira modificação nessa parte do capítulo. A letra v denota agora o quadrado da volatilidade (a variância) e não mais a volatilidade.

Demonstração. Segue imediatamente da derivação da EDP para o apreçamento de derivativos europeus feita no início do capítulo, mas com as devidas mudanças que o caso específico do modelo Heston necessita. □

Lema 4.24. *Defina $C(t,x,v) = V(t,e^x,v)$. Então C satisfaz a seguinte equação*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}(t,x,v) + \mathcal{D}C(t,x,v) = rC(t,x,v), \\ \\ C(T,x,v) = g(x,v), \end{cases}$$

onde $\mathcal{D}$ é dado por

$$\mathcal{D}C(t,x,v) = \left(r - \frac{v}{2}\right)\frac{\partial C}{\partial x}(t,x,v) + (\kappa(\overline{\nu}-v) - \xi\lambda v)\frac{\partial C}{\partial v}(t,x,v) + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x,v) + \\ + \frac{1}{2}\xi^2 v\frac{\partial^2 C}{\partial v^2}(t,x,v) + \rho\xi v\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial v}(t,x,v).$$

Demonstração. Basta aplicar a regra da cadeia diversas vezes. □

Proposição 4.25. *Considere agora uma call com maturidade T e preço de exercício K. Vamos propor, por similaridade ao modelo de Black-Scholes, que*

$$C(t,x,v) = e^x P_1(t,x,v) - e^{-r(T-t)}KP_0(t,x,v).$$

Então, $P_j(t,x,v)$, $j = 0,1$, satisfaz a seguinte EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_j}{\partial t}(t,x,v) + \mathcal{D}_j P_j(t,x,v) = 0, \\ \\ P_j(T,x,v) = \chi_{\{x\geq \ln K\}}, \end{cases} \tag{4.4}$$

onde

$$\mathcal{D}_j C(t,x,v) = \left(r - \left(j-\frac{1}{2}\right)v\right)\frac{\partial P_j}{\partial x}(t,x,v) + (\kappa\overline{\nu} - (\kappa - j\xi\lambda)v)\frac{\partial P_j}{\partial v}(t,x,v) + \\ + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}(t,x,v) + +\frac{1}{2}\xi^2 v\frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2}(t,x,v) + \rho\xi v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x\partial v}(t,x,v).$$

Demonstração. Novamente, a demonstração é um exaustivo exercício de cálculo de derivadas parciais. □

Observação 4.26. Considere o seguinte sistema de EDE

$$\begin{cases} dx_t^j = \left(r_t + \left(j-\frac{1}{2}\right)\nu_t^j\right)dt + \sqrt{\nu_t}dW_t^*, \\ d\nu_t^j = (\kappa\overline{\nu} - (\kappa + \xi\lambda - j\rho\xi)\nu_t^j)dt + \xi\sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t. \end{cases}$$

Defina agora

$$f_j(t, x_t^j, \nu_t^j) = \mathbb{E}_{P^*}[\chi_{\{x_T^j \geq \ln K\}} \mid \mathbb{F}_t^j],$$

onde $\mathbb{F}_t^j$ é a σ-álgebra gerada por (x_s^j, ν_s^j) até o instante t. Então pelo o que foi visto na Observação 4.6 da Introdução desse capítulo, f_j satisfaz a mesma EDP que P_j, e, portanto, pela unicidade de soluções,

$$P_j(t, x_t^j, \nu_t^j) = P^*(x_T^j \geq \ln K \mid \mathbb{F}_t^j).$$

Note ainda que, sob P^*, $x_t^0 = \ln S_t = X_t$ e $\nu_t^0 = \nu_t$. Portanto, explicitando a dependência em K

$$P_0(t, X_t, \nu_t; K) = P^*(X_t \geq \ln K \mid \mathbb{F}_t).$$

Teorema 4.27. *A solução da EDP (4.4) é dada por*

$$P_j(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Re\left(\frac{K^{-iz} e^{A(t,z)+B(t,z)v+izx}}{iz} \right) dz,$$

onde, suprimindo a dependência em j,

$$A(t, z) = a\left(r_+(T-t) - \frac{2}{\xi^2} \ln\left(\frac{1 - ge^{d(T-t)}}{1-g} \right) \right)$$

$$B(t, z) = r_+ \left(\frac{1 - e^{d(T-t)}}{1 - ge^{d(T-t)}} \right)$$

$$g = \frac{r_+}{r_-} \ , \quad r_\pm = \frac{\beta \pm d}{\xi^2} \ , \quad \alpha = -\frac{z^2}{2} + \frac{(-1)^{j+1}}{2} iz$$

$$\beta = -\xi\lambda + j\rho\xi + \rho\xi iz \ , \quad a = \xi\lambda\overline{\nu} \ , \quad d = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\xi^2}.$$

Demonstração. Para encontramos a solução de (4.4), vamos primeiro considerar a transformada de Fourier de P_j

$$\widehat{P}_j(t, z, v) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} P_j(t, x, v) dx.$$

Note que a integral acima esta bem definida, já que P_j é uma probabilidade. Então, usando as constantes definidas na tese do teorema, vale a seguinte equação

$$\frac{\partial \widehat{P}_j}{\partial t} + a\frac{\partial \widehat{P}_j}{\partial v} + v\left(\alpha \widehat{P}_j + \beta \frac{\partial \widehat{P}_j}{\partial v} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 \widehat{P}_j}{\partial v^2} \right) = 0,$$

com a condição final

$$\widehat{P}_j(T, z, v) = \int_{\ln K}^{+\infty} e^{-izx} dx = \int_0^{+\infty} e^{-iz(x+\ln K)} dx = K^{-iz}\left(\frac{1}{iz} + \pi\delta(z) \right),$$

onde δ é o delta de Dirac na origem. Para explorar as particularidades da EDP em questão, vamos propor uma solução da forma

$$\widehat{P}_j(t, z, v) = \widehat{P}_j(T, z, v) e^{A(t,z)+B(t,z)v}$$

com $A(0, z) = B(0, z) = 0$. Então

$$\frac{\partial \widehat{P}_j}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v\frac{\partial B}{\partial t} \right) \widehat{P}_j$$

$$\frac{\partial \widehat{P}_j}{\partial v} = B(t,z)\widehat{P}_j \ , \quad \frac{\partial^2 \widehat{P}_j}{\partial v^2} = B^2(t,z)\widehat{P}_j$$

e, logo,

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,z) + v\frac{\partial B}{\partial t}(t,z) = -v\left(\alpha - \beta B(t,z) + \frac{\xi^2}{2}B^2(t,z)\right) - aB(t,z).$$

Portanto para determinar A e B, basta resolver as seguintes EDO's

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial t}(t,z) = -aB(t,z),\\
&\frac{\partial B}{\partial t}(t,z) = -\frac{\xi^2}{2}(B(t,z)-r_+)(B(t,z)-r_-),
\end{aligned}$$

com as condições iniciais $A(0,z) = B(0,z) = 0$. Resolver esse sistema é um simples exercício. Considere agora $h_j(t,z,v) = e^{A(t,z)+B(t,z)v}$. Aplicando a transformada inversa de Fourier a $\widehat{P}_j$,

$$\begin{aligned}
P_j(t,x,v) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{izx}\widehat{P}_j(t,z,v)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{izx}h_j(t,z,v)\widehat{P}_j(T,z,v)dz = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{izx}h_j(t,z,v)K^{-iz}\left(\frac{1}{iz} + \pi\delta(z)\right)dz = \frac{1}{2}h_j(t,0,v) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{izx}h_j(t,z,v)K^{-iz}}{iz}dz.
\end{aligned}$$

Uma simples conta nos diz que $A(t,0) = B(t,0) = 0$, que implica

$$P_j(t,x,v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{izx}h_j(t,z,v)K^{-iz}}{iz}dz.$$

Já que P_j é uma probabilidade, temos que o lado direito da equação acima é, na verdade, um número real. Então

$$P_j(t,x,v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} Re\left(\frac{e^{izx}h_j(t,z,v)K^{-iz}}{iz}\right)dz.$$

Agora, por similaridade ao problema resolvido acima, seja $\psi(z) = e^{izx}h_j(t,z,v)$. Então $\psi(z)$ é a transformada de Fourier da solução da mesma EDP que P_j satisfaz, mas com condição final sendo a transformada inversa de Fourier de e^{izx}, que é

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{izy}e^{izx}dz = \delta(x+y)$$

Portanto, $\psi(z)$ deve satisfazer

$$Re(\psi(-z)) = Re(\psi(z)) \ , \quad Im(\psi(-z)) = -Im(\psi(z)).$$

Logo

$$\begin{aligned}
Re\left(\frac{K^{-iz}\psi(z)}{iz}\right) &= Re\left(\frac{1}{iz}(Re(\psi(z)) + iIm(\psi(z)))(\cos(z\ln K) - i\sin(z\ln K))\right) = \\
&= \frac{1}{z}(-Re(\psi(z))\sin(z\ln K) + Im(\psi(z))\cos(z\ln K)).
\end{aligned}$$

Então, considerando a paridade das funções acima, concluimos que

$$Re\left(\frac{e^{izx}h_j(t,z,v)K^{-iz}}{iz}\right)$$

é par e, portanto, a conclusão do teorema segue. □

Observação 4.28. Defina $\tilde{g} = 1/g = r_-/r_+$. Se substituirmos g por $\tilde{g}$ nas funções $A(t,z)$ e $B(t,z)$, teremos que

$$A(t,z) = a\left(r_-(T-t) - \frac{2}{\xi^2}\ln\left(\frac{1-\tilde{g}e^{-d(T-t)}}{1-\tilde{g}}\right)\right),$$
$$B(t,z) = r_-\left(\frac{1-e^{-d(T-t)}}{1-\tilde{g}e^{-d(T-t)}}\right).$$

À primeira vista pode parecer que a escolha entre as formas de escrever as funções acima não importa, mas, como foi demonstrado no artigo [2], enquanto a forma para as funções A e B descritas no teorema, para quase qualquer escolha de parâmetros, geram apreçamentos computacionalmente instáveis para maturidades suficientemente grandes, a forma acima é sempre estável. Portanto, no que segue, sempre que nos referirmos à fórmula para apreçamento do modelo de Heston, estaremos considerando as formas acima.

Proposição 4.29 (Densidade de Probabilidade do log-Preço)**.** *Seja f_t a densidade $X_T = \ln S_T$ condicionada a $\mathbb{F}_t$. Então*

$$f_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{A(t,z)+B(t,z)v-iz(x-X_t)}dz.$$

Demonstração. Pelo que já vimos,

$$P^*(X_t \geq x \mid \mathbb{F}_t) = P_0(t, X_t, \nu_t; x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left(\frac{e^{A(t,z)+B(t,z)v-iz(x-X_t)}}{iz}\right)dz,$$

onde, implicitamente, estamos tomando $j = 0$ na funções A e B. Então, derivando em relação a x,

$$f_t(x) = -\frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t, \nu_t; x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{A(t,z)+B(t,z)v-iz(x-X_t)}}{iz}\right)dz =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re(e^{A(t,z)+B(t,z)v-iz(x-X_t)})dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{A(t,z)+B(t,z)v-iz(x-X_t)}dz,$$

onde a última igualdade segue da paridade da função que esta sendo integrada. □

Proposição 4.30 (Função Característica do log-Preço)**.** *A função característica condicional de X_T é dada pela fórmula*

$$\phi_t(z) = \mathbb{E}_{P^*}\left[e^{izX_T} \mid \mathbb{F}_t\right] = e^{A(t,z)+B(t,z)v}.$$

Demonstração. Defina $\zeta = x - X_t$ e $\tilde{f}_t(\zeta) = f_t(x)$. Então, uma simples mudança de variáveis nos dá

$$\phi_t(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(\zeta+X_t)}\tilde{f}_t(\zeta)d\zeta = e^{izX_t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\zeta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{A(t,w)+B(t,w)v-iw\zeta}dwd\zeta =$$
$$= e^{izX_t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{A(t,w)+B(t,w)v}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-w)\zeta}d\zeta\right)dw =$$
$$= e^{izX_t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{A(t,w)+B(t,w)v}\delta(z-w)dw = e^{A(t,z)+B(t,z)v+izX_t}.$$

□

4.3.3 Comportamento Assintótico para a SVI no Modelo de Heston

Como foi demonstrado em [14], $f_t(x)$ tem o seguinte comportamento assintótico

$$f_t(x) \sim e^{-a_+ x} \quad \text{quando } x \to +\infty, \tag{4.5}$$
$$f_t(x) \sim e^{a_- x} \quad \text{quando } x \to -\infty, \tag{4.6}$$

onde a_- e a_+ são constantes positivas. Logo $-\ln f_t(x) \in R_1$ e $-\ln f_t(-x) \in R_1$. Então, estamos a um passo de podermos aplicar os resultados descritos na Seção 2.3.2 do Capítulo 2. Basta mostrarmos que existe ε tal que $\mathbb{E}_{P^*}[e^{(1+\varepsilon)X_T}] < +\infty$ e $\mathbb{E}_{P^*}[e^{-\varepsilon X_T}] < +\infty$. Usando a função característica do modelo de Heston, temos que

$$\mathbb{E}_{P^*}[e^{\theta X_T} \ |\mathbb{F}_t] = \phi_t(-i\theta) = e^{A(t,-i\theta)+B(t,-i\theta)v}.$$

Então, pela definição de A e B, podemos concluir que existe tal ε. Portanto, a volatilidade implícita de Black-Scholes tem o seguinte comportamento assintótico quando $x \to +\infty$

$$\frac{\hat{\sigma}_t^2(T,x)(T-t)}{x} \sim -\frac{x}{-2a_+ x} \Rightarrow \hat{\sigma}_t(T,x) \sim \sqrt{\frac{x}{2a_+(T-t)}}.$$

Analogamente,

$$\hat{\sigma}_t(T,-x) \sim \sqrt{\frac{x}{2a_-(T-t)}}.$$

Observação 4.31. Estudos empíricos mostram que as caudas da distribuição de $X_t = \ln S_t$ são mais "pesadas"que as da distribuição normal, ou seja, decaem mais devagar quando $x \to \pm\infty$. Para referências, veja [19]. Agora, note que () e () nos dizem que, no modelo de Heston, as caudas da distribuição de X_t são realmente mais "pesadas"que a da distribuição normal, fornecendo assim uma possível evidência empírica para o modelo de Heston.

4.3.4 Volatlidade Local no Modelo de Heston

Vamos denotar a volatilidade local desse modelo por σ_L, que é dada pela fórmula

$$\sigma_L^2(T,K) = \mathbb{E}_{P^*}[\nu_T \mid S_T = K].$$

O problema é que, em quase todos os modelos de volatilidade estocástica, a esperança acima é muito difícil de ser calculada. Mas no modelo de Heston, como foi exposto no artigo [15], existe uma fórmula, que não é explícita, mas facilita o cálculo computacional, usando um método de Monte-Carlo, da volatilidade local. O resultado preciso é o seguinte teorema, cuja demonstração, que envolve cálculo de Malliavin, está fora do escopo dessa dissertação.

Teorema 4.32. *Suponha que* $2\kappa\overline{\nu} \geq \xi^2$ *e que* $\rho \neq \pm 1$. *Então*

$$\mathbb{E}_{P^*}[\nu_T \mid S_T = K] = \frac{\mathbb{E}_{P^*}\left[\chi_{\{S_T>K\}}\nu_T \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\nu_t}} d\overline{W}_t\right]}{\mathbb{E}_{P^*}\left[\nu_T \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\nu_t}} d\overline{W}_t\right]}.$$

Para a definição exata do movimento Browniano $\overline{W}$, olhe a Seção 4.1.6.

4.3.5 Apreçamento e Funções Características

Vamos considerar agora um caso geral. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F, que assumiremos contínua, e função característica ϕ. A fórmula de inversão nos diz que, [44],

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\phi(-u)e^{iux} - \phi(u)e^{-iux}}{iu} du.$$

Vamos simplificar a fórmula acima. Note que pelas propriedades da função característica

$$\phi(-u)e^{iux} - \phi(u)e^{-iux} = \overline{\phi(u)}e^{iux} - \phi(u)e^{-iux} = \overline{\phi(u)e^{-iux}} - \phi(u)e^{-iux} = -2iIm(\phi(u)e^{-iux}).$$

Agora se z é um número complexo qualquer, $Imz = Re(z/i)$. Então, vale a seguinte fórmula para F

$$P(X > x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left(\frac{\phi(u)e^{-iux}}{iu}\right) du.$$

Note que a fórmula acima é uma generalização da obtida no modelo Heston. Já vimos na Observação 4.7 da Introdução que

$$C(S_0, T, K) = S_0 \int_{\ln K}^{+\infty} dF(x) - Ke^{-rT}\int_{\ln K}^{+\infty} dF_{X_T}(x),$$

onde

$$F(x) = \frac{1}{S_0}\int_{-\infty}^{x} e^{-rT}e^y dF_{X_T}(y).$$

Logo, se denotarmos as funções características de F_{X_T} e de F por ϕ_T e ϕ, respectivamente, teremos

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) = S_0 &\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left(\frac{\phi(u)e^{-iu\ln K}}{iu}\right) du\right) - \\ &- Ke^{-rT}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left(\frac{\phi_T(u)e^{-iu\ln K}}{iu}\right) du\right). \end{aligned}$$

Agora já que

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}e^{-rT}e^x dF_{X_T}(x) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(u-i)x}dF_{X_T}(x) = e^{-rT}\phi_T(u-i)$$

e $\phi_T(-i) = \mathbb{E}_{P^*}[e^{i(-i)X_T}] = e^{rT}$, temos que

$$\phi(u) = \frac{\phi_T(u-i)}{\phi_T(-i)}.$$

Portanto, dada a função característica condicional do log-preço sob a medida neutra ao risco, podemos calcular o preço de uma call através da fórmula

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) = S_0 &\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left(\frac{\phi_T(u-i)e^{-iu\ln K}}{iu\phi_T(-i)}\right) du\right) - \\ &- Ke^{-rT}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left(\frac{\phi_T(u)e^{-iu\ln K}}{iu}\right) du\right). \end{aligned}$$

4.3.6 A Inversão de Carr-Madan

Peter Carr e Dilip Madan, [10], apontaram que, apesar da fórmula acima parecer ser uma ótima maneira de calcular o preço de uma call quando a função característica do log-preço é conhecida, o fato dos integrandos terem uma singularidade em $u = 0$ faz com que o método FFT(*Fast Fourier Transform*) não possa ser usado para calcular essas integrais. Pelo ótimo desempenho numérico do FFT, é interessante buscar uma outra fórmula para o preço da call. A solução para esse problema, também proposta por Carr e Madan, é a seguinte. Considere uma call sobre S com preço de exercício K e maturidade T. Então

$$C(\overline{K}, T) = \int_{\overline{K}}^{+\infty} e^{-rT}(e^x - e^{\overline{K}})^+ dF_{X_T}(x),$$

onde $\overline{K} = \ln K$. Note que $C(\overline{K}, T)$ converge para S_0 quando $\overline{K} \to -\infty$ e, portanto, $C(\overline{K}, T)$ não é Lebesgue-integrável. Vamos então considerar a seguinte modificação do preço da call

$$\Pi(\overline{K}, T) = \Pi_T(\overline{K}) = e^{\alpha \overline{K}} C(\overline{K}, T),$$

onde $\alpha > 0$ é tal que Π seja integrável. Essa modificação é equivalente a considerar a transformada de Fourier no plano complexo ao invés de na reta real. Mais adiante vamos determinar uma condição sobre esse parâmetro que garanta isso. Podemos então considerar a transformada de Fourier de Π

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\overline{K}} \Pi_T(\overline{K}) d\overline{K}.$$

Antes de prosseguirmos com os cálculos, note que o preço da call pode ser recuperado usando a transformada inversa de Fourier

$$C(\overline{K}, T) = \frac{e^{-\alpha \overline{K}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\overline{K}} \psi_T(u) du.$$

Continuando e aplicando o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\overline{K}} e^{\alpha \overline{K}} \left(\int_{\overline{K}}^{+\infty} e^{-rT}(e^x - e^{\overline{K}}) dF_{X_T}(x) \right) d\overline{K} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} \left(\int_{-\infty}^{x} (e^{x + (-iu+\alpha)\overline{K}} - e^{(1-iu+\alpha)\overline{K}}) d\overline{K} \right) dF_{X_T}(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} \left(\frac{e^{(1-iu+\alpha)x}}{-iu+\alpha} - \frac{e^{(1-iu+\alpha)x}}{1-iu+\alpha} \right) dF_{X_T}(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} \frac{e^{(1-iu+\alpha)x}}{\alpha^2 - u^2 - i(1+2\alpha)u} dF_{X_T}(x) = e^{-rT} \frac{\phi_T(-u - i(1+\alpha))}{\alpha^2 - u^2 - i(1+2\alpha)u}.
\end{aligned}$$

Com isso temos uma fórmula para o preço de uma call que pode ser numericamente calculada por FFT. Note que a fórmula acima nos fornece ainda um método para escolhermos α. Basta notar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(\overline{K}) d\overline{K} = \psi_T(0) = e^{-rT} \frac{\phi_T(-i(1+\alpha))}{\alpha^2}.$$

Então, $\Pi_T(\overline{K})$ vai ser integrável se, e somente se, $\phi_T(-i(1+\alpha))$ for finito, que é equivalente a

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{(1+\alpha)}] < +\infty.$$

Observação 4.33. As diferenças entre os sinais da fórmula acima e da do artigo [10] são devido à diferença entre as definições da transformada de Fourier.

4.4 Método da Transformada de Fourier

A referência de toda essa seção é [34].

4.4.1 Introdução

Suponha que

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^*, \\ d\nu_t = \tilde{\alpha}(\nu_t)dt + \beta(\nu_t)d\widetilde{W}_t, \\ S_0 = s_0 \ e \ \nu_0 = v_0, \end{cases}$$

onde $\{W^*, \mathcal{F}\}$ e $\{\widetilde{W}, \mathcal{G}\}$ são dois movimentos brownianos em $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ com $d[W^*, \widetilde{W}]_t = \rho(\nu_t)dt$. Então, nesse caso, a EDP para o apreçamento, na variável $x = \ln s$, se torna

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x,v) + \mathcal{D}V(t,x,v) = rV(t,x,v), \\ \\ V(T,x,v) = g(x,v), \end{cases}$$

onde o operador diferencial $\mathcal{D}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V(t,x,v) = \left(r - \frac{v}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}(t,x,v) + \tilde{\alpha}(v)\frac{\partial V}{\partial v}(t,x,v) + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x,v) + \\ + \frac{1}{2}\beta^2(v)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(t,x,v) + \rho(v)\beta(v)\sqrt{v}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial v}(t,x,v). \end{aligned}$$

Definição 4.34 (Transformada de Fourier Generalizada)**.** Definiremos a transformada de Fourier de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x)dx,$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

Lema 4.35 (Existência)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existam α e β positivos satisfazendo $e^{\alpha x} f(x)\chi_{\{x<0\}} \in L^1(\mathbb{R})$ e $e^{-\beta x} f(x)\chi_{\{x>0\}} \in L^1(\mathbb{R})$. Então a transformada de Fourier de f existe na faixa $-\alpha < Im\ z < \beta$.*

Lema 4.36 (Inversão)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que sua transformada de Fourier exista na faixa $-a < Im\ z < b$. Então*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-izx}\hat{f}(z)dz,$$

onde $-\alpha < a < \beta$.

Proposição 4.37. *Suponha que exista a transformada de Fourier de $V(t,x,v)$ na variável x e que os seguintes limites são válidos*

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{izx}V(t,x,v) = 0 \quad e \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{izx}\frac{\partial V}{\partial x}(t,x,v) = 0.$$

Então, $\hat{h}(\tau,z,v) = e^{(r+izr)\tau}\hat{V}(t,z,v)$, com $\tau = T - t$, satisfaz a seguinte EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{h}}{\partial \tau}(\tau,z,v) = (\tilde{\alpha}(v) - iz\rho(v)\beta(v)\sqrt{v})\dfrac{\partial \hat{h}}{\partial v}(\tau,z,v)v + \dfrac{1}{2}\beta^2(v)\dfrac{\partial^2 \hat{h}}{\partial v^2}(\tau,z,v) - c(z)v\hat{h}(\tau,z,v). \\ \\ \hat{h}(0,z,v) = \hat{V}(T,z,v). \end{cases} \tag{4.7}$$

Demonstração. Basta usar a igualdade

$$(-iz)\hat{V}(t,z,v) = \widehat{\frac{\partial V}{\partial x}}(t,z,v),$$

a linearidade da transformada de Fourier e integrar por partes (aqui usamos os limites acima). □

Definição 4.38 (Transformada Fundamental)**.** Seja $\hat{H}(\tau,z,v)$ uma solução da EDP (4.7) com condição inicial

$$\hat{H}(0,z,v) = 1.$$

Denominaremos essa função de *transformada fundamental* e, caso exista tal solução, diremos que *a EDP tem uma transformada fundamental*. A justificativa para essa nomenclatura é que, caso $\hat{H}$ seja uma transformada fundamental, $\hat{h}(\tau,z,v) = \hat{f}(\tau,z)\hat{H}(\tau,z,v)$ satisfará a EDP com condição inicial $\hat{h}(\tau,z,v) = \hat{f}(\tau,z)$.

Definição 4.39 (Função Regular)**.** Uma função é dita regular em um aberto do plano complexo se ela for analítica e univaluada nesse aberto.

Definição 4.40 (Problema Regular e Faixa de Regularidade)**.** Diremos que o problema de valor inicial (4.7) é *regular* se existir uma transformada fundamental regular em uma faixa $-\alpha < Im\ z < \beta$. Essa faixa é chamada de *faixa de regularidade*.

4.4.2 Apreçamento de Opções Européias

Primeiramente, apreçaremos, de uma maneira geral, opções européias com *payoff* dependendo somente do ativo.

Proposição 4.41 (Solução da EDP (4.7))**.** *Seja V o preço de um contrato europeu com maturidade T e payoff $g(x)$. Suponha que a EDP (4.7) relacionada a esse contrato tenha uma transformada fundamental regular na faixa $-\alpha < Im\ z < \beta$ e que g tenha transformada de Fourier na variável espacial em outra faixa $-\tilde{\alpha} < Im\ z < \tilde{\beta}$. Então, se essas faixas tiverem interseção não-vazia, que denotaremos por $\mathcal{N}$,*

$$V(t,x,v) = \frac{e^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz(x+r\tau)}\hat{g}(z)\hat{H}(\tau,z,v)dz,$$

onde $a \in \mathcal{N}$.

Demonstração. A proposição segue facilmente da igualdade

$$\hat{V}(t,z,v) = e^{-r\tau}e^{-izr\tau}\hat{g}(z)\hat{H}(\tau,z,v).$$

□

Proposição 4.42 (Transformada de Fourier de *Payoffs*)**.** *Seja $C(\tau,x,v)$ e $P(\tau,x,v)$ os preços de uma call e uma put, respectivamente, ambas com maturidade T e preço de exercício K. Então*

$$\hat{C}(0,z,v) = -\frac{K^{iz+1}}{z^2-iz}\ , \quad para \quad Im\ z > 1,$$

$$\hat{P}(0,z,v) = -\frac{K^{iz+1}}{z^2-iz}\ , \quad para \quad Im\ z < 0.$$

Demonstração. Calcularemos somente $\hat{C}$, pois $\hat{P}$ é análogo.

$$\hat{C}(0,z,v) = \int_{\ln K}^{+\infty} e^{izx}(e^x - K)dx = \int_{\ln K}^{+\infty} e^{i(z-i)x}dx - K\int_{\ln K}^{+\infty} e^{izx}dx = \\ = \left(\frac{e^{i(z-i)x}}{i(z-i)}\Big|_{\ln K}^{+\infty}\right) - K\left(\frac{e^{izx}}{iz}\Big|_{\ln K}^{+\infty}\right).$$

Note que $|e^{i(z-i)x}| = e^{(-Im\ z\ +1)x}$ e $|e^{izx}| = e^{-(Im\ z)\ x}$. Então, como estamos supondo $Im\ z > 1$, podemos posseguir com os cálculos e concluir que

$$\hat{C}(0,z,v) = -\frac{e^{i(z-i)\ln K}}{i(z-i)} + K\frac{e^{iz\ln K}}{iz} = -\frac{K^{iz+1}}{z^2 - iz}.$$

□

Teorema 4.43 (Apreçamento de uma Call)**.** *Suponha que a EDP (4.7) tenha uma transformada fundamental regular em $-\alpha < Im\ z < \beta$, com $\beta > 1$. Então uma solução para a EDP original para o preço de uma call com maturidade T e preço de exercíco K é*

$$C_1(t,x,v) = -\frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2 - iz}dz,$$

onde $1 < a < \beta$, $\omega(\overline{K}) = x + r\tau - \overline{K}$, $\overline{K} = \ln K$, e $\hat{H}$ é a transformada fundamental.

Teorema 4.44 (Apreçamento de uma Put)**.** *Suponha que a EDP (4.7) tenha uma transformada fundamental regular em $-\alpha < Im\ z < \beta$, com $\alpha > 0$. Então uma solução para a EDP original para o preço de uma put com maturidade T e preço de exercíco K é*

$$P_1(t,x,v) = -\frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2 - iz}dz,$$

onde $-\alpha < a < 0$.

Proposição 4.45. *Suponha que a EDP (4.7) tenha uma transformada fundamental regular em $-\alpha < Im\ z < \beta$, com $\alpha > 0$ e $\beta > 1$. Então*

$$C_1(\tau,x,v) = e^x\hat{H}(\tau,i,v) - Ke^{-r\tau}\hat{H}(\tau,0,v) + P_1(\tau,x,v).$$

Demonstração. Seja $-\alpha < a < 0 < b < 1 < c < \beta$. Então, aplicando o Teorema dos Resíduos,

$$P_1(\tau,x,v) = C_1(\tau,x,v) - \frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\left\{Res\left(e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2 - iz}\ ,\ a < Im\ z < b\right) + \right. \\ \left. + Res\left(e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2 - iz}\ ,\ b < Im\ z < c\right)\right\}.$$

Para o cálculo dos resíduos acima, note que a função em questão tem dois pólos simples, um em $z = i$ e outro em $z = 0$. Logo

$$Res\left(e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2 - iz}\ ,\ a < Im\ z < b\right) = 2\pi i e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2 - iz}z\Big|_{z=0} = -2\pi\hat{H}(\tau,0,v) = -2\pi\hat{H}(\tau,0,v),$$

$$Res\left(e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}\ ,\ b<Im\ z<c\right)=2\pi i e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}(z-i)\Big|_{z=i}=2\pi e^{\omega(\overline{K})}\hat{H}(\tau,i,v)=$$
$$=2\pi\frac{e^x}{Ke^{-r\tau}}\hat{H}(\tau,i,v).$$

Portanto

$$P_1(\tau,x,v)=C_1(\tau,x,v)-e^x\hat{H}(\tau,i,v)+Ke^{-r\tau}\hat{H}(\tau,0,v).$$

□

Lema 4.46. *Seja $M(\tau,x,v)$ o preço de um contrato com payoff $\min\{e^x,K\}$ e maturidade T. Então*

$$\hat{M}(0,z,v)=\frac{K^{iz+1}}{z^2-iz}\ ,\quad para\quad 0<Im\ z<1,$$

e, portanto, se a EDP (4.7) tiver uma transformada fundamental regular em $-\alpha<Im\ z<\beta$, com $\alpha>0$ e $\beta>1$, uma solução para essa EDP é

$$M(\tau,x,v)=\frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}dz,$$

onde $0<a<1$.

Demonstração. Então, se $0<Im\ z<1$,

$$\hat{M}(0,z,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}\min\{e^x,K\}dx=\int_{-\infty}^{\ln K}e^{izx}e^x dx+$$
$$+\int_{\ln K}^{+\infty}e^{izx}Kdx=\left(\frac{e^{(iz+1)x}}{iz+1}\Big|_{-\infty}^{\ln K}\right)+\left(\frac{Ke^{izx}}{iz}\Big|_{\ln K}^{+\infty}\right)=$$
$$=\frac{K^{iz+1}}{iz+1}-\frac{K^{iz+1}}{iz}=\frac{K^{iz+1}}{z^2-iz}.$$

A fórmula para $M(\tau,x,v)$ segue da Proposição 4.41. □

Agora considere dois contratos cujos valores no instante t são dados por $C_2(\tau,x,v)=e^x-M(\tau,x,v)$ e $P_2(\tau,x,v)=e^{-r\tau}K-M(\tau,x,v)$, onde M é dado pelo lema acima. Então

$$C_2(0,x,v)=(e^x-K)^+\quad\text{e}\quad P_2(0,x,v)=(K-e^x)^+,$$

e ambas satisfazem a EDP de apreçamento. Logo, C_2 e P_2 são possíveis preços para a call e a put, respectivamente. Note ainda que, por construção, os preços C_2 e P_2 satisfazem a paridade Put-Call e podemos escrever C_2 e P_2 de forma mais explícita

$$C_2(\tau,x,v)=e^x-\frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}dz,$$
$$P_2(\tau,x,v)=e^{-r\tau}K-\frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}dz.$$

Já vimos que C_1 e P_1 não necessariamente satisfazem a paridade Put-Call, enquanto C_2 e P_2 sempre satisfazem. Mas qual seria a relação entre essas duas soluções?

Teorema 4.47. *Suponha que a EDP (4.7) tenha uma transformada fundamental regular em* $-\alpha < Im\ z < \beta$, *com* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 1$. *Então*

$$C_2(\tau, x, v) = C_1(\tau, x, v) + e^x(1 - \hat{H}(\tau, i, v)).$$

Demonstração. Sejam $0 < a < 1 < b < \beta$. O Teorema do Resíduo nos diz que

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}dz = \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}dz + Res\left(e^{-iz\omega(\overline{K})}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}\ ,\ a < Im\ z < b\right).$$

Então

$$M(\tau, x, v) = -C_1(\tau, x, v) + e^x\hat{H}(\tau, i, v),$$

donde a conclusão do teorema segue. □

Analogamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.48. *Suponha que a EDP (4.7) tenha uma transformada fundamental regular em* $-\alpha < Im\ z < \beta$, *com* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 1$. *Então*

$$P_2(\tau, x, v) = P_1(\tau, x, v) + Ke^{-r\tau}(1 - \hat{H}(\tau, 0, v)).$$

4.4.3 Função de Green

Definição 4.49 (Função de Green)**.** Considere um contrato europeu sobre S com maturidade T e *payoff* $\delta(S_T - K)$. O preço desse contrato é chamado de *função de Green*.

Observação 4.50. O *payoff* da função de Green no log-preço é

$$\frac{1}{K}\delta(x - \ln K).$$

Isso segue da fórmula

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|},$$

onde f é de classe C^1 e x_0 é tal que $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) \neq 0$. Um simple cálculo fornece a transformada desse *payoff*, que é K^{iz-1}. Note que essa transformada está definida em todo plano complexo.

Proposição 4.51. *Vamos denotar a função de Green por* $G(\tau, x, v; K)$. *Então, se a EDP (4.7) tiver uma transformada fundamental regular na faixa* $-\alpha < Im\ z < \beta$, *valerá a seguinte fórmula, com* $\overline{K} = \ln K$,

$$G(\tau, x, v; \overline{K}) = \frac{e^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz\omega(\overline{K})}\hat{H}(\tau, z, v)dz,$$

onde $-\alpha < a < \beta$ *e* $\omega(\overline{K}) = x + r\tau - \overline{K}$.

Proposição 4.52 (Inversão da Transformada Fundamental)**.** *Suponha que a EDP (4.7) tenha transformada fundamental regular na faixa* $-\alpha < Im\ z < \beta$. *Então*

$$\hat{H}(\tau, z, v) = e^{r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\omega(y)}G(\tau, x, v; y)dy,$$

onde $\omega(y) = x + r\tau - y$.

Demonstração. Pela fórmula de inversão,

$$G(\tau,x,v;y)=\frac{e^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{-iz\omega(y)}\hat{H}(\tau,z,v)dz=e^{-r\tau}H(\tau,\omega(y),v). \tag{4.8}$$

Então

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iz\omega(y)}G(\tau,x,v;y)dy&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iz\omega(y)}e^{-r\tau}H(\tau,\omega(y),v)dy=\\&=e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{izu}H(\tau,u,v)du=e^{-r\tau}\hat{H}(\tau,z,v).\end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{H}(\tau,z,v)=e^{r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iz\omega(y)}G(\tau,x,v;y)dy.$$

□

Observação 4.53. Pela proposição acima, valem as seguintes equivalências

$$\begin{aligned}e^{r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\tau,x,v;y)dy=1&\iff\hat{H}(\tau,0,v)=1,\\\int_{-\infty}^{+\infty}e^{y}G(\tau,x,v;y)dy=e^{x}&\iff\hat{H}(\tau,i,v)=1.\end{aligned}$$

A primeira é óbvia. Para verificarmos a segunda, note que

$$\begin{aligned}\hat{H}(\tau,i,v)=e^{r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega(y)}G(\tau,x,v;y)dy&=e^{r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x-r\tau+y}G(\tau,x,v;y)dy=\\&=e^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{y}G(\tau,x,v;y)dy.\end{aligned}$$

Dessas observações surgem as seguintes definições:

Definição 4.54 (Norma-preservador)**.** Diremos que $\hat{H}(\tau,z,v)$ preserva a norma se $\hat{H}(\tau,0,v)=1$.

Definição 4.55 (Martingal-preservador)**.** Diremos que $\hat{H}(\tau,z,v)$ preserva o martingal se $\hat{H}(\tau,i,v)=1$.

Observação 4.56. Para exemplos de transformandas fundamentais que não preservem a norma ou o martingal, veja [34].

Observação 4.57. Se $\hat{H}$ preservar a norma, a positividade de G nos garante que $e^{-r\tau}G(\tau,x,v;y)$ é uma densidade de probabilidade em y. Se, além de preservar a norma, $\hat{H}$ preservar o martingal, $e^{-r\tau}G(\tau,x,v;y)$ será uma densidade neutra ao risco, ou seja, tal que o log-preço descontado é um martingal com respeito a ela.

Além do que foi visto acima, a Proposição 4.52 nos fornece uma outra maneira de escrevermos as fórmulas para C_1 e P_1, mas agora como função de $G(\tau,x,v;y)$.

Proposição 4.58. *Suponha que a EDP (4.7) tem uma transformada fundamental regular em $-\alpha < Im\ z < \beta$, com $\beta > 1$. Então*

$$C_1(\tau,x,v)=e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{y}-K)^{+}e^{r\tau}G(\tau,x,v;y)dy\ ,\quad\forall\ K>0.$$

Proposição 4.59. *Suponha que a EDP (4.7) tenha uma transformada fundamental regular em* $-\alpha < Im\ z < \beta$, *com* $\alpha > 0$. *Então*

$$P_1(\tau, x, v) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (K - e^y)^+ e^{r\tau} G(\tau, x, v; y) dy \ , \quad \forall\ K > 0.$$

Demonstração (das Proposições 4.58 e 4.59)**.** Segue facilmente da equação (4.8) da demonstração da Proposição 4.52. □

Notação. Vamos denotar $e^{r\tau}G(\tau, x, v; y)$ por $\tilde{p}(\tau, x, v, y)$, não importando se $\hat{H}$ preserva a norma. Agora seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e considere a seguinte notação

$$\mathbb{E}_{\tilde{p}}[f(y) \mid \tau, x, v] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\tilde{p}(\tau, x, v, y)dy.$$

Então

$$C_1(\tau, x, v) = e^{-r\tau}\mathbb{E}_{\tilde{p}}[(e^y - K)^+ \mid \tau, x, v],$$
$$P_1(\tau, x, v) = e^{-r\tau}\mathbb{E}_{\tilde{p}}[(K - e^y)^+ \mid \tau, x, v].$$

Proposição 4.60. *Suponha que* $\hat{H}$ *seja regular em* $-\alpha < Im\ z < \beta$ *e defina* $\tilde{\omega}(u) = \ln u + r\tau$ *e* $\varphi(u) = H(\tau, \tilde{\omega}(u), v)$. *Então, para todo* $\varepsilon > 0$,

$$\varphi(u) = \begin{cases} O(u^{\beta+\varepsilon}) & \text{quando } u \to 0, \\ \\ O(u^{-\alpha-\varepsilon}) & \text{quando } u \to +\infty. \end{cases}$$

Demonstração. Já vimos que

$$\hat{H}(\tau, z, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\omega(y)}\tilde{p}(\tau, x, v, y)dy.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta-\varepsilon)\omega(y)}\tilde{p}(\tau, x, v, y)dy = \hat{H}(\tau, i(\beta - \varepsilon), v) < +\infty$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\beta-\varepsilon)y}\tilde{p}(\tau, x, v, y)dy < +\infty$$
$$\Rightarrow \tilde{p}(\tau, x, v, y) = O(e^{-(\beta+\varepsilon)y}) \quad \text{quando } y \to +\infty..$$

Do mesmo modo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(-\alpha+\varepsilon)\omega(y)}\tilde{p}(\tau, x, v, y)dy = \hat{H}(\tau, i(-\alpha + \varepsilon), v) < +\infty$$
$$\Rightarrow \tilde{p}(\tau, x, v, y) = O(e^{(\alpha+\varepsilon)y}) \quad \text{quando } y \to -\infty.S$$

Agora, lembre-se de que vale a seguinte igualdade

$$\tilde{p}(\tau, x, v, y) = e^{r\tau}G(\tau, x, v; y) = H(\tau, \omega(y), v).$$

Mas como $\omega(y) = \tilde{\omega}(e^{x-y})$, temos que

$$\tilde{p}(\tau, x, v, y) = \varphi(e^{x-y}) = \varphi(e^x/e^y).$$

Definindo $u = e^x/e^y$, concluimos a proposição. □

Usando a proposição acima vamos mostrar que os preços C_1 e P_1 satisfazem os limites da Proposição 4.37.

Corolário 4.61. *Suponha que $\hat{H}$ é regular em $-\alpha < Im\ z < \beta$, com $\alpha > 0$ e $\beta > 1$. Então*

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{izx} C_1(\tau,x,v) = 0 \quad e \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{izx}\frac{\partial C_1}{\partial x}(\tau,x,v) = 0,$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{izx} P_1(\tau,x,v) = 0 \quad e \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{izx}\frac{\partial P_1}{\partial x}(\tau,x,v) = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
C_1(\tau,x,v) &= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^y-K)^+\tilde{p}(\tau,x,v,y)dy = e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^y-K)^+\varphi(e^x/e^y)dy = \\
&= e^{-r\tau}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^x}{u}-K\right)^+\varphi(u)\frac{du}{u} = \\
&= e^{-r\tau}\int_0^{e^x/K}\left(\frac{e^x}{u}-K\right)\varphi(u)\frac{du}{u} = \\
&= e^{-r\tau}e^x\int_0^{e^x/K}\frac{\varphi(u)}{u^2}\left(1-\frac{K}{e^x}u\right)du.
\end{aligned}$$

Agora, já que $\varphi(u) = O(u^{\beta+\varepsilon})$ quando $u \to 0$, para x suficientemente negativo vale

$$\begin{aligned}
e^{-r\tau}e^x\int_0^{e^x/K}\frac{\varphi(u)}{u^2}\left(1-\frac{K}{e^x}u\right)du &\le Ce^x\int_0^{e^x/K}\frac{u^{\beta+\varepsilon}}{u^2}\left(1-\frac{K}{e^x}u\right)du = \\
&= Ce^x\int_0^{e^x/K}u^{\beta+\varepsilon-2}du - CK\int_0^{e^x/K}u^{\beta+\varepsilon-1}du \le \tilde{C}e^{x(\beta+\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Logo, $C_1(\tau,x,v) = O(e^{(\beta+\varepsilon)x})$, quando $x \to -\infty$. Analogamente, $C_1(\tau,x,v) = O(e^{-(\alpha+\varepsilon)x})$, quando $x \to +\infty$. Portanto, $C_1(\tau,x,v)$ satisfazem os seguintes comportamentos assintóticos

$$\begin{aligned}
C_1(\tau,x,v) &= O(e^{(\beta+\varepsilon)x}) \quad \text{quando } x \to -\infty, \\
\frac{\partial C_1}{\partial x}(\tau,x,v) &= O(e^{(\beta+\varepsilon)x}) \quad \text{quando } x \to -\infty, \\
C_1(\tau,x,v) &= O(e^{-(\alpha+\varepsilon)x}) \quad \text{quando } x \to +\infty, \\
\frac{\partial C_1}{\partial x}(\tau,x,v) &= O(e^{-(\alpha+\varepsilon)x}) \quad \text{quando } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

Como $|e^{izx}| = e^{-(Im\ z)x}$ e $-\alpha < Im\ z < \beta$, a conclusão do corolário segue. A demonstração é análoga para P_1. □

Usando as relações entre os preços 2 e os preços 1, é fácil ver que:

Corolário 4.62. *Suponha que $\hat{H}$ é regular em $-\alpha < Im\ z < \beta$, com $\alpha > 0$ e $\beta > 1$. Então, para $Im\ z > 1$, temos que*

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{izx} C_2(\tau,x,v) = 0 \quad e \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{izx}\frac{\partial C_2}{\partial x}(\tau,x,v) = 0,$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{izx} P_2(\tau,x,v) = 0 \quad e \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{izx}\frac{\partial P_2}{\partial x}(\tau,x,v) = 0.$$

Teorema 4.63 (A Transformada Fundamental como Função Característica)**.** *Suponha que $\hat{H}$ preserve a norma. Então existe uma densidade de probabilidade f tal que*

$$\hat{H}(\tau, x, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu} f(u) du.$$

Demonstração. A seguinte igualdade sempre é válida, não importando se $\hat{H}$ preserva a norma:

$$\hat{H}(\tau, z, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\omega(y)} \tilde{p}(\tau, x, v, y) dy.$$

Considere a mudança de variáveis $u = \omega(y) = x + r\tau - y$. Então

$$\hat{H}(\tau, z, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu} \tilde{p}(\tau, x, v, \omega(u)) du.$$

Agora, note que, como $\hat{H}$ preserva a norma,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\tau, x, v, \omega(u)) du = \hat{H}(\tau, 0, v) = 1.$$

Portanto $\tilde{p}(\tau, x, v, \omega(u))$ é uma densidade de probabilidade como função de u, já que é positiva e integra um na reta real. □

4.4.4 Funções Características Analíticas

Nessa seção seguiremos [35] para entendermos melhor a hipótese sobre a transformada fundamental de analiticidade em um faixa no plano complexo.

Definição 4.64 (Função Característica Analítica)**.** Uma função característica será dita analítica se existir uma função $F(z)$, que chamaremos de extensão analítica, definida no plano complexo e regular em $|z| < \rho$, para algum $\rho > 0$, satisfazendo para $\lambda > 0$

$$F(t) = f(t) \ , \quad |t| < \lambda \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4.65. *Suponha que uma função característica f seja analítica. Então, sua extensão analítica é regular em uma faixa do plano complexa, que ou é o plano complexo todo, ou sua fronteira é uma ou duas linhas horizontais. Além disso, os pontos puramente imaginários na fronteira dessa faixa, se existirem, são pontos singulares da extensão analítica.*

Observação 4.66. Como já vimos, se a transformada fundamental preservar a norma, ela será uma função característica. Então, existe uma faixa de regularidade, caso ela seja analítica.

Observação 4.67. Seja ϕ a função característica do log-preço na medida neutra ao risco. Então

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^\theta] = \mathbb{E}_{P^*}[e^{\theta X_T}] = \phi(-i\theta),$$

onde, por um abuso de notação, ϕ na fórmula acima é a extensão ao plano complexo, que iremos supor analítica. Então existe uma faixa $-\alpha < Im\ z < \beta$ em que ϕ é regular e vale

$$\phi(-i\alpha) = \phi(i\beta) = +\infty,$$

ou seja,

$$\mathbb{E}_{P^*}[S_T^{-\beta}] = \mathbb{E}_{P^*}[S_T^\alpha] = +\infty.$$

4.4.5 Exemplos

Exemplo 4.68 (O Modelo de Black-Scholes com Volatilidade Determinísitica)**.** Esse modelo supõe

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^*, \\ d\nu_t = \tilde{\alpha}(\nu_t)dt, \\ S_0 = s_0 \ e \ \nu_0 = v_0. \end{cases}$$

Então, a transformada fundamental desse modelo satisfaz a EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \tau}(\tau, z, v) = \tilde{\alpha}(v)\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial v}(\tau, z, v) - c(z)v\hat{H}(\tau, z, v), \\ \\ \hat{H}(0, z, v) = 1, \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\hat{H}(\tau, z, v) = e^{-c(z)U(\tau, v)},$$

onde $U(\tau, v) = \displaystyle\int_0^\tau Y(u; v)du$, com $Y(\cdot\ ; v)$ satisfazendo a EDO

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{du}(u) = \tilde{\alpha}(Y(u)), \\ \\ Y(0) = v. \end{cases}$$

Note que $\hat{H}$ é regular no plano complexo todo e vale $\hat{H}(\tau, 0, v) = \hat{H}(\tau, i, v) = 1$. Logo, nesse modelo não há diferença entre os preços C_1 e C_2; vamos denotá-los, simplesmente, por C. Agora, considere a seguinte função

$$f(\omega, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-iz\omega - c(z)z}}{z^2 - iz}dz,$$

onde $0 < a < 1$. Então

$$C(\tau, S, v) = S - Ke^{-r\tau} f(\tilde{\omega}(S/K), U(\tau, v)).$$

Agora defina

$$I(\omega, z, b) = \frac{i}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-iz\omega - c(z)z}}{z - b}dz$$

$\Rightarrow f(\omega, z) = I(\omega, z, 0) - I(\omega, z, i)$.

Efetuando-se os cálculos necessários, temos que

$$I(\omega, z, 0) = \Phi\left(\frac{\omega}{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{2}\right),$$
$$I(\omega, z, i) = -e^{\omega}\Phi\left(-\frac{\omega}{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{2}\right),$$

onde Φ é a distribuição da normal padrão. Vamos denotar

$$d_\pm(\omega, z) = \frac{\omega}{\sqrt{z}} \pm \frac{\sqrt{z}}{2}.$$

Então

$$\begin{aligned}C(\tau,S,v) &= S - Ke^{-r\tau}f(\tilde{\omega}(S/K),U(\tau,v)) = \\ &= S - Ke^{-r\tau}(I(\tilde{\omega}(S/K),U(\tau,v),0) - I(\tilde{\omega}(S/K),U(\tau,v),i)) = \\ &= S - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-(\tilde{\omega}(S/K),U(\tau,v))) - S\Phi(-d_+(\tilde{\omega}(S/K),U(\tau,v))) = \\ &= S\Phi(d_+(\tilde{\omega}(S/K),U(\tau,v))) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-(\tilde{\omega}(S/K),U(\tau,v))),\end{aligned}$$

que é a conhecida fórmula de Black-Scholes

Exemplo 4.69 (O Modelo de Heston)**.** Nesse modelo, a transformada fundamental satisfaz a EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\hat{H}}{\partial\tau}(\tau,z,v) = (\kappa(\overline{\nu}-v) - iz\rho\xi v)\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial v}(\tau,z,v) + \dfrac{1}{2}\xi^2 v\dfrac{\partial^2\hat{H}}{\partial v^2}(\tau,z,v) - c(z)v\hat{H}(\tau,z,v), \\ \\ \hat{H}(0,z,v) = 1. \end{cases}$$

Um simples cálculo nos mostra que uma solução da EDP acima é a função característica condicional do log-preço. Portanto,

$$\hat{H}(\tau,z,v) = e^{A(t,z)+B(t,z)v},$$

onde

$$A(t,z) = a\left(r_-(T-t) - \frac{2}{\xi^2}\ln\left(\frac{1-\tilde{g}e^{-d(T-t)}}{1-\tilde{g}}\right)\right),$$

$$B(t,z) = r_-\left(\frac{1-e^{-d(T-t)}}{1-\tilde{g}e^{-d(T-t)}}\right),$$

$$\tilde{g} = \frac{r_-}{r_+}\ , \quad r_\pm = \frac{\beta\pm d}{\xi^2}\ , \quad \alpha = -\frac{z^2}{2} + \frac{(-1)^{j+1}}{2}iz,$$

$$\beta = -\xi\lambda + j\rho\xi + \rho\xi iz\ , \quad a = \xi\lambda\overline{\nu}\ , \quad d = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\xi^2},$$

que é a mesma fórmula obtida anteriormente. Nesse caso, vê-se claramente que a transformada fundamental é regular no plano complexo todo e que ela preserva a norma e o martingal.

4.4.6 Expansão em Séries

Hipóteses. Vamos supor que, sob P^*, o processo da variância segue a seguinte dinâmica

$$d\nu_t = \tilde{\alpha}(\nu_t)dt + \xi\eta(\nu_t)d\widetilde{W}_t.$$

Com esse novo processo, a transformada fundamental satisfaz a seguinte EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\hat{H}}{\partial\tau}(\tau,z,v) = (\tilde{\alpha}(v) + \xi d(z)\Delta(v))\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial v}(\tau,z,v) + \dfrac{1}{2}\xi^2\eta^2(v)\dfrac{\partial^2\hat{H}}{\partial v^2}(\tau,z,v) - c(z)v\hat{H}(\tau,z,v), \\ \\ \hat{H}(0,z,v) = 1, \end{cases} \tag{4.9}$$

onde $\Delta(v) = \rho(v)\eta(v)\sqrt{v}$, $d(z) = -iz$ e $c(z) = (z^2 - iz)/2$. Suponha ainda que $\hat{H}$ seja regular na faixa $-\alpha < Im\ z < \beta$, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 1$. Então

$$C(\tau,S,v) = C_2(\tau,S,v) = S - \frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz\omega}\frac{\hat{H}(\tau,z,v)}{z^2-iz}dz,$$

com $0 < a < 1$ e $\omega = \ln(Se^{r\tau}/K)$.

A idéia dessa seção é determinar uma expansão em série de potências para $\hat{H}$ e, a partir dela, construir uma expansão em série para C_2 e, finalmente, para $\hat{\sigma}_0$.

Proposição 4.70. *A solução da EDP (4.9) com $\xi = 0$ é $\hat{H}^0(\tau, z, v) = e^{-c(z)U(\tau,v)}$ onde $U(\tau, v) = \int_0^\tau Y(u; v)du$ e $Y(\cdot\,; v)$ satisfaz a EDO*

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{du}(u) = \tilde{\alpha}(Y(u)), \\ \\ Y(0) = v. \end{cases}$$

Proposição 4.71. *Defina*

$$\phi(\tau, v) = \frac{Y(\tau; v) - v}{\tilde{\alpha}(v)}.$$

Então, as derivadas de $\hat{H}^0$ podem ser escritas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{H}^0}{\partial v}(\tau, z, v) &= -c(z)\phi(\tau, v)\hat{H}^0(\tau, z, v), \\ \frac{\partial^2 \hat{H}^0}{\partial v^2}(\tau, z, v) &= \left(c^2(z)\phi^2(\tau, v) - c(z)\frac{\partial \phi}{\partial v}(\tau, v)\right)\hat{H}^0(\tau, z, v). \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\frac{dY}{du}(u; v) = \tilde{\alpha}(Y(u; v)) \Rightarrow \frac{dY(u)}{\tilde{\alpha}(Y(u; v))} = du \Rightarrow G(Y(\tau; v)) - G(Y(0; v)) = \tau,$$

onde $G'(x) = 1/\tilde{\alpha}(x)$. Então, como $Y(0; v) = v$

$$G(Y(\tau; v)) = \tau + G(v).$$

Derivando em relação a v de ambos os lados

$$G'(Y(\tau; v))\frac{dY}{dv}(\tau; v) = G'(v) \Rightarrow \frac{dY}{dv}(\tau; v) = \frac{\tilde{\alpha}(Y(\tau; v))}{\tilde{\alpha}(v)}.$$

Logo

$$\frac{\partial U}{\partial v}(\tau, v) = \int_0^\tau \frac{dY}{dv}(u; v)du = \int_0^\tau \frac{\tilde{\alpha}(Y(u; v))}{\tilde{\alpha}(v)}du = \frac{1}{\tilde{\alpha}(v)}\int_0^\tau \frac{dY}{du}(u; v)du = \frac{Y(\tau; v) - v}{\tilde{\alpha}(v)} = \phi(\tau, v).$$

As fórmulas para a primeira e a segunda derivada de $\hat{H}^0$ com relação a v seguem facilmente da fórmula acima. □

Teorema 4.72 (Expansão em Série para $\hat{H}$)**.**

$$\hat{H}(\tau, z, v) = \hat{H}^0(\tau, z, v)h(\tau, z, v),$$

onde $\hat{H}^0$ satisfaz (4.9) com $\xi = 0$ e h tem a seguinte expansão formal em série de potências de ξ

$$h(\tau, z, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi^n h^{(n)}(\tau, z, v),$$

com $h^{(n)}(\tau, z, v) = 0$, $n \leq 0$, $h^{(0)}(\tau, z, v) = 1$ e $h^{(n)}$, $n \geq 1$, satisfazendo a EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h^{(n)}}{\partial \tau}(\tau,z,v) = \tilde{\alpha}(v)\dfrac{\partial h^{(n)}}{\partial v}(\tau,z,v) + f^{(n)}(\tau,v), \\ h^{(n)}(0,z,v) = 0, \end{cases}$$

onde

$$f^{(n)}(\tau,v) = \frac{1}{2}\eta^2(v)\left(\frac{\partial}{\partial v} - c(z)\phi\right)^2 h^{(n-2)}(\tau,z,v) + d(z)\Delta(v)\left(\frac{\partial}{\partial v} - c(z)\phi\right)h^{(n-1)}(\tau,z,v).$$

Demonstração. Substituindo a fórmula proposta para $\hat{H}$ na EDP (4.9), concluimos que h satisfaz a seguinte EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau}(\tau,z,v) - \tilde{\alpha}(v)\frac{\partial h}{\partial v}(\tau,z,v) = \frac{1}{2}\eta^2(v)\left(\frac{\partial}{\partial v} - c(z)\phi(\tau,v)\right)^2 \xi^2 h(\tau,z,v) + \\ + d(z)\Delta(v)\left(\frac{\partial}{\partial v} - c(z)\phi(\tau,v)\right)\xi h(\tau,z,v), \end{aligned}$$

com condição inicial $h(0,z,v) = 1$. Agora, substituindo

$$h(\tau,z,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi^n h^{(n)}(\tau,z,v)$$

na EDP acima temos a recorrência de $h^{(n)}(\tau,z,v)$ desejada. □

Lema 4.73. *A solução da EDP*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h^{(n)}}{\partial \tau}(\tau,z,v) = \tilde{\alpha}(v)\dfrac{\partial h^{(n)}}{\partial v}(\tau,z,v) + f^{(n)}(\tau,v), \\ h^{(n)}(0,z,v) = 0, \end{cases}$$

é dada pela fórmula

$$h^{(n)}(\tau,z,v) = \int_0^\tau f^{(n)}(\tau - u, Y(u;v))du.$$

Corolário 4.74 (Solução para $m = 1$)**.**

$$h^{(1)}(\tau,z,v) = -c(z)d(z)\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v),$$

onde

$$\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v) = \int_0^\tau \Delta(Y(u;v))\phi(\tau - u, Y(u;v))du.$$

Demonstração. Basta notar que

$$f^{(1)}(\tau,v) = -c(z)d(z)\Delta(v)\phi(\tau,v).$$

□

Corolário 4.75 (Solução para $m = 2$)**.**

$$h^{(2)}(\tau, z, v) = -c(z)\mathcal{J}^{(2)}(\tau, v) + c^2(z)\mathcal{J}^{(3)}(\tau, v) - c(z)d^2(z)\mathcal{J}^{(4)}(\tau, v) + c^2(z)d^2(z)\mathcal{J}^{(5)}(\tau, v),$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(2)}(\tau, v) &= \int_0^\tau \frac{1}{2}\eta^2(Y(u; v))\frac{\partial \phi}{\partial v}(\tau - u, Y(u; v))du,\\
\mathcal{J}^{(3)}(\tau, v) &= \int_0^\tau \frac{1}{2}\eta^2(Y(u; v))\phi(\tau - u, Y(u; v))du,\\
\mathcal{J}^{(4)}(\tau, v) &= \int_0^\tau \Delta(Y(u; v))\frac{\partial \mathcal{J}^{(1)}}{\partial v}(\tau - u, Y(u; v))du,\\
\mathcal{J}^{(5)}(\tau, v) &= \int_0^\tau \Delta(Y(u; v))\phi(\tau - u, Y(u; v))\mathcal{J}^{(1)}(\tau - u, Y(u; v))du.
\end{aligned}$$

Demonstração. Segue diretamente de

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(\tau, v) = &-\frac{1}{2}c(z)\eta^2(v)\frac{\partial \phi}{\partial v}(\tau, v) + \frac{1}{2}c^2(z)\eta^2(v)\phi(\tau, v) -\\
&- c(z)d^2(z)\Delta(v)\frac{\partial \mathcal{J}^{(1)}}{\partial v}(\tau, v) + c^2(z)d^2(z)\Delta(v)\phi(\tau, v)\mathcal{J}^{(1)}(\tau, v).
\end{aligned}$$

□

Observação 4.76. Note que $\psi_1 = \mathcal{J}^{(1)}$ satisfaz a seguinte EDP

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \tau}(\tau, v) = \tilde{\alpha}(v)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial v}(\tau, v) + \Delta(v)\phi(\tau, v),\\
\\
\psi_1(0, v) = 0,
\end{cases}$$

e que $\psi_2 = \mathcal{J}^{(5)}$ satisfaz

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \tau}(\tau, v) = \tilde{\alpha}(v)\dfrac{\partial \psi_2}{\partial v}(\tau, v) + \Delta(v)\phi(\tau, v)\mathcal{J}^{(1)}(\tau, v),\\
\\
\psi_2(0, v) = 0.
\end{cases}$$

Agora, já que $\psi_1^2/2$ também é solução da EDP acima, a unicidade de solução nos dá a seguinte igualdade

$$\mathcal{J}^{(5)} = \frac{\mathcal{J}^{(1)^2}}{2}.$$

Como conclusão temos a seguinte proposição:

Proposição 4.77. *A transformada fundamental tem a seguinte expansão de segunda ordem em* ξ

$$\begin{aligned}
e^{c(z)U(\tau,v)}\hat{H}(\tau, z, v) = 1 &- \xi c(z)d(z)\mathcal{J}^{(1)}(\tau, v) + \xi^2(-c(z)\mathcal{J}^{(2)}(\tau, v) + c^2(z)\mathcal{J}^{(3)}(\tau, v) -\\
&- c(z)d^2(z)\mathcal{J}^{(4)}(\tau, v) + \frac{1}{2}c^2(z)d^2(z)(\mathcal{J}^{(1)}(\tau, v))^2) + O(\xi^3).
\end{aligned}$$

Teorema 4.78 (Expansão em Série para C_2)**.** *Suponha que a transformada fundamental seja regular na faixa $-\alpha < Im\ z < \beta$ com $\beta > 1$. Vale a seguinte expansão de segunda ordem em ξ para C_2*

$$\begin{aligned}C_2(\tau,S,v) = C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)) + \frac{\xi}{\tau}\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(1,1)}(\tau,\kappa,v)+\\ + \frac{\xi^2}{\tau^2}\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))\Big(\tau\mathcal{J}^{(2)}(\tau,v) + \mathcal{J}^{(3)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v)+\\ +\tau\mathcal{J}^{(4)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(1,2)}(\tau,\kappa,v) + \frac{1}{2}(\mathcal{J}^{(1)})^2(\tau,v)\mathcal{R}^{(2,2)}(\tau,\kappa,v)\Big) + O(\xi^3),\end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}(\tau,v) = U(\tau,v)/\tau$ e

$$\mathcal{R}^{(p,q)}(\tau,\kappa,v) = \frac{\left(\frac{\tau}{\phi(\tau,v)}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^p\left(S\frac{\partial}{\partial S}\right)^q C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}.$$

Demonstração. A idéia é substituir a expansão de segunda ordem de $\hat{H}$ na fórmula

$$C_2(\tau,S,v) = S - \frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz\omega}\hat{H}(\tau,z,v)\frac{1}{z^2 iz}dz,$$

onde $\omega = \ln(Se^{r\tau}/K)$. Então, se definirmos

$$I(p,q) = -\frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iz\omega - c(z)U(\tau,v)}\frac{c^p(z)d^q(z)}{z^2 - iz}dz,$$

teremos a seguinte expansão

$$\begin{aligned}C_2(\tau,S,v) = S - \frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{d(z)\omega - c(z)U(\tau,v)}\frac{1}{z^2 iz}dz - \xi I(1,1)\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v) + \xi^2(-I(1,0)\mathcal{J}^{(2)}(\tau,v)+\\ + I(2,0)\mathcal{J}^{(3)}(\tau,v) - I(1,2)\mathcal{J}^{(4)}(\tau,v) + \frac{1}{2}I(2,2)(\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v))^2.\end{aligned}$$

Primeiramente, note que

$$S - \frac{Ke^{-r\tau}}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{d(z)\omega - c(z)U(\tau,v)}\frac{1}{z^2 - iz}dz = C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)).$$

Para o cálculo das funções I, é interessante definir

$$\begin{aligned}f(u,v) &= e^u - \frac{1}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{d(z)u - c(z)v}\frac{1}{z^2 - iz}dz =\\ &= e^u - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{v}}{2}\right) - e^u\Phi\left(-\frac{u}{\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{v}}{2}\right) =\\ &= e^u\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{v}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{v}}{2}\right).\end{aligned}$$

Então

$$I(p,q) = Ke^{-r\tau}(-1)^p\left(\frac{\partial^{p+q}}{\partial U^p\partial\omega^p}\right)f(w,U(\tau,v)) = (-1)^p\left(\frac{\partial^{p+q}}{\partial U^p\partial\omega^p}\right)C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)).$$

Agora note que, pela regra da cadeia

$$\left(\frac{\partial^{p+q}}{\partial U^p \partial \omega^p}\right) = \left(\frac{1}{\phi(\tau,v)}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^p \left(S\frac{\partial}{\partial S}\right)^q.$$

Logo

$$I(p,q) = (-1)^{-p}\left(\frac{1}{\phi(\tau,v)}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^p \left(S\frac{\partial}{\partial S}\right)^q C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)).$$

Portanto, pela definição de $\mathcal{R}^{(p,q)}$,

$$I(p,q) = (-\tau)^{-p}\mathcal{R}^{(p,q)}(\tau,\kappa,v)\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)).$$

Para a conclusão do teorema, note que $\mathcal{R}^{(1,0)} = 1$. □

Observação 4.79. É possível, derivando diretamente, calcular fórmulas fechadas para $\mathcal{R}^{(p,q)}(\tau,\kappa,v)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(1,0)}(\tau,\kappa,v) &= 1,\\
\mathcal{R}^{(1,1)}(\tau,\kappa,v) &= -\frac{\kappa}{\mathcal{V}(\tau,v)\tau} + \frac{1}{2},\\
\mathcal{R}^{(1,2)}(\tau,\kappa,v) &= \frac{\kappa^2}{\mathcal{V}^2(\tau,v)\tau^2} - \frac{\kappa}{\mathcal{V}(\tau,v)\tau} - \frac{1}{\mathcal{V}(\tau,v)\tau} + \frac{1}{4},\\
\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v) &= \frac{\kappa^2}{2\mathcal{V}^2(\tau,v)\tau} - \frac{1}{2\mathcal{V}(\tau,v)} - \frac{\tau}{8},\\
\mathcal{R}^{(2,2)}(\tau,\kappa,v) &= -\frac{5\kappa^2}{2\mathcal{V}^3(\tau,v)\tau^2} + \frac{\kappa}{\mathcal{V}^2(\tau,v)\tau} + \frac{3}{2\mathcal{V}^2(\tau,v)\tau} - \frac{1}{8\mathcal{V}(\tau,v)} + \mathcal{R}^{(1,1)}(\tau,\kappa,v)^2\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v).
\end{aligned}$$

Vamos agora, usando o Teorema anterior, expandir a variância implícita do preço C_2, que denotaremos por $\hat{\sigma}^2$, em potências de ξ.

Teorema 4.80 (Expansão em Série para $\hat{\sigma}$)**.** *Suponha que a transformada fundamental seja regular na faixa $-\alpha < Im\ z < \beta$ com $\beta > 1$. Então*

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2(\tau,\kappa,v) = \mathcal{V}(\tau,v) + \frac{\xi}{\tau}\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(1,1)}(\tau,\kappa,v) + \frac{\xi^2}{\tau^2}\Big(\tau\mathcal{J}^{(2)}(\tau,v) + \mathcal{J}^{(3)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v)\\
+ \tau\mathcal{J}^{(4)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(1,2)}(\tau,\kappa,v) + \frac{1}{2}(\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v))^2\left(\mathcal{R}^{(2,2)}(\tau,\kappa,v) - (\mathcal{R}^{(1,1)}(\tau,\kappa,v))^2\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v)\right)\Big) + O(\xi^3).
\end{aligned}$$

Demonstração. Queremos escrever

$$\hat{\sigma}(\tau,\kappa,v)^2 = \mathcal{V}(\tau,v) + \xi\psi_1(\tau,\kappa,v) + \xi^2\psi_2(\tau,\kappa,v) + O(\xi^3)$$

para certas funções ψ_1 e ψ_2. Note que, pela definição de variância implícita,

$$C_2(\tau,S,v) = C^{BS}(S,\tau,\hat{\sigma}^2(\tau,\kappa,v)),$$

e que pela aproximação de Taylor de segunda ordem,

$$
\begin{aligned}
C^{BS}(S,\tau,\hat{\sigma}(\tau,\kappa,v)) &\approx C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)+\xi\psi_1(\tau,\kappa,v)+\xi^2\psi_2(\tau,\kappa,v)) \approx \\
&\approx C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)) + (\xi\psi_1(\tau,\kappa,v)+\xi^2\psi_2(\tau,\kappa,v))\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))+ \\
&+ \frac{1}{2}(\xi\psi_1(\tau,\kappa,v)+\xi^2\psi_2(\tau,\kappa,v))^2\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial v^2}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)) \approx \\
&\approx C^{BS}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v)) + \xi\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))\psi_1(\tau,\kappa,v)+ \\
&+ \frac{\xi^2}{2}\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))\left(\psi_1^2(\tau,\kappa,v)\frac{\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial v^2}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}+2\psi_2(\tau,\kappa,v)\right).
\end{aligned}
$$

Então, pelo teorema anterior

$$\psi_1(\tau,\kappa,v)=\frac{1}{\tau}\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(1,1)}(\tau,\kappa,v),$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\psi_1^2(\tau,\kappa,v)\frac{\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial v^2}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}+2\psi_2(\tau,\kappa,v)\right) = \frac{2}{\tau^2}\Big(\tau\mathcal{J}^{(2)}(\tau,v)+\Big(\mathcal{J}^{(3)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v)+ \\
&+\ \tau\mathcal{J}^{(4)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(1,2)}(\tau,\kappa,v)+\frac{1}{2}(\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v))^2\mathcal{R}^{(2,2)}(\tau,\kappa,v)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v)=\frac{\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial v^2}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial v}(S,\tau,\mathcal{V}(\tau,v))}.$$

Logo, resolvendo a equação para ψ_2, temos que

$$
\begin{aligned}
\psi_2(\tau,\kappa,v) = \frac{1}{\tau^2}\Big(&\tau\mathcal{J}^{(2)}(\tau,v)+\mathcal{J}^{(3)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v)+\tau\mathcal{J}^{(4)}(\tau,v)\mathcal{R}^{(1,2)}(\tau,\kappa,v)+ \\
&+\frac{1}{2}(\mathcal{J}^{(1)}(\tau,v))^2\left(\mathcal{R}^{(2,2)}(\tau,\kappa,v)-(\mathcal{R}^{(1,1)}(\tau,\kappa,v))^2\mathcal{R}^{(2,0)}(\tau,\kappa,v)\right)\Big).
\end{aligned}
$$

donde o teorema segue. □

Exemplo 4.81 (Modelo de Black-Scholes com Volatilidade Determinística)**.** Nesse modelo, supomos $\xi=0$, ou seja, que

$$d\nu_t=\tilde{\alpha}(\nu_t)dt.$$

Portanto

$$\hat{\sigma}(\tau,v)=\mathcal{V}(\tau,v)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau Y(u;v)du,$$

onde

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{du}(u) = \tilde{\alpha}(Y(u)), \\ \\ Y(0) = v. \end{cases}$$

Exemplo 4.82 (Modelo de Heston)**.** Como já vimos, esse modelo supõe, sob P^*, a seguinte dinâmica para a variância

$$d\nu_t = \kappa(\nu_t - \overline{\nu})dt + \xi\sqrt{\nu_t}d\widetilde{W}_t.$$

Então

$$\tilde{\alpha}(y) = \kappa(\overline{\nu} - y) \quad \text{e} \quad \eta(y) = \sqrt{y},$$

que, depois de alguns cálculos, nos dá

$$Y(\tau; v) = \overline{\nu} + (v - \overline{\nu})e^{-\kappa\tau} \ , \quad \phi(\tau, v) = \frac{1 - e^{\kappa\tau}}{\kappa} \ , \quad \mathcal{V}(\tau, v) = \overline{\nu} + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}(v - \overline{\nu}).$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(1)}(\tau, v) &= \frac{\rho}{\kappa}\left(\tau Y(\tau; v) - \frac{v}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau})\right), \\
\mathcal{J}^{(2)}(\tau, v) &= 0, \\
\mathcal{J}^{(3)}(\tau, v) &= \frac{1}{2\kappa}\left(\tau Y(\tau; v) - \frac{v}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau})\right), \\
\mathcal{J}^{(4)}(\tau, v) &= \frac{\rho^2}{\kappa}\left(\frac{\overline{\nu}}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau} - \tau e^{-\kappa\tau}) + (v - \overline{\nu})\left(\tau^2 e^{-\kappa\tau} + \frac{\tau}{\kappa}e^{-\kappa\tau} - \frac{1}{\kappa^2}(1 - e^{-\kappa\tau})\right)\right).
\end{aligned}$$

Apesar da aparência das fórmulas acima, elas podem ser facilmente calculadas. Para $v = \overline{\nu}$, as fórmulas ficam muito mais simples, e assim, temos, negligenciando termos de ordem maior que ξ

$$\frac{\partial\hat{\sigma}^2}{\partial\kappa}(\kappa, \tau, \overline{\nu}) = \frac{\rho\xi}{\kappa\tau}\left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right)$$

4.5 O Índice VIX

Primeiramente, suponha que o ativo S, sob a medida neutra ao risco P^*, seja um processo de Itô da forma

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t,$$

Vamos supor ainda que $e^{rt}S_t$ é um P^*martingal. Agora relembre-se da Proposição 2.35:

Proposição. *Seja f uma função de classe C^2. Então, para todos K e S reais positivos*

$$f(S) = f(K) + f'(K)(S - K) + \int_0^K f''(x)(x - S)^+ dx + \int_K^{+\infty} f''(x)(S - x)^+ dx.$$

Considere um contrato com maturidade T e *payoff* $\ln(S_T/F)$ onde $F = F_T = e^{rT}S_0$. Esse contrato é conhecido como log-contrato. Aplicando a proposição acima com $f(x) = \ln(x/F)$, temos que

$$\ln\left(\frac{S_T}{F}\right) = \frac{1}{F}(S_T - F) - \int_0^F \frac{1}{x^2}(x - S_T)^+ dx - \int_F^{+\infty} \frac{1}{x^2}(S_T - x)^+ dx.$$

Agora, tomando $\mathbb{E}_{P^*}$ de ambos os lados da equação acima e denotando por $\tilde{C}$ e $\tilde{P}$ os preços da call e da put não-descontados, temos, usando o fato de S_T ser um P^*-martingal quando descontado, que

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[\ln\left(\frac{S_T}{F}\right)\right] = -\int_0^F \frac{1}{x^2}\tilde{P}(T,x)dx - \int_F^{+\infty}\frac{1}{x^2}\tilde{C}(T,x)dx.$$

Note agora que, pela fórmula de Itô

$$\ln\left(\frac{S_T}{F}\right) - \ln\left(\frac{S_0}{F}\right) = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2 dt$$

e, logo,

$$\ln\left(\frac{S_T}{F}\right) = \int_0^T \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2 dt$$

Portanto

$$\mathbb{E}_{P^*}\left[\int_0^T \sigma_t^2 dt\right] = -2\mathbb{E}_{P^*}\left[\ln\left(\frac{S_T}{F}\right)\right] = 2\left\{\int_0^F \frac{1}{x^2}\tilde{P}(T,x)dx + \int_F^{+\infty}\frac{1}{x^2}\tilde{C}(T,x)dx\right\} \tag{4.10}$$

O índice VIX, criado em 1993 pela Bolsa de Valores de Chicago (CBOE, em inglês), foi desenvolvido para medir as expectativas do mercado sobre a volatilidade a curto prazo que é transmitida pelas opções vanilla sobre o índice S&P 500. Note que, portanto, esse índice é uma volatilidade implícita nesses preços. Hoje em dia, esse índice é a medida padrão da volatilidade utilizada no mercado americano. Para maiores detalhes, veja [11]. Seja F o preço forward do índice S&P 500 e suponha que temos nesse mercado n calls $C_1, \ldots, C_n$ e n puts $P_1, \ldots, P_n$ com os mesmos preços de exercíco $K_1, \ldots, K_n$ e mesma maturidade T e suponha que não há spread nesse mercado. Agora defina, para $i = 1, \ldots, n$,

$$Q_i = \begin{cases} C_i\ , & \text{se} \quad K_i > F, \\ P_i\ , & \text{se} \quad K_i < F, \end{cases}$$

e seja K^* o maior preço de exercício abaixo de F. Nesse caso, a fórmula para o cálculo do VIX é

$$VIX^2 = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{rT}Q_i - \frac{1}{T}\left(\frac{F}{K_0} - 1\right)^2,$$

onde, para $i = 2, \ldots, n-1$

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$$

e $\Delta K_1 = K_2 - K_1$ e $\Delta K_1 = K_n - K_{n-1}$. Vamos mostrar agora que a fórmula do VIX é somente uma discretização inteligente da equação (4.10). Para isso, defina

$$Q(K) = \begin{cases} C(T,K)\ , & \text{se} \quad K > K^*, \\ P(T,K)\ , & \text{se} \quad K < K^*, \end{cases}$$

e note que, pela definição do VIX, queremos que $\sigma_t = VIX$ para $t \in [0,T]$. Então, por (4.10), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{VIX^2 T}{2} &= \int_0^F \frac{1}{x^2}\tilde{P}(T,x)dx + \int_F^{+\infty}\frac{1}{x^2}\tilde{C}(T,x)dx\ = \\
&= \int_0^{K^*}\frac{1}{x^2}\tilde{P}(T,x)dx + \int_{K^*}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\tilde{C}(T,x)dx + \int_{K^*}^{F}\frac{1}{x^2}(\tilde{P}(T,x) - \tilde{C}(T,x))dx = \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{rT}Q(T,x)dx + \int_{K^*}^{F}\frac{1}{x^2}(x-F)dx,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a definição de Q e paridade put-call. Então, claramaente, a fórmula para o VIX pode ser obtida discretizando a última equação acima.

Capítulo 5

Método de Fourier para Estimativa da Volatilidade

Para finalizarmos, nesse capítulo iremos expor uma metodologia para mensurarmos a volatilidade de uma série de preços. A referência aqui é o artigo [36] e o livro [37]. Iremos ainda desenvolver um método para estimarmos os parâmetetros do modelo de Heston dado somente um conjunto de dados do preço do ativo, cuja referência é [38].

5.1 Caso Univariado

Hipóteses. Suponha que a dinâmica do preço S seja, em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, P)$, um processo de Itô contínuo da forma

$$dS_t = \mu(\omega, t)dt + \sigma(\omega, t)dW_t,$$

para $t \in [0, T]$, e defina a *função de volatilidade* do processo S como

$$\Sigma(t) = \Sigma(\omega, t) = \sigma^2(\omega, t).$$

Vamos supor ainda que $\Sigma(t)$ é contínua e que, para cada $\omega \in \Omega$, $\mu(\omega, t) \in L^2([0, T])$.

Definição 5.1 (Coeficiente de Fourier de Σ)**.** Definiremos os coeficientes de Fourier da função Σ em $[0, T]$ como

$$\begin{aligned}
a_0(\Sigma) &= \frac{1}{T}\int_0^T \Sigma(t)dt, \\
a_k(\Sigma) &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\Sigma(t)dt, \\
b_k(\Sigma) &= \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\Sigma(t)dt,
\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Definição 5.2 (Coeficiente de Fourier de dS)**.** Definiremos os coeficientes de Fourier de dS em $[0, T]$ como

$$a_0(dS) = \frac{1}{T}\int_0^T dS_t,$$
$$a_k(dS) = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dS_t,$$
$$b_k(dS) = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dS_t,$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Lema 5.3. *Sejam $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, funções determinísticas e defina*

$$X_t^i = \int_0^t f_i(s) dS_s.$$

Então

$$\mathbb{E}_P[X_t^i] = 0,$$
$$\beta_{i,j} \equiv \mathbb{E}_P[X_t^i X_t^j] = \int_0^t f_i(s) f_j(s) \mathbb{E}_P[\Sigma(\omega, s)] ds,$$
$$\mathbb{E}_P[X_t^1 X_t^2 X_t^3 X_t^4] = \int_0^t \int_0^t f_1(s) f_2(s) f_3(u) f_4(u) \mathbb{E}_P[\Sigma(\omega, s)\Sigma(\omega, u)] duds +$$
$$+ \int_0^t \int_0^t f_1(s) f_3(s) f_2(u) f_4(u) \mathbb{E}_P[\Sigma(\omega, s)\Sigma(\omega, u)] duds +$$
$$+ \int_0^t \int_0^t f_1(s) f_4(s) f_2(u) f_3(u) \mathbb{E}_P[\Sigma(\omega, s)\Sigma(\omega, u)] duds.$$

Demonstração. A primeira igualdade é óbvia e a segunda segue da Isometria de Itô. Vamos então nos preocupar com a terceira. Defina $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$. Pela fórmula de Itô

$$X_t^1 X_t^2 X_t^3 X_t^4 = \sum_{i=1}^4 \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_s^1, X_s^2, X_s^3, X_s^4) dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, X_s^2, X_s^3, X_s^4) dX_s^i dX_s^j.$$

Note que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 0\ , & \text{se} \quad i = j, \\ x_k x_m\ , & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Então, está claro que para calcularmos $\mathbb{E}_P[X_t^1 X_t^2 X_t^3 X_t^4]$ basta calcularmos

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^t X_s^i X_s^j dX_s^k dX_s^n\right].$$

Agora note que

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^t X_s^i X_s^j dX_s^k dX_s^n\right] = \mathbb{E}_P\left[\int_0^t X_s^i X_s^j f_k(s) f_n(s) \Sigma(\omega, s) ds\right] = \int_0^t f_k(s) f_n(s) \mathbb{E}_P[X_s^i X_s^j \Sigma(\omega, s)] ds.$$

Mas como

$$\mathbb{E}_P[X_s^i X_s^j \Sigma(\omega, s)] = \int_0^s f_i(u) f_j(u) \mathbb{E}_P[\Sigma(\omega, s)\Sigma(\omega, u)] du,$$

temos então que

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^t X_s^i X_s^j dX_s^k dX_s^n\right] = \int_0^t \int_0^s f_k(s) f_n(s) f_i(u) f_j(u) \mathbb{E}_P[\Sigma(\omega,s)\Sigma(\omega,u)] du ds.$$

Logo, aplicando o Teorema de Fubini e fazendo uma mudança de variável, concluimos que

$$\mathbb{E}_P\left[\int_0^t X_s^i X_s^j dX_s^k dX_s^n\right] + \mathbb{E}_P\left[\int_0^t X_s^k X_s^n dX_s^i dX_s^j\right] = \int_0^t \int_0^t f_k(s) f_n(s) f_i(u) f_j(u) \mathbb{E}_P[\Sigma(\omega,s)\Sigma(\omega,u)] du ds,$$

de onde segue a terceira igualdade do lema. □

O teorema a seguir, devido a Malliavin e Mancino, [36], fornece uma relação entre os coeficientes de Fourier de Σ e dS. Ele também pode ser encontrado, com uma outra demonstração, em [37].

Teorema 5.4. *Para $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo, os coeficientes de Fourier de Σ têm a seguinte representação*

$$\begin{aligned}
a_0(\Sigma) &= \lim_{N\to\infty} \frac{T/2}{N+1-n_0} \sum_{k=n_0}^{N} \frac{1}{2}(a_k^2(dS) + b_k^2(dS)),\\
a_q(\Sigma) &= \lim_{N\to\infty} \frac{T/2}{N+1-n_0} \sum_{k=n_0}^{N} (a_k(dS)a_{k+q}(dS) + b_k(dS)b_{k+q}(dS)),\\
b_q(\Sigma) &= \lim_{N\to\infty} \frac{T/2}{N+1-n_0} \sum_{k=n_0}^{N} (a_k(dS)b_{k+q}(dS) + b_k(dS)a_{k+q}(dS)),
\end{aligned}$$

onde as convergências acima são em $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Demonstração. Vamos supor primeiro que $\mu \equiv 0$. Para cada $\omega_0 \in \Omega$, considere a realização do processo de preço, $S_t(\omega_0)$, e um espaço de probabilidade auxiliar $(\Omega', \mathcal{A}', \mathcal{F}_t', P')$ com um movimento browniano W_t'. Defina agora, nesse espaço, o processo $Y_t^{\omega_0}$ satisfazendo

$$dY_t^{\omega_0} = \sigma(\omega_0, t) dW_t'.$$

Para não carregar a notação, faça $dX_t = dY_t^{\omega_0}$. Note que $\sigma(\omega_0, t)$ é determinística no espaço auxiliar e que, portanto, nesse mesmo espaço

$$G_k = a_k(dX) \sim \mathcal{N}\left(0\ ,\ \frac{4}{T^2}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\Sigma(t)dt\right)$$

e

$$\beta_{k,m} \equiv \mathbb{E}_{P'}[G_k G_m] = \frac{4}{T^2}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\Sigma(t)dt.$$

Note ainda que como Σ é contínua, $\Sigma \in L^2([0,T])$ e vale a igualdade de Parseval

$$||\Sigma||_{L^2}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2(\Sigma) + b_k^2(\Sigma) < +\infty.$$

Agora, usando a identidade trigonométrica

$$\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi(k-m)t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(k+m)t}{T}\right)\right),$$

temos que

$$\mathbb{E}_{P'}[G_k G_m] = \frac{1}{T}\left(a_{|k-m|}(\Sigma) + a_{k+m}(\Sigma)\right).$$

Então, para $q, N \in \mathbb{N}$, defina

$$U_N^q = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G_k G_{k+q}.$$

Logo

$$\mathbb{E}_{P'}[U_N^q] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}_{P'}[G_k G_{k+q}] = \frac{1}{N}\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} a_q(\Sigma) + a_{2k+q}(\Sigma) = \frac{1}{T}a_q(\Sigma) + R_N.$$

onde, pela igualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|R_N| = \frac{1}{N}\frac{1}{T}|\sum_{k=1}^{N} a_{2k+q}(\Sigma)| \leq \frac{1}{N}\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}|a_{2k+q}(\Sigma)| \leq \\ \leq \frac{1}{N}\frac{1}{T}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{2k+q}^2(\Sigma)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N} 1^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{T}||\Sigma||_{L^2}.\end{aligned}$$

Então

$$\mathbb{E}_{P'}[U_N^q] \to \frac{1}{T}a_q(\Sigma)\ , \quad \text{quando} \quad N \to +\infty.$$

A idéia agora é calcular a variância de U_N^q e mostrar que ela converge para 0 quando $N \to +\infty$. Para isso, note que

$$\mathrm{Var}_{P'}(U_N^q) = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\mathbb{E}_{P'}[\overline{G_k G_{k+q} G_m G_{m+q}}],$$

onde $\overline{G_k G_{k+q}} = G_k G_{k+q} - \beta_{k,k+q}$. Temos ainda a seguinte fórmula para o momento de quarta ordem para variáveis com distribuição normal com média 0, que pode ser derivada a partir do Lema 5.3,

$$\mathbb{E}_{P'}[G_k G_{k+q} G_m G_{m+q}] = \beta_{k,k+q}\beta_{m,m+q} + \beta_{k,m}\beta_{k+q,m+q} + \beta_{k,m+q}\beta_{m,k+q}. \tag{5.1}$$

Então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P'}[\overline{G_k G_{k+q} G_m G_{m+q}}] = \mathbb{E}_{P'}[\overline{G_k G_{k+q} G_m G_{m+q}}] - \mathbb{E}_{P'}[\overline{G_k G_{k+q}}\beta_{m,m+q}] - \mathbb{E}_{P'}[\beta_{k,k+q}\overline{G_m G_{m+q}}] \\ + \beta_{k,k+q}\beta_{m,m+q} = \beta_{k,k+q}\beta_{m,m+q} + \beta_{k,m}\beta_{k+q,m+q} + \beta_{k,m+q}\beta_{m,k+q} - \\ - \beta_{m,m+q}\beta_{k,k+q} - \beta_{k,k+q}\beta_{m,m+q} + \beta_{k,k+q}\beta_{m,m+q} = \beta_{k,m}\beta_{k+q,m+q} + \beta_{k,m+q}\beta_{m,k+q}.\end{aligned}$$

Escrevendo β em função dos a_k's, fica fácil ver que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{m=1}^{N}\mathbb{E}_{P'}[\overline{G_k G_{k+q} G_m G_{m+q}}] \leq C||\Sigma||_{L^2}^2.$$

Logo,

$$\mathrm{Var}_{P'}((U_N^q)^2) = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\mathbb{E}_{P'}[\overline{G_k G_{k+q} G_m G_{m+q}}] \leq \frac{1}{N^2} C \sum_{k=1}^{n} ||\Sigma||_{L^2}^2 = C\frac{1}{N}||\Sigma||_{L^2}^2,$$

que converge a 0 quando N tende para infinito. Portanto

$$U_N^q \to \frac{1}{T}a_q(\Sigma) \quad \text{quando} \quad N \to +\infty,$$

onde a convergência acima é em $L^2(\Omega', \mathcal{A}', P')$. De forma análoga, é possível mostrar que

$$V_N^q \to \frac{1}{T}b_q(\Sigma) \quad \text{quando} \quad N \to +\infty,$$
$$U_N^0 \to \frac{4}{T}a_0(\Sigma) \quad \text{quando} \quad N \to +\infty,$$

onde $V_N^q = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(dX)b_{k+q}(dX)$ e $U_N^0 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k^2(dX) + b_k^2(dX)$. Agora defina

$$G_k' = b_k(dX) \sim \mathcal{N}\left(0\ ,\ \frac{4}{T^2}\int_0^T \mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\Sigma(t)dt\right)$$

e

$$\alpha_{k,m} \equiv \mathbb{E}_{P'}[G_k' G_m'] = \frac{4}{T^2}\int_0^T \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)\Sigma(t)dt.$$

Note ainda que

$$\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi(k-m)t}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(k+m)t}{T}\right)\right)$$

e, portanto, assim como no caso do G_k,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G_k' G_{k+q}' \overset{L^2(P')}{\longrightarrow} \frac{1}{T}a_q(\Sigma).$$

Repetindo isso de forma análoga para as outras seqüências e introduzindo o fator de corte n_0, temos que

$$a_0(\Sigma) = \lim_{N\to\infty}\frac{T/2}{N+1-n_0}\sum_{k=n_0}^{N}\frac{1}{2}(a_i^2(dX) + b_i^2(dX)),$$
$$a_k(\Sigma) = \lim_{N\to\infty}\frac{T/2}{N+1-n_0}\sum_{i=n_0}^{N}(a_i(dX)a_{i+k}(dX) + b_i(dX)b_{i+k}(dX)),$$
$$b_k(\Sigma) = \lim_{N\to\infty}\frac{T/2}{N+1-n_0}\sum_{i=n_0}^{N}(a_i(dX)b_{i+k}(dX) + b_i(dX)a_{i+k}(dX)),$$

com as convergências acima em $L^2(\Omega', \mathcal{A}', P')$. Logo, precisamos mostrar que convergência dos coeficientes de Fourier de dX nesse espaço implica a convergência dos coeficientes de dS em $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Primeiramente, note que como

$$\mathbb{E}_{P'}\left[(TU_N^q - a_q(\Sigma))^2\right] \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o Teorema da Convergência Dominada nos diz que

$$\mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_{P'}\left[(TU_N^q - a_q(\Sigma))^2\right]\right] \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A idéia agora é mostrar que

$$\mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_{P'}\left[(TU_N^q - a_q(\Sigma))^2\right]\right] = \mathbb{E}_P\left[(T\tilde{U}_N^q - a_q(\Sigma))^2\right], \tag{5.2}$$

onde

$$\tilde{U}_N^q = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \tilde{G}_k\tilde{G}_{k+q},$$

com $\tilde{G}_k = a_k(dS)$. Comparando o Lema 5.3 com (5.1), fica claro que

$$\mathbb{E}_P[\tilde{G}_k\tilde{G}_{k+q}\tilde{G}_m\tilde{G}_{m+q}] = \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_{P'}[G_kG_{k+q}G_mG_{m+q}]].$$

Segue também do Lema 5.3 que

$$\mathbb{E}_P[\tilde{G}_k\tilde{G}_{k+q}] = \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_{P'}[G_kG_{k+q}]].$$

Juntando as duas igualdades acima com o fato de que $a_q(\Sigma)$ é constante com respeito a P', podemos facilmente verificar (5.2). Agora, para concluirmos o teorema para $\mu \equiv 0$, basta notar que os passos acima podem também ser aplicados aos outros dois casos, $a_0(\Sigma)$ e $b_k(\Sigma)$.

Caso μ não seja identicamente nula, considere a seguinte notação

$$dU_t = \sigma(\omega_0, t)dW'_t.$$

Então

$$a_k(dX) = a_k(dU) + a_k(\tilde{\mu}),$$

onde $\tilde{\mu}(t) = \mu(\omega_0, t)$ e $dX_t = \mu(\omega_0, t)dt + dU_t$. Pelo que acabamos de ver sobre a relação entre as convergências nos espaços $L^2(\Omega', \mathcal{F}'_t, P')$ e $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, basta mostrarmos que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(dX)a_{k+q}(dX) \overset{L^2(P')}{\longrightarrow} \frac{1}{T}a_k(\Sigma).$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(dX)a_{k+q}(dX) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(dU)a_{k+q}(dU) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(dU)a_{k+q}(\tilde{\mu}) + \\ + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(\tilde{\mu})a_{k+q}(dU) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(\tilde{\mu})a_{k+q}(\tilde{\mu}).\end{aligned}$$

Agora, note que, pelo caso $\mu \equiv 0$,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(dU)a_{k+q}(dU) \overset{L^2(P')}{\longrightarrow} \frac{1}{T}a_k(\Sigma).$$

Por outro lado,

$$\left\| \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(dU)a_{k+q}(\tilde{\mu}) \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_{k+q}^2(\tilde{\mu})\mathbb{E}_{P'}[a_k^2(dU)] =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_{k+q}^2(\tilde{\mu})\frac{4}{T^2}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\Sigma(t)dt \leq$$
$$\leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_{k+q}^2(\tilde{\mu})\frac{4}{T^2}a_0(\Sigma) \leq \frac{1}{N}\frac{4}{T^2}a_0(\Sigma)\|\tilde{\mu}\|_{L^2}^2 \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde a última desigualdade segue a igualdade de Parseval. Aplicando essa igualdade novamente, temos que

$$\left\| \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k(\tilde{\mu})a_{k+q}(\tilde{\mu}) \right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k(\tilde{\mu})a_{k+q}(\tilde{\mu})\right)^2 \leq$$
$$\leq \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2(\tilde{\mu})}{2} + \frac{a_{k+q}^2(\tilde{\mu})}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{N^2}\|\tilde{\mu}\|_{L^2}^4 \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Obviamente os outros dois coeficientes seguem de forma análoga. Portanto, finalmente, concluimos o teorema. □

5.2 Caso Multivariado

Hipóteses. Nesse caso iremos supor que a dinâmica do preço S^i seja, para cada $i = 1, \ldots, n$, um processo de Itô contínuo da forma

$$dS_t^i = \mu^i(\omega, t)dt + \boldsymbol{\sigma}^i(\omega, t)d\mathbf{W}_t,$$

para $t \in [0, T]$, onde $\mathbf{W}$ é um movimento Browniano d-dimensional e $\boldsymbol{\sigma}^i \in \mathbb{R}^d$ contínua em $[0, T]$. Aqui, iremos definir a *função de volatilidade* entre os processo S^i e S^j como

$$\Sigma_{i,j}(t) = \Sigma_{i,j}(\omega, t) = \boldsymbol{\sigma}^i(\omega, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}^j(\omega, t).$$

Faremos as mesmas hipóteses para $\Sigma_{i,j}$ e μ^i que no caso univariado.

Com uma simples aplicação da identidade de polarização, podemos demonstrar a seguinte versão multidimensional do Teorema 5.4

Teorema 5.5. *Para $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo, os coeficientes de Fourier de $\Sigma_{i,j}$ têm a seguinte representação*

$$a_0(\Sigma_{i,j}) = \lim_{N\to\infty} \frac{T/2}{N+1-n_0}\sum_{k=n_0}^{N} \frac{1}{2}(a_k(dS^i)a_k(dS^j) + b_k(dS^i)b_k(dS^j)),$$
$$a_q(\Sigma_{i,j}) = \lim_{N\to\infty} \frac{T/2}{N+1-n_0}\sum_{k=n_0}^{N} (a_k(dS^i)a_{k+q}(dS^j) + b_k(dS^i)b_{k+q}(dS^j)),$$
$$b_q(\Sigma_{i,j}) = \lim_{N\to\infty} \frac{T/2}{N+1-n_0}\sum_{k=n_0}^{N} (a_k(dS^i)b_{k+q}(dS^j) + b_k(dS^i)a_{k+q}(dS^j)),$$

onde as convergências acima são em $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Observação 5.6 (Variação Quadrática e Cruzada)**.** Note que

$$a_0(\Sigma_{i,i}) = \frac{1}{T}\langle S^i\rangle_T \quad \text{e} \quad a_0(\Sigma_{i,j}) = \frac{1}{T}\langle S^i, S^j\rangle_T,$$

e com isso temos uma possível estimativa para a varição quadrática e cruzada usando o Teorema 5.5 para determinarmos o primeiro coeficiente de Fourier dos processos em questão.

5.3 Reconstrução da Função de Volatilidade

A teoria de séries de Fourier nos fornece uma maneira de reconstruirmos a função de volatilidade. Primeiramente defina

$$\Sigma^n_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(\delta k)\left(a_k(\Sigma_{i,j})\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k(\Sigma_{i,j})\text{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right),$$

onde $\delta > 0$, $\varphi(x) = \text{sen}^2(x)/x^2$ e $b_0 = 0$. A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [17].

Teorema 5.7 (Teorema de Féjer)**.** *Suponha que $\Sigma_{i,j}$ seja contínua em $[0,T]$. Então*

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma^n_{i,j}(t) = \Sigma_{i,j}(t)$$

uniformemente em $[0,T]$ e $\Sigma^n_{i,j} \geq 0$. Temos ainda que

$$|\Sigma^n_{i,j}(t) - \Sigma_{i,j}(t)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Observação 5.8. O parâmetro δ serve para suavizar a aproximação $\Sigma^n_{i,j}(t)$. Quanto menor o δ, menos suave é a aproximação.

No Plano Complexo

Se definirmos

$$A_k(\Sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(a_k(\Sigma) - ib_k(\Sigma)) \ , & \text{se} \quad k \geq 1, \\ \\ a_0(\Sigma) \ , & \text{se} \quad k = 0, \\ \\ \dfrac{1}{2}(a_{|k|}(\Sigma) + ib_{|k|}(\Sigma)) \ , & \text{se} \quad k \leq -1, \end{cases}$$

então teremos a seguinte fórmula para a série de Fourier sem a suavização φ:

$$\Sigma^n_{i,j}(t) = \sum_{k=-n}^{n} A_k(\Sigma)e^{\frac{ik2\pi t}{T}}.$$

5.4 Implementação do Método

No mundo real, é possível ter somente uma quantidade finita de observações para o processo S; vamos denotar os instantes em que elas ocorrem por $\{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = T\}$. Agora, note que aplicando a fórmula de integração por parte para a integral de Itô, temos que

$$a_k(dS) = \frac{2}{T}\frac{2\pi k}{T}\int_0^T \text{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) S_t dt + \frac{2}{T}(S_T - S_0),$$
$$b_k(dS) = -\frac{2}{T}\frac{2\pi k}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) S_t dt.$$

Vamos considerer a seguinte interpolação constante por partes para S

$$S_t = \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}\chi_{[t_i,t_{i+1})}(t).$$

Com isso, as fórmulas acima ficam ainda mais simples

$$a_k(dS) = \frac{2}{T}\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}\left(\cos\left(\frac{2\pi kt_{i+1}}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi kt_i}{T}\right)\right) + \frac{2}{T}(S_T - S_0),$$
$$b_k(dS) = -\frac{2}{T}\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}\left(\text{sen}\left(\frac{2\pi kt_{i+1}}{T}\right) - \text{sen}\left(\frac{2\pi kt_i}{T}\right)\right).$$

5.5 Aplicação - Estimativa dos Parâmetros do Modelo de Heston

Vamos considerar agora o modelo de Heston sob a medida P, mas olharemos para o log-preço, ou seja, temos o seguinte sistema de EDE para $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} dX_t = \left(\mu - \dfrac{\nu_t}{2}\right)dt + \sqrt{\nu_t}dW_t, \\ \\ d\nu_t = \kappa^*(\overline{\nu}^* - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}d\widehat{W}_t, \end{cases}$$

onde W e $\widehat{W}$ são dois movimentos brownianos em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ com $d[W, \widehat{W}]_t = \rho dt$. Como em toda essa seção estaremos considerando esse modelo, vamos suprimir o $*$ nos parâmetros acima. Suponha que temos uma quantidade discreta de observações do processo X e denote as funções de volatilidade do log-preço, da volatilidade e o do processo bivariado (X, ν) por Σ_X, Σ_ν e $\Sigma_{X,\nu}$, respectivamente. Note que no nosso caso $\Sigma_X(t) = \nu_t$ e $\Sigma_\nu(t) = \xi^2\nu_t$. Vamos ainda denotar o vetor de parâmetros por $\Xi = (\xi, \rho, \kappa, \overline{\nu}, \mu)$. A estimativa consiste nos seguintes passos:

- Para um δ fixo, nós reconstruimos ν_t pelo método de Fourier descrito nas seções anteriores.
- Pela Observação 5.6, $\langle\nu\rangle_T = \xi^2\langle X\rangle_T$. Então, uma estimativa para ξ segue da seguinte igualdade

$$\xi^2 = \frac{\langle\nu\rangle_T}{\langle X\rangle_T} = \frac{a_0(\Sigma_\nu)}{a_0(\Sigma_X)}.$$

- Conhecendo ξ, nós temos um estimador para ρ usando a variação cruzada. De fato, segue do modelo que

$$\langle X, \nu\rangle_T = \xi\rho\int_0^T \nu_t dt = \xi\rho\langle X\rangle_T.$$

Novamente pela Observação 5.6, temos a seguinte fórmula para ρ:

$$\rho = \frac{a_0(\Sigma_{X,\nu})}{\xi a_0(\Sigma_X)}.$$

• Os parâmetros que ainda restam no processo ν podem ser estimados, agora tendo em vista as observações discretas, maximizando-se a log-verossimilança do processo de volatilidade

$$L_\nu(\kappa, \overline{\nu}) = \sum_{i=0}^{n-1} \log p\left(\nu_{t_{i+1}} \mid \nu_{t_i}, \kappa, \overline{\nu}, \xi\right).$$

já que, pelo que vimos em 4.3.1, a densidade de transição do processo de volatilidade tem uma fórmula exata.
• Na EDE que descreve o log-preço X só temos um parâmetro para ser estimado. Agora, pelo que vimos na Seção 4.1.6, a distribuição de X_t dado X_s, $\mathcal{F}_T$ e Ξ é normal com média

$$X_s + \mu(t-s) - \frac{1}{2}\int_s^t \nu_u du + \rho \int_s^t \sqrt{\nu_u} dW_u$$

e variância

$$(1-\rho^2)\int_s^t \nu_u du,$$

onde $\mathcal{F}_T$ é a σ-álgebra gerada pelo processo ν até o tempo T. Note que a EDE de ν implica que

$$\int_s^t \sqrt{\nu_u} dW_u = \frac{1}{\xi}\left(\nu_t - \nu_s - \kappa \int_s^t (\overline{\nu} - \nu_u)\, du\right). \tag{5.3}$$

Agora, já que a log-verossimilança para o processo X pode ser escrita como

$$L_X(\mu) = \sum_{i=0}^{n-1} \log p\left(X_{t_{i+1}} \mid X_{t_i}, \mathcal{F}_T, \Xi\right),$$

onde p é a densidade normal com média e variância descritas acima, podemos determinar, discretizando (5.3) e todas as outra integrais envolvidadas, uma aproximação para o estimador de máxima verossimilhança de μ é

$$\widehat{\mu} = \frac{2\xi\widetilde{X} + T(\xi - 2\kappa\rho) - 2\rho\widetilde{\nu} + 2\rho\kappa\overline{\nu}\widetilde{t}}{2\xi\widetilde{t}},$$

onde

$$\widetilde{X} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_{t_{i+1}} - X_{t_i}}{\nu_{t_i}}, \quad \widetilde{\nu} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\nu_{t_{i+1}} - \nu_{t_i}}{\nu_{t_i}} \text{ e } \quad \widetilde{t} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{\nu_{t_i}}.$$

Vale notar que todos os estimadores acima dependem de δ. Para detalhes sobre como escolher esse parâmetro, veja [38].

Referências Bibliográficas

[1] Yacine Aït-sahalia, *Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities*. Econometrica **64** (1996), 527–560.

[2] Hansjörg Albrecher, Philipp Mayer, Win Schoutens, Jurgen Tistaert, *The Little Heston Trap*, Wilmott Magazine, January (2007), 83–92.

[3] Leif B.G. Andersen, Vladimir V. Piterbarg, *Moment Explosion in Stochastic Volatility Models*, Stochastic and Finance **11** (2007) 29–50.

[4] Robert G. Bartle, "The Elements of Integration and Lebesgue Measure", Wiley-Interscience, 1995.

[5] H. Berestycki, J. Busca, I. Florent, *Asymptotics and Calibration of Local Volatility Models*, Quant. Finance **2** (2002), 61–69.

[6] Shalom Benaim, Peter Friz, *Regular Variation and Smile Asymptotics* (2006) `http://uk.arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0603/0603146v2.pdf`

[7] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, "Regular variation", Cambridge University Press, 1987.

[8] Fischer Black, Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy **81** (1973), 637–654.

[9] Hans Buehler, *Expensive Maringales*, Working Paper (2004) `http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=687272`

[10] Peter Carr, Dilip Madan, *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform*, Journal of Computacional Finance **2** (1999), 61–73.

[11] CBOE, *VIX - CBOE Volatility Index* (2003) `www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf`

[12] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr., Stephen A. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rate*, Econometrica **53** (1985), 358–408.

[13] Bruno Dupire, *Pricing with a Smile*, Risk **7** (1994) 18–20.

[14] Adrian A. Drăgulescu, Victor M. Yakovenko, *Probability Distribution of Returns in the Heston Model with Stochastic Volatility*, Quant. Finance **2** (2002), 443–453.

[15] Christian-Oliver Ewald, *Local Volatility in the Heston Model - A Malliavin Calculus Approach*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis **3** (2005), 307–322.

[16] Marcelo Fernandes, Marcelo Cunha Medeiros, Marcelo Scharth, *Modeling and predicting the CBOE market volatility index*, Paper provided by Department of Economics PUC-Rio (Brazil) in its Series "Textos para Discussão", **548** (2007) `http://ideas.repec.org/p/rio/texdis/548.html`

[17] Djairo Guedes de Figueiredo, "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", IMPA, 2007.

[18] Danielle Florens-Zmirou, *On Estimating the Diffusion Coefficient from Discrete Observations*, Journal of Applied Probability **30** (1993), 790–804.

[19] Jim Gatheral, "The Volatility Surface - A Practitioner's Guide", Wiley, 2006.

[20] Jim Gatheral, *A Parsimonious Arbitrage-Free Implied Volatility Parameterization with Application to the Valuation of Volatility Derivatives*, Presentation at the Global Derivatives and Risk Management Conference 2004.

[21] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, K. Ronnie Sircar, "Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility", Cambridge University Press, 2000.

[22] Avner Friedman, "Stochastic Differential Equation and Application", Vol. 1, Academic Press, 1975.

[23] Steven L. Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, The Review of Financial Studies **6** (1993), 327–343

[24] John C. Hull, "Options, Futures, and Other Derivatives", Prentice Hall, 2002.

[25] John C. Hull, Alan White, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, The Journal of Finance **42** (1987), 281–300.

[26] George J. Jiang, John L. Knigth, *A Nonparametric Approach to the Estimation of Diffusion Processes, with an Application to a Short-Term Interest Rate Model*, Econometric Theory **13** (1997), 615–645.

[27] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve, "Brownian Calculus and Stochastic Calculus", Springer-Verlag, 1988.

[28] Samuel Karlin, Howard M. Taylor, "A Second Course in Stochastic Processes", Academic Press, 1981.

[29] Fima Klebaner, *Option Price When the Stock is a Semimartingale*, Elect. Comm. in Probab. **7** (2002), 79–83.

[30] Fima Klebaner, "Introduction to Stochastic Calculus with Applications", Imperial College Press, 2004.

[31] Roger Lee, *Implied and Local Volatilities under Stochastic Volatility* Int. J. Theor. Appl. Finance **4** (2001), 45–89.

[32] Roger Lee, *The Moment Formula for Implied Volatility at Extreme Strikes*, Math. Finance **14** (2004), 468–480. `http://www.math.uchicago.edu/~rl/`

[33] Roger Lee, *Implied Volatility: Statics, Dynamics, and Probabilistic Interpretation*, Recent Advances in Applied Probability, Springer (2005), 241–267. `http://www.math.uchicago.edu/~rl/`

[34] Alan Lewis, "Option Valuation Under Stochastic Volatility - With Mathematica Code", Finance Press, 2000.

[35] Eugene Lukacs, "Characteristic Functions", Charles Griffin and Company Limited, 1960.

[36] Paul Malliavin, Maria Elvira Mancino, *Fourier Series Method for Measurement of Multivariate Volatilities*, Finance Stochast. **6** (2002), 49–61.

[37] Paul Malliavin, Anton Thalmaier, "Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance", Springer, 2005.

[38] Milan Merkle, Yuri F. Saporito, Rodrigo Targino, *Calibration of the Heston Model by Fourier Series Method*, to appear.

[39] Marek Musiela, Marek Rutkowski, "Martingale Methods in Financial Modelling", Springer, Second Edition, 2008.

[40] Bernt Øksendal, "Stochastic Differential Equations - An Introdution with Applications", Springer, Sixth Edition, 2007.

[41] Philip E. Protter, "Stochastic Integration and Differential Equations", Springer, 2005.

[42] Roberto Renò, *Nonparametric estimation of the diffusion coefficient of stochastic volatility models*, Econometric Theory **24** (2008), 1174–1206.

[43] L.C.G. Rogers, *Smooth transition densities for one-dimensional diffusions*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 157–161.

[44] Louis O. Scott, *Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rate - Applications of Fourier Inversion Methods*, Mathematical Finance **7** (1997), 413–424.

[45] Steven E. Shreve, "Stochastic Calculus for Finance II - Continuous-Time Models", Springer, 2004.

[46] K. Ronnie Sircar, George Papanicolaou, *Stochastic Volatility, Smile and Asymptotics*, Appl. Math. Finance **6** (1999), 107–145.

[47] J. Michael Steele, "Stochastic Calculus and Financial Application", Springer, 2003.

[48] E. Renault, N. Touzi *Option Hedging and Implicit Volatilities*, Math. Fin. **6** (1996), 279–302