UNIVERZITET U BEOGRADU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Ocenjivanje volatilnosti Itoovih slučajnih procesa

MASTER RAD

mentor:
Dr. Milan Merkle, redovni profesor

kandidat:
Dipl.inž.El. IrenaTešnjak

Beograd, 2010.

Sadržaj

Spisak korišćenih oznaka

Simbol/oznaka	Značenje
Prilog A	
$\sigma(X)$	σ–polje generisano slučajnom promenljivom X
$\lVert\pi\rVert$	Norma podele
$\limsup_{n\to\infty}\{A_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(A_k)$	Limes superior
supess f	Esencijalni supremum funkcije f
$V_g([a,b])$	Varijacija funkcije g na intervalu $[a,b]$
$[g,g](t)= [g](t)$	Kvadratna varijacija funkcije g na intervalu $[0,t]$
$[f,g](t)$	Kvadratna kovarijacija funkcija f i g na intervalu $[0,t]$
$[X,X](t)=[X,X]_t=[X]_t$	Kvadratna varijacija procesa X_t
$[X,Y](t)= [X,Y]_t$	Kvadratna kovarijacija procesa X_t i Y_t
$L^p(S,\Sigma,\mu)$	Prostor p-integrabilnih funkcija za $1\leq p< \infty$
$L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$	Prostor p-integrabilnih slučajnih promenljivih za $1\leq p< \infty$
$\lVert.\rVert_p$	Norma u prostoru L^p
$L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{F}\times\mathcal{B}([0,T]), P\otimes t)$	Prostor kvadratno integrabilnih procesa
$\langle f,g\rangle := \int_S f\cdot g d\mu$	Skalarni proizvod na prostoru $L^2(S,\Sigma,\mu)$
$\langle X,Y\rangle := E(X\cdot Y)$	Skalarni proizvod na prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$
Poglavlje 1.	
$\{X_t,\ t\in T\}$ ili X_t	Slučajni proces sa indeksnim skupom T
$F(t_1,\ldots,t_n\,;\,x_1,\ldots,x_n)$	Konačno-dimenzionalne raspode slučajnog procesa $\{X_t\}$
$\mathcal{B}$	Borelovo σ–polje na skupu R
$(\mathbb{R},\mathcal{B})$	Fazni prostor realnog procesa
R^n	Skup realnih n-dimenzionalnih vektora
R^T	Prostor realizacije ili prostor trajektorija s.p. (prostor realnih funkcija)
$\mathcal{B}^T$	Borelovo σ-polje podskupova prostora R^T
$(R^T,\mathcal{B}^T)$	Beskonačno-dimenzionalan merljiv prostor
$C_{t1,\ldots,tn}(B)$	Cilindričan skup na prostoru R^T sa osnovom B

$C[0,T]$	Skup svih neprekidnih funkcija na intervalu $[0,T]$
$D[0,T]$	Skup svih Cadlag funkcija na intervalu $[0,T]$
$\sigma(X_u : u \leq t)$	Najmanje σ-polje generisano slučajnim procesom X_u
$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}$, $0\leq t \leq T$	Filtracija na intervalu $t\in[0,T]$
$\mathcal{F}_{t+}$	Filtracija neprekidna sa desne strane
$(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{F}, \mathbb{P})$	Filtrirani prostor verovatnoće
ε_t ili $\xi(t)$	Beli šum
τ	Vreme zaustavljanja
Poglavlje 2.	
$\{B_t\}$, $0\leq t < T$	Braunovo kretanje na intervalu $[0,T]$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	Normalna slučajna promenljiva sa očekivanjem μ i varijansom σ^2
PlimX_n	Limes u verovatnoći
$\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$	Familija Harovih funkcija (Harova baza)
$\{\Delta_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$	Familija Šauderovih funkcija (Šauderova baza)
$\varphi_X(\theta)$	Karakteristična funkcija vektora X
Poglavlje 3.	
$\int f(\omega,s)dX(s)$	Stohastički integral slučajnog procesa $f(\omega,s)$
$I(f)(\omega)=\int f(\omega,s)dB(s)$	Itoov integral slučajnog procesa $f(\omega,s)$
$\{I_t\}$ ili I_t	Itoov proces
$1_{(a,b]}(t)$	Indikatorska funkcija na intervalu $(a,b]$
$\mathcal{H}^2[0,T]$	Klasa progresivno merljivih, adaptiranih i integrabilnih sl. procesa
$\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$	Klasa adaptiranih i merljivih s.p. koji zadovoljavaju uslov lokalizacije
$\mathcal{H}_0^2$	Klasa prostih procesa koji zadovoljavaju osobine adaptiranosti, progresivne merljivosti i integrabilnosti
$\{\mathcal{F}_t^B\}$	Standardna filtracija Braunovog kretanja
$C^2(R)$	Skup neprekidnih i dva puta diferencijabilnih funkcija na skupu R
$\mathcal{B}([0,T])$	Borelovo σ-polje formirano na intervalu $[0,T]$
$\mathcal{F}\times\mathcal{B}([0,T])$	Najmanje σ-polje formirano nad skupovima Dekartovog proizvoda.
$\mathcal{P}$	Predvidljivo σ-polje
Poglavlje 4.	
$\mu(x,t)$	Koeficijent drifta (mera prosečnog rasta)
$\sigma(x,t)$	Koeficijent volatilnosti
$\mathcal{L}(X)$	Stohastički logaritam procesa X_t
$\mathcal{E}(X)$	Stohastički eksponent procesa X_t
Poglavlje 5.	
$\mathcal{M} = (S,B\Phi)$	Binomni model

S_t , B_t	Vrednosti cena akcije i obveznice u datom trenutku t
$\phi=(\alpha,\beta)$	Portfolio
V_t	Proces bogatstva (proces vrednosti portfolia)
S^u (S^d)	Vrednosti akcije kada njihova cena raste (opada)
S^*	Diskontovani proces cena akcija
P^*	Martingalska mera (verovatnoća neutralnog rizika)
Poglavlje 6.	
$\langle X,X\rangle_T=\int_0^T\sigma_t^2dt$	Integrisana volatilnost (IV)
$[X,X]_T$	Realizovana volatilnosti - RV (kvadratna varijacija procesa X)
$[Z,Z]_t^{\mathcal{H}}$	Kvadratna varijacija procesa X na proizvoljnoj mreži (podmreži) $\mathcal{H}$
$\varepsilon\perp X$	Veličina ε je nezavisna od procesa X
$\mathcal{G}$	Celokupna mreža (podela) vremenskih trenutaka
$\mathcal{G}^{(k)}$	k - ta podmreža mreže $\mathcal{G}$
$[Y,Y]_t^{(all)}$	Ocena realizovane volatilnosti (RV) (celokupna vremenska mreža)
Δ_{sparse}	Vremenski interval uzorkovanja podataka
$[Y,Y]_T^{(sparse)}$	Ocena realizovane volatilnosti (RV) proređenog uzorkovanja
$[Y,Y]^{(sparse,opt)}$	Ocena RV sa optimalnom frekvencijom uzorkovanja
n^*_{sparse}	Optimalna frekvencija uzorkovanja
$[Y,Y]_T^{(avg)}$	Ocena (estimator) usrednjavanja ili zbirna ocena
D_T	Proces koji opisuje diskretizacioni efekat
η	Diskretizaciona varijansa
c_{opt}	Optimalna vrednost konsante c
K_{opt}	Optimalni broj podmreža
$\overline{\langle X,X\rangle}_T$	Zbirna ocena (estimator) sa korekcijom ili najbolja ocena

Spisak korišćenih skraćenica

Ime skraćenice	pun naziv	značenje na srpskom
RRC RCLL (Cadlag)	Regular right continuous function; Right continuous with left limits	Funkcije neprekidne s desna koje poseduju leve limese
NULL		Pogledati *definiciju 1.7* na sedmoj strani
AWGN	Additive white Gaussian noise	Aditivni beli Gausov šum (aditivna statistička greška)
ODJ	Ordinary differential equations (ODE)	Obične diferencijalne jednačine
SDJ	Stochastic differential equations (SDE)	Stohastičke diferencijalne jednačine
KONB		Kompletna ortonormirana baza
TMK		Teorema o monotonoj konvergenciji
NASDAQ	National Association of Securities Dealers Automated Quotations	
CBOE	Chicago Board Options Exchage	
ROR (ROI, ROA, ROE)	Rate of return (return on investment /asset /equity)	Stopa prinosa
B.k.	Brownian motion	Braunovo kretanje
RV	Realized volatility	Realizovana volatilnost
IV	Integrated volatility	Integrisana volatilnost
NIR	Identical and independently distributed random variables (IID)	Niz identičnih slučajnih promenljivih sa identičnim raspodelama
MSE	Mean square error	Srednja kvadratna greška
BVS	Fast time scale	Brza vremenska skala
SVS	Slow time scale	Spora vremenska skala
S.s.	Almoust shurely (a.s)	Skoro sigurno
Akko	If and only if (Iff)	Ako i samo ako

Spisak slika

Uvod

Interesovanje za korišćenje metoda iz oblasti stohastičkog računa je u neprekidnom porastu u poslednjih dvadeset godina. Modeli stohastičkog računa nalaze primenu u raznim oblastima, kao što su finansije, biologija (*DNK analiza*), fizika i mnoge druge. Jedna od velikih oblasti primene jeste finansijska matematika u kojoj se stohastički račun, između ostalog, koristi za zadavanje cena finansijskih instrumenata (predmeti trgovine na finansijskom tržištu), za smanjenje i kontrolu rizika (tzv. *hedžing*), kao i za modelovanje raznih drugih pojava na tržištu.

Posmatrano sa stanovišta primene, stohastički račun može se opisati kao oblast matematike koja se bavi infinitezimalnim računom, integracijom funkcija koje su nigde diferencijabilne, dok neophodnost stohastičkog računa proizilazi iz potrebe da se u modeliranje pojava, pomoću diferencijalnih jednačina, uključe faktori neizvesnosti, odnosno faktori koji se ne mogu unapred predvideti. Zbog toga se u postupke modeliranja uključuju slučajne funkcije, koje zovemo slučajnim procesima. Poznati primeri slučajnih procesa su Markovski procesi, Braunovo kretanje, Puasonov proces, itd.

Slučajni procesi kojima ću se baviti u ovom radu su Itoovi (Itô) slučajni procesi, koji mogu da se predstave kao suma determinističke komponente (komponenta koju možemo da predvidimo) i stohastičke (slučajne) komponente, koja unosi određenu meru neizvesnosti u naš model. Itoovi procesi su rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina difuzionog tipa, kod kojih je stohastička komponenta bazirana na procesu Braunovog kretanja. Ovi procesi imaju mnogobrojne primene u raznim oblastima, a u novije vreme, posebno je u literaturi dominantna primena u modeliranju cena finansijskih instrumenata.

Prilikom proučavanja finansijskih podataka, predviđanje komponente neizvesnosti i konstrukcija modela koji je opisuju zauzima važno mesto u finansijskoj matematici. U primenama se za meru neizvesnosti[1] koristi naziv *volatilnost* i ona se definiše kao koeficijent kojim se množi diferencijal Braunovog kretanja u modelu Itoovog procesa. U zavisnosti od modela, volatilnost može biti konstanta funkcija, funkcija koja zavisi od vrednosti procesa ili funkcija koja zavisi od dodatnih izvora slučajnosti (tzv. *stohastička volatilnost*). Volatilnost je neopservabilna veličina i mora se ocenjivati na osnovu posmatranja Itoovog procesa u diskretnim vremenskim trenucima. Klasična ocena volatilnosti je zasnovana na kvadratnoj varijaciji procesa. Međutim, u realnim primenama utvrđeno je da ova metoda ne daje dobre rezultate u slučaju kada je frekvencija uzorkovanja veoma velika, što je tipična situacija sa podacima sa berze. Radi postizanja bolje ocene volatilnosti, u praksi se

[1] Mera neizvesnosti se u finansijskoj terminologiji interpretira kao rizik.

primenjuje odbacivanje velikog dela raspoloživih podataka, što je u suprotnosti sa osnovnim statističkim principima.

U ovom radu baviću se sistematizacijom znanja iz oblasti Itoovih slučajnih procesa i njihove primene, kao i razmatranjem relativno novog metoda za ocenjivanje volatilnosti, publikovanog 2005. godine [1]. Novi model razmatra prisustvo šuma prilikom obrađivanja finansijskih podataka, zbog čega se prilikom njegove konstrukcije pretpostavlja da se opservabilni proces (proces koji se posmatra) može predstaviti u obliku zbira Itoovog procesa i šuma. Navedeni model takođe unosi korekciju odstupanja u odnosu na prethodne ocene volatilnosti i za razliku od njih koristi sve raspoložive podatke sa tržišta. Efikasnost ovog metoda ispituje se pomoću Monte Karlo simulacije i korišćenjem Hestonovog modela stohastičke volatilosti.

Ovaj rad organizovan je u deset poglavlja. U uvodnom poglavlju je definisan pojam slučajnog procesa i njihovih specifičnih karakteristika, a zatim su navedene klase slučajnih procesa. Drugo poglavlje objašnjava proces Braunovog kretanja i opisuje njegove najznačajnije osobine. U ovom poglavlju je, radi boljeg razumevanja simulacija, razmatran i postupak konstrukcije Braunovog kretanja pomoću talasića. U trećem poglavlju će biti predstavljena teorija Itoovog integrala, odnosno njegova egzistencija i konstrukcija, a potom će biti detaljno izvedena Itoova formula. U ovom poglavlju takođe ćemo objasniti i pojmove Itoovog procesa, kvadratne varijacije i kovarijacije Itoovog procesa, kao i formulu za stohastičku parcijalnu integraciju. U četvrtom poglavlju su navedeni elementi teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina i detaljno tretirani poznati primeri stohastičkih jednačina, kao što su Lanževinova i Blek-Šolsova jednačina. U petom poglavlju su opisani osnovni pojmovi berze, njena definicija i način funkcionisanja. Radi konciznijeg izlaganja u ovom poglavlju, napravila sam malu digresiju i umesto neprekidnih modela detaljno sam opisala binomni matematički model tržišta. S obzirom da se aproksimacijom binomnog modela uz još nekoliko novih pretpostavki dobija neprekidan model tržišta, ova mala digresija neće nas mnogo skrenuti sa našeg cilja, odnosno neprekidnog modela tržišta kojim se u ovom radu bavimo. Ovim sam želela da naglasim složenost prelaza sa ekonomskih činjenica i opisa na matematičku formalnu postavku modela, kao i da što slikovitije objasnim sam postupak razmišljanja tokom formalne konstrukcije tržišta. Zatim, u šestom poglavlju će biti izložena metoda ocene volatilnosti, koja je glavni predmet rada, kao i rezultati Monte Karlo simulacije. U prilogu A navedene su dodatne matematičke definicije i teoreme, neophodne za razumevanje ovog rada, a u prilogu B nalaze se programi pisani u Matlabu, koji su korišćeni za simulacije i dobijanje navedenih rezultata.

Pored sistematizacije znanja iz ovih oblasti, ovaj rad ima za cilj demonstraciju primene navedene metode za ocenu volatilnosti, kao i potvrdu teorijskih rezultata putem simulacije.

1. Slučajni procesi

Objasnićemo pojam slučajnog procesa na primeru. Zamislimo da se u svakom trenutku t, nekog vremenskog intervala posmatra jedna karakteristika X fizičkog sistema i neka je ona slučajnog karaktera. Tada, skup svih slučajnih veličina X_t, $t\in T$, možemo posmatrati kao slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, gde za svako fiksirano $t\in T$ važi da je X_t slučajna promenljiva, ref. [11] i [13].

- *Slučajni proces (slučajna funkcija)* je kolekcija slučajnih promenljivih X_t, koje su za svako fiksirano t definisane na istom prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, u oznaci: $\{X_t,\ t\in T\}$.
- Ako je, za svako $t\in T$, prostor vrednosti procesa skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada proces nazivamo *realnim procesom*, a merljiv prostor $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ nazivamo *faznim prostorom procesa*.
- Skup T se naziva *parametarskim ili indeksnim skupom*. Obično se indeks t interpretira kao vreme, a za skup T se uzima interval $[0,+\infty)$ ili neki njegov podskup.
  U zavisnosti od toga kakav je indeksni skup T, procese delimo na dve grupe:
  (i) Ako je skup T diskretan skup, tada proces predstavlja *niz slučajnih promenljivih, kaže se i slučajni proces sa diskretnim vremenom*. Ako je skup T konačan, tada proces $\{X_t\}$ predstavlja slučajan n-dimenzionalni *slučajni vektor*, oblika $(X_{t1}, X_{t2},\ldots,X_{tn})$;
  (ii) Ako je skup T interval, tada proces predstavlja *slučajni proces sa neprekidnim vremenom.*

Pojam procesa može da se interpretira na još jedan način[2], ako se za skup svih ishoda eksperimenta Ω izabere baš skup determinističkih funkcija, definisanih na intervalu T. Zamislimo dalje da se iz tog skupa determinističkih funkcija nekim slučajnim mehanizmom bira jedna takva funkcija i obeležimo je sa X_t. Na pokazan način dobija se slučajan proces. Svaka funkcija X_t izabrana na ovaj način, naziva se *trajektorija ili realizacija slučajnog procesa*. Prostor R^T je *prostor realizacije* ili *prostor trajektorija* slučajnog procesa.

Postoji i treća interpretacija procesa, ako zamislimo da se u svakom trenutku $t\in T$, nekim slučajnim mehanizmom bira vrednost funkcije X_t.

[2] Objašnjenje za postojanje dve interpretacije procesa nalazi se u činjenici da je proces funkcija dva argumenta: $t\in T$ i $\omega\in\Omega$, tj. funkcija oblika: $X\,(t,\omega)$. Za fiksirano vreme t dobija se funkcija $X(t,\bullet)$ koja je slučajna promenljiva, merljiva u odnosu na σ-polje $\mathcal{F}$. Međutim, ako se fiksira argument ω, dobija se realna deterministička funkcija (trajektorija datog procesa), koja zavisi od vremena t i oblika je: $X(\bullet,\omega):T\to\mathbb{R}$.

Napomena *Navedena interpretacija u kojoj skup ishoda eksperimenta Ω izjednačavamo sa skupom vrednosti koje uzima proces X na nekom intervalu, može da se koristi samo u slučaju kada proces posmatramo izolovano u odnosu na druge procese. Međutim, često se dešava u primeni da se skup ishoda nekog eksperimenta Ω sastoji iz velikog broja procesa, npr. u finansijskoj primeni skup ishoda Ω je skup svih mogućih stanja finansijskog tržišta. Prema tome, u datom slučaju skup ishoda Ω predstavlja skup svih procesa koji opisuju kretanje cena svih finansijskih instrumenata na datom tržištu, u tom slučaju druga interpretacija procesa nije korektna.*

Napomena *Kada se definiše proizvoljan slučajni proces, mora unapred da se definiše i fiksira prostor njegovih trajektorija.Prema tome,skoro uvek se pretpostavlja da su trajektorije proizvoljnog procesa regularne,što znači da one u svim tačkama poseduju i desni i levi limes i da su ili funkcije neprekidne zdesna ili neprekidne sleva, [15].*

1.1 Raspodele slučajnog procesa

Definicija 1.1 *(Raspodele slučajnog procesa).* Neka je $\{X_t\}$ slučajni proces. Tada važi:

- Za svako fiksirano $t \in T$ dobija se jedna slučajna promenljiva X_t, koja ima svoj zakon raspodele određen odgovarajućom funkcijom raspodele oblika: $F_1(t;x)=\mathbb{P}\{X_t \leq x\}$. Datu funkciju raspodele nazivamo *jednodimenzionalna funkcija raspodele*[3] slučajnog procesa $\{X_t\}$.
- Svakoj fiksiranoj vremenskoj n-torci: $(t_1,..., t_n)$ odgovara jedan slučajan vektor $(X_{t1}, X_{t2},...,X_{tn})$, gde se raspodele ovako dobijenih slučajnih vektora nazivaju *konačno-dimenzionalnim raspodelama* [4] slučajnog procesa $\{X_t\}$ i sledećeg su oblika:
$$F(t_1,t_2,\dots,t_n\,;x_1,x_2,\dots,x_n)=\mathbb{P}\{X_{t_1}\leq x_1, X_{t_2}\leq x_2,\dots,X_{t_n}\leq x_n\}.$$

Pokazuje se da će za proizvoljan dati skup konačno-dimenzionalnih raspodela postojati slučajan proces čije su to raspodele, ali pod uslovima *kompatibilnosti* koji su dati u sledećoj teoremi, ref. [11].

Teorema 1.1 *(Teorema Danijel-Kolmogorova).* Neka je data familija funkcija $\{F_1(t_1,...,t_n\,;\,x_1,...,x_n)\}$, za koje važi $n=1,2,...$; $t_1,...,t_n \in T$ i $x_1,..., x_n \in R$, ako su još ispunjeni sledeći uslovi:

(i) Za svaku fiksiranu vremensku n-torku $(t_1,...,t_n)$, važi da je sledeća funkcija:
$$(x_1,\dots,x_n)\to F_n(t_1,t_2,\dots,t_n;x_1,x_2,\dots,x_n),$$
zajednička funkcija raspodele nekog slučajnog vektora.

(ii) *Uslov simetrije.* Svaka funkcija F_n ostaje ista pri proizvoljnoj permutaciji parova $(t_i\,,x_i)$. Drugim rečima, za svaku permutaciju $(j_1,..., j_n)$ skupa $(1,...,n)$ važi sledeća jednakost:
$$F_n(t_{j_1},\dots,t_{j_n}\,;x_{j_1},\dots,x_{j_n})=F_n(t_1,\dots,t_n\,;x_1,\dots,x_n)\,[5].$$

[3] Jednodimenzionalni zakoni raspodele nisu dovoljni za karakterizaciju slučajnog procesa, osim u slučaju kada su vrednosti procesa,u različitim vremenskim trenucima nezavisne.Zbog toga je neophodno znati višedimenzionalne zakone raspodele slučajnog procesa, videti [11].

[4] Iako su neophodne za karakterizaciju procesa, konačno-dimenzionalne raspodele ne određuju jednoznačno da li će trajektorija datog procesa biti neprekidna. Dešava se da postoje dve verzije procesa sa zajedničkom konačno-dimenzionalnom raspodelom i da jedna verzija procesa ima neprekidne trajektorije a druga verzija da ima prekide u vremenu (takvi prekidi se nazivaju skokovi).

[5] Uslov simetrije znači da je funkcija F_n invarijantna u odnosu na permutacije svih n parova $(t_i\,,x_i)$.

(iii) Uslov saglasnosti. Za svako $n \in \mathbb{N}$, važi:

$$\lim_{x_n \to +\infty} F_n(t_1, \ldots, t_n ; x_1, \ldots, x_n) = F_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1} ; x_1, \ldots, x_{n-1})$$ [6].

Tada postoji slučajni proces X_t, $t \in T$, takav da funkcije F_n predstavljaju njegove konačno-dimenzionalne funkcije raspodele. Drugo i treće svojstvo karakterišu *raspodele(verovatnoća) beskonačnih familija slučajnih promenljivih*.

1.2 Slučajni proces – generalna teorija

Slučajni proces $\{X_t\}$, $t \in T$, u opštem slučaju može da se posmatra i kao preslikavanje između dva proizvoljna merljiva prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $(E, \mathcal{E})$, gde skup E predstavlja skup vrednosti procesa, a skup T indeksni skup. U tom slučaju, proces X_t predstavljaće kolekciju $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-merljivih slučajnih promenljivih, koje uzimaju vrednosti iz skupa E. Radi uopštenijeg sagledavanja pojma slučajnog procesa pogledati reference [15], [21] i [22].

Za fiksirano $\omega \in \Omega$ dobija se odgovarajuća trajektorija procesa X, oblika $x(\omega)=(x_t(\omega))$, $t \in T$. Data trajektorija, u navedenom generalnom slučaju, može da se posmatra i kao funkcija sa domenom T i vrednostima u skupu E, tj. kao funkcija oblika: $x(\omega): T \to E$. Prema tome, za svako fiksirano ω slučajni proces X predstavljen je funkcijom $x(\omega)$, pa može da se interpretira i kao slučajna funkcija koja preslikava skup ishoda Ω u neki proizvoljan podskup prostora funkcija E^T. U ovom slučaju prostor ishoda procesa je beskonačno-dimenzionalan. Ako pretpostavimo da je T interval realnih brojeva, tj. da je proces X realan, tada za skup ishoda Ω uzimamo podskup prostora svih realnih funkcija, koje su oblika: $x(\omega): T \to R$. U slučaju realnog procesa prostor svih realnih funkcija obeležavaćemo oznakom R^T.

Razmotrimo konstrukciju verovatnosnog modela za proces X_t kada se vreme neprekidno menja između 0 i T. Budući da je prostor vrednosti slučajnog procesa jednak skupu svih njegovih trajektorija, možemo da zaključimo da će prostor funkcija $S=R^T$, u koji se proces preslikava zavisiti od vrste trajektorija koje proces poseduje, videti reference [9], [15]. Prema tome,

- Ako su trajektorije procesa neprekidne, onda je prostor funkcija S jednak skupu svih neprekidnih funkcija na datom intervalu, koji ćemo označiti sa $C[0,T]$.
- Opštiji model ovog prostora obuhvata procese čije su trajektorije neprekidne zdesna i za koje postoji levi limes u svakoj tački (*Right Continuous functions with Left Limits–RCLL; RRC*). Navedene funkcije poznatije su pod nazivom *Cadlag* funkcije (od francuskog *Continue à droite, limitée à gauche*).Nadalje u tekstu za prostor S koristićemo skup svih Cadlag funkcija na intervalu $[0,T]$, koji ćemo označiti sa: $S=D[0,T]$.

Budući da se proces interpetira kao slučajno preslikavanje sa beskonačno-dimenzionalnim prostorom ishoda, prirodno je da se postave sledeća pitanja:

Kako treba da se definiše σ-polje na prostoru funkcija E^T ?
Kako se zadaju verovatnoće[7] u beskonačno-dimenzionalnim prostorima ?

Određivanje σ-polja i verovatnoće na prostoru funkcija E^T direktno je vezano sa uvođenjem mere u dati prostor,kao i određivanjem kriterijuma merljivosti podskupova datog prostora E^T.Zato uvodimo pojam cilindričnog skupa, tj. skupa funkcija na kojem će se kasnije formirati σ-polje datog prostora, ref. [16] i [22].

---

6 Iz uslova saglasnosti sledi, da zadavanje funkcije F_n, za $n \geq 2$ istovremeno određuje i F_k, $1 \leq k \leq n\text{-}1$.

7 Podsetimo se da smo u konačno-dimenzionalnim prostorima, verovatnoće određivali pomoću funkcija n-dimenzionalnih raspodela.

Neka je B proizvoljan podskup, za koji važi $B\subset R^n$ i neka je $(t_1,...,t_n)$ proizvoljna n-torka. Tada, skupove: $\{x(\omega)\in R^T : (x_{t1}, x_{t2},...,x_{t\,n}) \in B\}$ nazivamo *cilindrima prostora R^T nad osnovom B ili cilindričnim skupovima*. Ako je osnova $B\in\mathcal{B}(R^n)$ Borelov skup, tada se navedeni skup naziva *Borelov cilindar*. Preciznije objašnjenje navodimo u sledećoj definiciji.

Definicija 1.2 Skupove funkcija: $C_{t1,..., \ tn}\ (B)=\{X(\omega)(.)\in\ R^T\ :\ X(\omega)(t_1)\in B_1\ ,...,\ X(\omega)(t_n)\in B_n\}$ zovemo *cilindričnim skupovima na prostoru R^T, sa osnovom $B = (B_1,B_2,...,B_n)$, duž koordinata $(t_1,...,t_n)$*. Pri tome, važi da su skupovi B_i proizvoljni Borelovi skupovi u R, sledećeg oblika [8]: B_i=$(-\infty,a]$, odnosno $B_1=\{-\infty< X(.)(t_1)\leq a\}$.

Definicija 1.3 Minimalno σ-polje formirano nad kolekcijom[9] svih Borelovih cilindara zove se *Borelovo σ-polje podskupova prostora R^T* i označava se oznakom $\mathcal{B}^T$. Elementi σ-polja $\mathcal{B}^T$ nazivaju se *Borelovi skupovi u beskonačno-dimenzionalnom prostoru $(R^T,\mathcal{B}^T)$*.

Primetimo da pojam slučajne promenljive može da se generalizuje do pojma slučajnog elementa, tako što skup vrednosti slučajne promenljive (skup$R$) zameni proizvoljnim merljivim prostorom $(E,\mathcal{E})$, videti [21] i [22].

Definicija 1.4 *(Slučajni element).* Neka su $(\Omega,\mathcal{F})$ i $(E,\mathcal{E})$ dva proizvoljna merljiva prostora.Tada, funkciju f koja preslikava: $f:(\Omega,\mathcal{F})\rightarrow(E,\mathcal{E})$ nazivamo *slučajnim elementom prostora E*, ako je funkcija f $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-merljiva. Drugim rečima, ako je:

$$f^{-1}(B)\in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{E}. \tag{1.1}$$

Prema ovoj definiciji slučajni proces je slučajni element prostora $(R^T,\mathcal{B}^T)$, odnosno slučajni proces je preslikavanje oblika: $X(\omega,t)$: $\Omega\rightarrow(R^T,\mathcal{B}^T)$, koje je $\mathcal{F}/\mathcal{B}^T$- merljivo.

Funkcija verovatnoće se u beskonačno-dimenzionalne prostore uvodi tako što se prvo definiše na cilindričnim skupovima, a zatim se proširuje na σ-polje generisano datim cilindričnim skupovima, odnosno σ-polje $\mathcal{B}^T$, pogledati referencu [16]. Pri tome, mora se voditi računa da funkcija verovatnoće bude dosledna prilikom dodeljivanja njenih vrednosti različitim cilindričinim skupovima, da ne bi došlo do nekih kontradikcija.Prema tome, kako je sproveden postupak uvođenja mere i kriterijuma merljivosti na prostoru funkcija, možemo sa lakoćom da opišemo meru verovatnoće na prostoru $(R^T,\mathcal{B}^T)$. Verovatnoća je data sledećim izrazom:

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\colon X(\omega)\in B\})\text{ , gde je } B\in\mathcal{B}^T\ . \tag{1.2}$$

Na ovaj način smo definisali prostor verovatnoće, koji se odnosi na skup vrednosti slučajnog elementa X. Prostor verovatnoće slučajnog elementa se u generalnom slučaju obeležava oznakom: $(E,\mathcal{E},\mathbb{P}_X)$,dok se u slučaju kada se prostor ishoda poklapa sa prostorom funkcija, obeležava oznakom: $(R^T,\mathcal{B}^T,\mathbb{P}_X)$.

Prema tome, u najopštijem slučaju važi da je slučajni element preslikavanje tripleta, koje ispunjava uslove (1.1) i (1.2) i oblika je:

$$X : (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \rightarrow (E,\mathcal{E},\mathbb{P}_X)\ .$$

Tada, u zasebnim slučajevima važi:

- Ako je skup vrednosti slučajnog elementa X oblika: E=R, tada je$X$ slučajna promenljiva;
- Ako je skup vrednosti slučajnog elementa X obllika: E=R^n, tada je X slučajni vektor, gde je n dimenzija datog vektora;
- Ako je skup vrednosti slučajnog elementa X oblika: E=R^T, tada je X slučajni proces; Pri tome, ako je E=$D[0,T]$, tada je X slučajni Cadlag proces, a ako je E=$C[0,T]$, tada je X slučajni proces sa neprekidnim trajektorijama.

[8] Borelovi cilindri mogu da se posmatraju i kao inverzne slike Borelovih skupova prostora R^n.
[9] Kolekcija svih Borelovih cilindara je algebra, odnosno polje.

1.3 Osnovni pojmovi i osobine slučajnog procesa

U osnovne pojmove slučajnog procesa spadaju:

- Pojam filtracije i filtriranog prostora u neprekidnom i diskretnom vremenu
- Merljivost, adaptiranost, progresivnost i predvidljivost
- Vreme zaustavljanja

1.3.1 Pojam filtracije i filtriranog prostora u neprekidnom i diskretnom vremenu

Neka je vreme u kome se posmatra neka pojava diskretno, tada *filtracijom* nazivamo rastući niz σ-polja koji je oblika: $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset ...\}$.

Primer 2.1
Za primer diskretne filtracije navešćemo eksperiment uzastopnog bacanja novčića, u kome filtracija $\mathcal{F}_k$ sadrži sve događaje koji mogu da se dobiju iz prvih k-bacanja novčića. Drugi primer koji navodimo za diskretnu filtraciju je kada $\mathcal{F}_k$ čine svi događaji koji su utvrđeni vrednostima akcija u trenucima od $1,2,...,k$ (gde se vrednosti akcija posmatraju u diskretnom vremenu), ref. [9].

Napomena *Filtracija u diskretnom i u neprekidnom vremenu može da se koristi kao model za protok informacija. Jer, kako vreme prolazi, posmatrač dobija sve detaljniji uvid u moguće ishode eksperimenta, odakle zaključujemo da se skup informacija vremenom povećava. Osobina filtracije da raste s vremenom odgovara činjenici da se informacija pamti u vremenu. Prema tome, σ-polja filtracije opisuju trenutni stepen informisanosti o mogućim ishodima eksperimenta.*

Definicija 1.5 *(Filtracija).* Neka je Ω neprazan skup. Ako za svako $t\in T$ postoji σ-polje $\mathcal{F}_t$ i ako za svako s i t važi: $s \le t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, tada familiju rastućih σ-polja, u oznaci: $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}$, $0\le t\le T$, nazivamo *filtracijom* [10].

Parametar t može da uzima vrednosti iz konačnog diskretnog ili beskonačnog diskretnog skupa: $t\in\{0,1,...,N\}$, N_0 ili može da uzima vrednosti iz neprekidnog skupa: $t\in[0,T]$, $[0,+\infty)$. Prostor verovatnoće snabdeven filtracijom svojih σ-polja naziva se *filtrirani prostor verovatnoće* i obeležava kao uređena četvorka $(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{F},\mathbb{P})$.

Definicija 1.6 *(σ-polje generisano slučajnim procesom).*
σ-polje oblika: $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u : u \le t)$, naziva se *σ-polje generisano slučajnim procesom* X_u, $u \le t$ i predstavlja najmanje σ-polje koje sadrži sve skupove oblika: $\{\omega: X_u(\omega) \le a\}$, $0\le u \le t$, $a\in R$. Navedeno σ-polje sadrži sve informacije o procesu X_t, od nultog trenutka zaključno sa trenutkom t, pogledati ref. [9].

Definicija 1.7 *(Uobičajeni uslovi filtracije).* Neka je $\mathbb{F} =\{\mathcal{F}_t\}$, $0\le t \le T$, filtracija na intervalu $t\in[0,T]$. Uvodimo sledeće pojmove:

(i) Neka je $\mathcal{C}$ kolekcija svih skupova B iz σ-polja $\mathcal{F}_T$, takvih da je:

$$\mathcal{C} = \{B : \mathbb{P}(B) = 0 \ i \ B \in \mathcal{F}_T = \sigma\{X_u : u \le T\}\}.$$

Tada, kolekciju $\mathcal{N}=\{A: A\subset B \text{ i } B\in\mathcal{C}\}$, nazivamo *kolekcijom NULL skupova.*

[10] Filtracija opisuje kako se informacija otkriva s vremenom.

(ii) Za filtraciju $\mathbb{F}$ kažemo da je *neprekidna sa desne strane*[11], ako za svako t važi:

$$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t, \quad \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s .$$

(iii) Za filtraciju $\mathbb{F}$ kažemo da je *kompletna* ako $\mathcal{F}_0$ sadrži sve NULL skupove[12].

Ako za filtraciju $\mathbb{F}$ važe osobine *(ii)* i *(iii)* onda kažemo da $\mathbb{F}$ ispunjava *"uobičajene uslove filtracije"*, za svako vreme $t\in[0,T]$, pogledati [9] i [18].

Napomena *"Uobičajeni uslovi filtracije" su pretpostavke koje se dodatno uvode, uglavnom iz tehničkih razloga. Objasnimo kako se formira filtracija $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}$, $0\le t\le T$, sa uobičajenim uslovima. Definišimo prvo σ-polje generisano procesom $\{X_s\}$, $s\in[0,T]$ do trenutka t i označimo ga oznakom: $\mathcal{F}_t^0=\sigma(X_u : u\le t)$. Dalje, formirajmo najmanje σ-polje koje sadrži sledeće skupove: σ-polje $\mathcal{F}_t^0$ i kolekciju Null skupova (koji ne pripadaju σ-polju $\mathcal{F}_t^0$). Novo σ-polje označimo oznakom $\mathcal{F}_t^{\,1}$.Navedeni postupak dodavanja kolekcije Null skupova postojećem σ-polju nazivamo kompletiranjem σ-polja $\mathcal{F}_t^0$. Da bi uobičajeni uslovi filtracije bili ispunjeni, mora da važi još jedan uslov, a to je da data filtracija bude neprekidna sa desne strane. Prema tome, formirajmo novo σ-polje, u oznaci $\mathcal{F}_t$, koje mora da sadrži staro σ-polje $\mathcal{F}_t^{\,1}$i za koje se dodatno zahteva da bude nepekidno zdesna, tj. za σ-polje $\mathcal{F}_t$ mora da važi sledeće: $\mathcal{F}_t=\bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^{\,1}$.*

1.3.2 Merljivost, adaptiranost, progresivnost i predvidljivost slučajnog procesa

Definicija 1.8 *(Merljivost procesa).* Neka je$\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ slučajan proces definisan na merljivom prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sa vrednostima u prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Za slučajan proces kaže se da je *merljiv (u odnosu na proizvod σ-polja) ili merljiv po paru promenljivih (ω,t)*, ako za svako $B\in\mathcal{B}$, važi:

$$\{(\omega,t): X(\omega,t)\in B\}\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}([0,T]), \tag{1.3}$$

gde je $\mathcal{B}([0,T])$ Borelovo σ-polje formirano na intervalu $[0,T]$, dok $\mathcal{F}\times\mathcal{B}([0,T])$ predstavlja najmanje σ-polje formirano nad skupovima Dekartovog proizvoda.

Teorema 1.2 *(Fubinijeva teorema).* Neka je$\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ merljiv slučajni proces. Tada važe sledeće osobine:

(i) Skoro sve trajektorije procesa su merljive funkcije.

(ii) Ako matematičko očekivanje $E(X_t)$ postoji za svako t,tada je funkcija $E(X_t)$ merljiva po promenljivoj t.

(iii) Ako je $S\subset T$ merljiv podskup i ako važi: $\int_S E|X_t|dt<+\infty$, tada su skoro sve trajektorije procesa X_t integrabilne i sa verovatnoćom jedan važi sledeći identitet:

$$E\int_S X_t\,dt=\int_S E(X_t)dt<+\infty . \tag{1.4}$$

Neka je $\mathbb{F}$ filtracija rastućih σ-polja na prostoru Ω. Kao posledica merljivosti procesa u odnosu na različita σ-polja podskupova prostora $\Omega\times[0,T]$ javljaju se različite klase procesa kao što su: adaptirani, progresivno merljivi procesi, predvidljivi procesi, itd.

Definicija 1.9 *(Adaptirani proces).* Za proces$\{X_t\}$se kaže da je *adaptiran ili prilagođen filtraciji* $\mathbb{F}$, ako je za svako $t\in T$ slučajna promenljiva X_t $\mathcal{F}_t$-merljiva.

---

[11] Interpretacija ove osobine je da se za svaku informaciju koja se otkrije u malom vremenskom intervalu odmah nakon vremenskog trenutka t podrazumeva da je poznata i u trenutku t.

[12] Ideja se sastoji u tome da se svi podskupovi skupova mere nula uključe u početnu filtraciju $\mathcal{F}_0$ bilo da su merljivi ili ne.

Definicija 1.10 *(Progresivna merljivost procesa).* Neka je $\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ slučajan proces definisan na merljivom prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sa vrednostima u prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ i neka je $\{\mathcal{F}_t\}$ neprekidna filtracija na $(\Omega,\mathcal{F})$. Za slučajan proces se kaže da je *progresivno merljiv ili progresivan*, ako za svako $B\in\mathcal{B}$ i za svako $t\geq 0$ važi:

$$\{(\omega,s):\ s\leq t,\ X(\omega,s)\in B\}\ \in\ \mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t]). \tag{1.5}$$

Drugim rečima, za proces $\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ kažemo da je *progresivan*, ako za svako $t\geq 0$, važi da je preslikavanje iz merljivog prostora $\Omega\times[0,t]$ u merljiv prostor $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])$ - merljivo.

Napomena *Svaki progesivno merljiv proces $\{X_t\}$, $t\in[0,T]$, u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$ je ujedno i merljiv i adaptiran proces u odnosu na datu filtraciju, ali obrnuto, u opštem slučaju ne mora da važi. Može se pokazati da je svaki adaptirani proces sa osobinom neprekidnosti sa leve ili desne strane progresivno merljiv proces.*

S obzirom da se procesi dele na procese sa neprekidnim i one s diskretnim vremenom, navešćemo dve definicije predvidljivosti procesa, pogledati [9].

Definicija 1.11 *(Predvidljivost procesa sa diskretnim vremenom).* Neka je data filtracija $\mathbb{F}$ sledećeg oblika: $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,...,\mathcal{F}_t,...,\mathcal{F}_T\}$. Tada, za proces s diskretnim vremenom X_t, kažemo da je *predvidljiv (predictable)* u odnosu na datu filtraciju $\mathbb{F}$, ako za svako *t* važi da je slučajni proces X_t, $\mathcal{F}_{t-1}$ - merljiv[13].

Definicija 1.12 *(Predvidljivost procesa sa neprekidnom vremenom).*
σ-polje na prostoru $R_+\times\Omega$ koje je generisano svim adaptiranim procesima, čije su trajektorije neprekidne sleva, naziva se *predvidljivo σ-polje* i obeležava se oznakom $\mathcal{P}$.

Za realan slučajni proces, koji se definiše kao preslikavanje: $X_t : R_+\times\Omega\to R$, kažemo da je *predvidljiv*, ako je merljiv u odnosu na predvidljivo σ-polje $\mathcal{P}$.

Teorema 1.3 *(Dovoljni uslovi za predvidljivost procesa).* Dovoljni uslovi za predvidljivost procesa X_t u neprekidnom vremenu glase:

(i) X_t je adaptiran i neprekidan sleva (specijalno, može da bude adaptiran i nepekidan proces).

(ii) X_t je granična vrednost procesa, koji je adaptiran i neprekidan sleva.

(iii) X_t je Borel-merljiva funkcija predvidljivog procesa.

Primer 2.2
Kao primer predvidljivog procesa navodimo proces koji opisuje broj akcija (deonica), koje investitor poseduje u trenutku t. Količina akcija/deonica koju ćemo, u datom trenutku t, kupiti ili prodati utvrđuje se na osnovu informacija koje imamo do i zaključno sa trenutkom t-1, pa je prema tome ovaj proces predvidljiv u odnosu na filtraciju koja je generisana procesom cena, [9].

Definicija 1.13 *(Modifikacija/Verzija procesa).* Neka su slučajni procesi X_t i Y_t definisani na istom prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Tada, za slučajni proces $\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ kažemo da je *modifikacija* procesa Y_t, ako za svako $t\in[0,T]$ važi izraz:

$$\mathbb{P}\{X_t=Y_t\}=\mathbb{P}\{\omega:\ X(\omega,t)=Y(\omega,t)\}=1.$$

[13] Može da se kaže da je proces predvidljiv ako je vrednost procesa X u trenutku *t* određuje se na osnovu informacija koje smo sakupili do i zaključujući sa trenutkom $t-1$.

1.3.3 Vreme zaustavljanja *(Stopping time)*

Definicija 1.14 *(Vreme zaustavljanja ili moment zaustavljanja).* Neka je $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\},\ t\in T$ filtracija na skupu Ω. Nenegativnu slučajnu promenljivu τ, koja uzima vrednosti iz skupa $T\cup\{+\infty\}$ nazivamo *vreme zaustavljanja u odnosu na filtraciju* $\mathbb{F}$, ako važi da je događaj $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$, za svako $t\in T$ [14].

Neke osobine vremena zaustavljanja:

(i) Ukoliko se ni za jedno $t\in R_+$ ne desi događaj $\{\tau\leq t\}$, onda se za vrednost slučajne promenljive τ uzima vrednost $+\infty$.To je razlog zašto je skup vrednosti slučajne promenljive τ oblika $T\cup\{+\infty\}$. Korisno je definisati oznaku $\mathcal{F}_\infty$ kao najmanje σ-polje koje sadrži sve $\mathcal{F}_t$, $t\in T$ i u tom slučaju za skup T, važi da je: $T\subset[0,+\infty]$.

(ii) S obzirom na to da je$T$ indeksni skup vremenske promenljive t i da je σ-polje $\mathcal{F}_t$ kolekcija svih događaja posmatranih do trenutka t, uključujući i trenutak t, tada se uslov iz *definicije1.14*, svodi na činjenicu da je ishod događaja$\{\tau\leq t\}$poznat u trenutku t, odnosno da se na osnovu date informacije sadržane u σ-polju $\mathcal{F}_t$ može utvrditi da li se događaj$\{\tau\leq t\}$desio ili nije.

(iii) U slučaju kada je vreme diskretno: $T=\{0,1,2,...\}$, dobija se da je uslov $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ ekvivalentan uslovu $\{\tau=t\}\in\mathcal{F}_t$, pogledati ref. [17]. U slučaju neprekidnog vremena, kada je indeksni skup interval realnih brojeva i samim tim neprebrojiv, ekvivalencija neće važiti zbog činjenice da σ-algebra nije zatvorena u odnosu na neprebrojivu primenu operacije unija, odnosno važi:

$$\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_t=\bigcup_{i\leq n}\{\tau=i\},\ \{\tau=n\}=\{\tau\leq n\}\setminus\{\tau\leq n-1\}.$$

(iv) Slučajna promenljiva τ je vreme zaustavljanja u odnosu na slučajan proces X_t, ako ona predstavlja vreme zaustavljanja u odnosu na njegovu prirodnu filtraciju, tj. ako važi: $\{\tau\leq t\}\in=\sigma(X_s : s\leq t)$.

Primer 2.4

Neka slučajna promenljiva τ predstavlja prvi vremenski trenutak kada adaptirani proces X_t dostigne neku vrednost a. U slučaju da τ nikada ne dostigne datu vrednost, onda važi: $\tau=\infty$. Ako nam je proces X_s poznat u svim vremenskim trenucima $s\leq t$, tada znamo da li je proces dostigao datu vrednost pre, posle ili baš u trenutku t, tj. poznato je da li je događaja $\{\tau\leq t\}$ bilo ili nije posmatrajući samo prošlost datog procesa do trenutka t. Prema tome, ova veličina jeste vreme zaustavljanja.

Navodimo primer veličine koja nije vreme zaustavljanja. Neka je T vreme kada proces dostigne svoj maksimum na intervalu [0,1]. Da bismo saznali da li se događaj$\{\tau\leq t\}$stvarno desio ili nije,nije dovoljno poznavati vrednosti procesa samo do trenutka t, već moraju da se poznaju sve vrednosti na intervalu [0,1]. Prema tome veličina T nije vreme zaustavljanja.

[14] Vreme zaustavljanja je preslikavanje oblika τ: $\Omega\rightarrow T\cup\{+\infty\}\subset[0,+\infty]$, gde je T indeksni skup.

1.4 Neke klase slučajnih procesa

- Slučajni procesi sa nezavisnim vrednostima
- Slučajni procesi sa nezavisnim prirastajima
- Gausovski procesi
- Markovski procesi
- Martingali

1.4.1 Slučajni procesi sa nezavisnim vrednostima

Slučajni proces $\{X_t\}$, $t \in T$ je *proces sa nezavisnim vrednostima*, ako za svako $n \in N$ i za svaku n-torku: $(t_1,...,t_n)$ važi da su slučajne promenljive $X_{t1}, X_{t2},...,X_{tn}$ nezavisne.

Procesi sa nezavisnim vrednostima ubrajaju se u procese kod kojih je poznavanje jednodimenzionalnih raspodela dovoljno za poznavanje celokupnog procesa, kao i za poznavanje proizvoljne n-dimenzionalne raspodele tog procesa. Uzrok tome je što usled nezavisnosti sledi da se proizvoljna funkcija n-dimenzionalne raspodele procesa može napisati kao proizvod jednodimenzionalnih raspodela tog procesa:

$$F_n(t_1, t_2, \ldots, t_n \,;\, x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(t_1; x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(t_n; x_n) \,.$$

Generalno posmatrajući, slučajni procesi koji su neprekidni u vremenu i čije su vrednosti u različitim vremenskim trenucima nezavisne nisu zanimljivi ni u primeni ni u teoriji.

Najpoznatiji primer slučajnog procesa sa nezavisnim vrednostima je tzv. signal belog šuma, koji se opisuje kao slučajan signal, odnosno slučajan proces koji ima podjednako raspodeljenu snagu na svim svojim frekvencijama koje se nalaze u nekom konačnom opsegu. Naziv ''beli šum'' potiče od pojma ''bele svetlosti'', u kojoj je spektralna snaga svetlosti podjedanko raspodeljena duž frekvencija vidljivog spektra, odnosno bela svetlost sadrži sve svetlosne frekvencije vidljivog spektra sa istim intenzitetom. U primenjenim naukama pojam belog šuma je veoma česta pojava i predstavlja matematičku idealizaciju fenomena koji podrazumeva iznenadne i velike fluktuacije. Na *slici 7.1* prikazana je jedna realizacija procesa belog šuma u diskretnom vremenu koji je generisan programom u Matlab-u.

Beli šum definisan na beskonačno velikom opsegu je čisto teorijska konstrukcija, jer kako prema definiciji ima podjednako raspodeljenu snagu na svim frekvenicijama, sledi da će ukupna snaga ovog signala (procesa) biti beskonačna. To znači da je nemoguće generisati ovakav proces. U praksi je moguće realizovati ovakav proces jedino ako se definiše na manjem opsegu frekvencija.

Matematička interpretacija belog šuma je slučajan proces sa uzajmno nekorelisanim vrednostima u razllčitim vremenskim trenucima, pri tome se obično pretpostavlja da je očekivanje ovog procesa jednako nuli. Prema tome, zbog nekorelisanosti njegovih vrednosti u razllčitim vremenskim trenucima, odnosno Cov(ε_s,ε_t)=0, zaključujemo da je proces belog šuma nemoguće predvideti, bez obzira na to koliko su vremenski trenuci bliski. Uz pretpostavku da je očekivanje nula dobijamo da je varijansa belog šuma beskonačna. Može se pokazati da su, sa verovatnoćom jedan, sve trajektorije prekidne u svakoj tački. Prema tome fizička realizacija ovog procesa nije moguća, [13].

Napominjemo da osobina da su vrednosti Belog šuma nekorelisane u vremenu ne ograničava vrednosti koje signal može da uzima, što znači da je bilo koja raspodela tih vrednosti u fiksiranom trenutku moguća, ali uz pretpostavku da je očekivanje procesa nula. Na primer, proizvoljan binaran signal, koji može da uzima jedino vrednosti 1 i -1 može da bude beli šum, ukoliko su njegove vrednosti u različitim vremenskim trenucima nekorelisane.

Prema tome i šum sa normalnom raspodelom može da bude beli šum. Takav šum naziva se Gausov beli šum. Pored Gusovog belog šuma postoje i Poisonov, Košijev, itd. Gausov beli šum se veoma često koristi za aproksimaciju većine realnih problema sa kojima se susrećemo u praksi. Zato se izraz *aditivni beli Gausov šum* već uveliko koristi kao standardna skraćenica, u oznaci *AWGN* (*additive white Gaussian noise*). Napominjemo još, da beli Gausov šum ima korisnu karakteristiku koja proizilazi iz nekorelisanosti njegovih vrednosti: $Cov(s,t)=0$, a to je da su njegove vrednosti ujedno i nezavisne, odnosno umesto pojma nekorelisanosti možemo da koristimo i pojam nezavisnosti.

Beli šum može da se interpretira i kao izvod Braunovog kretanja, o kojem će tek biti reči. Prema eksperimentu Roberta Brauna, Braunovim kretanjem se opisuje neregularno kretanje čestica rastvorenih u rastvoru, dok se u matematici proces Braunovog kretanja definiše kao neprekidan i stacionaran slučajni proces sa nekorelisanim (nezavisnim) inkrementima, koji u svakom fiksiranom trenutku t predstavlja Gausovu (normalnu) slučajnu promenljivu sa očekivanjem nula i varijansom t. Može se pokazati da je Braunovo kretanje nigde diferencijabilna funkcija i to bi bilo matematičko objašnjenje visokog stepena neregularnosti u kretanju čestica, koje je R. Braun video u svom eksperimentu. Prema tome, kako se za beli šum smatra da je izvod Braunovog kretanja možemo još jednom da potvrdimo da beli šum u stvarnosti ne postoji, odnosno da fizička realizacija procesa definisanog na ovaj način nije moguća.

1.4.2 Slučajni procesi sa nezavisnim priraštajima

Neka je $\{X_t\}$ proizvoljan slučajni proces, tada razlike $X_t - X_s$ nazivamo *priraštajima (inkrementima)* datog procesa. Za proces $\{X_t\}$ kažemo da je *proces sa nezavisnim priraštajima (inkrementima)*, ako za svaki izbor vremenskih trenutaka: $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ važi da su odgovarajući priraštaji nezavisne slučajne promenljive, odnosno da su navedeni priraštaji nezavisn: $X_{t0}, X_{t1} - X_{t0}, \ldots, X_{tn} - X_{tn-1}$.

Za poznavanje procesa $\{X_t\}$, $t \geq t_0$ sa nezavisnim priraštajima dovoljno je znati funkcije raspodele slučajnih veličina X_t, $X_t - X_s$. Prema tome, procesi sa nezavisnim priraštajima spadaju u procese kod kojih je poznavanje dvodimenzionalnih raspodela dovoljno za poznavanje slučajnog procesa, videti ref. [11].

Napomena *Proučavanje niza sa nezavisnim priraštajima svodi se na izučavanje niza nezavisnih slučajnih veličina sledećeg oblika:* $Y_0 = X_{t0}$, $Y_1 = X_{t1} - X_{t0}, \ldots, Y_n = X_{tn} - X_{tn-1}$. *Znajući raspodele verovatnoća za niz* Y_t *a na osnovu izraza* $X_n = Y_0 + \ldots + Y_n$, $n \geq 1$, *jednostavno se određuju konačno-dimenzionalne raspodele procesa* $\{X_t\}$, $t \geq t_0$.

1.4.3 Gausovski procesi

Slučajni proces $\{X_t\}, t \geq t_0$ čije su sve konačno-dimenzionalne raspodele normalne nazivamo *Gausovim slučajnim procesom*. Budući da je višedimenzionalna Gausova raspodela određena svojom kovarijansom i vektorom matematičkog očekivanja, zaključujemo da je i Gausov proces takođe određen (u smislu konačno-dimenzionalnih raspodela) svojom funkcijom očekivanja i kovarijacionom funkcijom, koje su date izrazima:

$$\mu(t) = E[X_t]\ ;\ Cov(X_s, X_t) = E(X_s - \mu(s)) \cdot (X_t - \mu(t))$$ [15].

Zbog toga je Gausov proces pogodan za direktna izračunavanja.

1.4.4 Markovski procesi

Proizvoljni slučajni proces $\{X_t\}$, $t \in T$ naziva se *Markovskim procesom*, ako za svako $n \in N$ i za svaku n-torku vremenskih trenutaka iz intervala $[0,T]$, $s_1 < s_2 < ... < s_n < t$, kao i za svaki Borelov skup B važi sledeći uslov:

$$P(X_t \in B |\ X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_n}) = P(X_t \in B |\ X_{s_n}).$$

Ukoliko trenutak t protumačimo kao sadašnjost, onda bi interpretacija ove definicije bila da budućnost procesa zavisi od prošlosti isključivo preko sadašnjeg trenutka. Drugim rečima, ukoliko poznajemo sadašnju vrednost procesa onda nam poznavanje prethodne istorije procesa nije potrebno, jer budućnost uopšte ne zavisi od prošlosti. Za detaljnije objašnjenje Markovskih procesa pogledati reference [11] i [13].

Primer 2.5
Poznati primer Markovskih procesa jeste *proces rađanja i umiranja*, koji opisuje veličinu populacije u zavisnosti od vremena, s tim što ćemo veličinu populacije u datom trenutku t označiti sa X_t. Kako je uobičajena pojava da neke jedinke nestaju, dok se nove pojavljuju, zaključujemo da veličina proizvoljne populacijeX_t mora da bude promenljiva veličina. U ovom primeru, prirodno je pretpostaviti da buduća veličina populacije zavisi od populacije iz prošlosti samo preko sadašnje populacije. Drugim rečima, za izračunvanje populacije u budućnosti uopšte nam nisu potrebne informacije iz prošlosti, već samo informacije iz sadašnjosti.

Napomena *Neka je t_0 početna vrednost skupa T. Za opisivanje Markovskih procesa dovoljno je poznavanje uslovnih raspodela $P(X_t \in B / X_s)$, za sve $s < t$, kao i početne raspodele $P(X_{t_0} \in B)$, jer se pomoću njih mogu naći sve ostale konačno-dimenzionalne raspodele. Svaki proces $\{X_t\}, t \geq t_0$ sa nezavisnim priraštajima, gde je $X_0=0$ jeste Markovski proces, videti [13].*

[15] Funkcija $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{Cov}(s,t)$ naziva se još i korelacionom funkcijom.

1.4.5 Martingali

Definicija 1.15 *(Martingali).* Neka je M_t proizvoljan slučajni proces adaptiran datoj filtraciji $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}$, gde vremenska promenljiva t može da bude neprekidna, $0\leq t\leq T$ ili diskretna $0,1,..T$. Proces M_t nazivamo *martingalom*, ako važe oba uslova:

(i) Ako je za svako t proces M_t integrabilan, odnosno očekivanje procesa M_t je konačno: $\mathbb{E}|X(t)|<\infty$.

(ii) Ako je za svako t i s, $0\leq s,t\leq T$ ispunjen *martingalski identitet*:

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right]=M_s . \tag{1.6}$$

Za procese sa diskretnim vremenom martingalski identitet je sledećeg oblika:

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]=M_n, \forall n .$$

Napomena *Martingali neprekidni u vremenu su oni procesi M_t, za koje postoji skup $\Omega_0\subset\Omega$ sa verovatnoćom $P(\Omega_0)=1$, takav da za svako $\omega\in\Omega_0$, važi da je funkcija f: $t\to M_t(\omega)$, koja je definisana na intervalu $[0,\infty)$, neprekidna funkcija.Takve procese nazivamo neprekidnim martingalima[16].*

Definicija 1.16 *(Submartingali i supermartingali).* Ako za proces X_t, $t\geq 0$ važi da je adaptiran filtraciji $\mathbb{F}$ i integrabilan i ako za svako t i s, $0\leq s,t\leq T$ važi sledeći identiteti:

(i) $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right]\geq X_s$, onda proces X_t nazivamo *submartingalom*.

(ii) $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right]\leq X_s$, onda proces X_t nazivamo *supermartingalom*.

Napomena *Funkcija očekivanja za supermartingale je nerastuća funkcija po promenljivoj t, a za submartingale je neopadajuća funkcija po promenljivoj t, dok je funkcija očekivanja za martingale konstantna funkcija u vremenu. Ako je proces X_t supermartingal, tada je proces $-X_t$ submartingal.*

[16] Neprekidnost može da se definiše i na sledeći način. Za proces kažemo da je neprekidan ako važi da je: $P(\{\omega \mid X_t(\omega)$ je neprekidna funkcija na intervalu $[0,T]\})=1$.

2. Braunovo kretanje

Poznati škotski botaničar Robert Braun (1773-1858), radio je na istraživanju fenomena koji je danas poznat pod imenom Braunovo kretanje, u kome su pod određenim uslovima male čestice rastvorene u tečnosti izložene neprekidnom i nepravilnom kretanju. Matematički model koji opisuje ovaj fenomen, među prvima su primenili *L. Bašelijer* i *A. Ajnštajn*. L. Bašelijer je primenio Braunovo kretanje u konstrukciji modela, koji opisuje kretanje cena proizvoljnih vrednosti na tržištu, dok je A. Ajnštajn, na osnovu istraživanja Roberta Brauna, procesom Braunovog kretanja modelovao kretanje čestica rastvorenih u tečnosti.

Poznati matematičar *Norbert Viner* je 1923. godine dao potpuni matematički opis ovog procesa i dokaz njegove egzistencije kao matematičkog objekta, zbog čega se proces Braunovog kretanja zove i Vinerov proces. U smislu matematičkog modela, postojanje ovog procesa nije očigledno, zbog čega se tvrđenje o egzistenciji Braunovog kretanja dokazuje kroz postupak konstrukcije Braunovog kretanja. Detaljno obrazložen proces Braunovog kretanja možete naći u ref. br. [14].

2.1 Definicija Braunovog kretanja

Definicija 2.1 *(Definicija Braunovg kretanja).* Neprekidni slučajni proces $\{B_t\}$, $0\leq t< T$ nazivamo *standardnim Braunovim kretanjem* na intervalu $[0,T)$, ako poseduje sledeće osobine:

(i) $B_0=0$[17].

(ii) (*Nezavisnost inkremenata*). Inkrementi procesa Braunovog kretanja B_t su nezavisni; to znači da su za proizvoljan konačan skup vremenskih trenutaka: $0\leq t_1 < t_2 <...< t_n < T$ slučajne promenljive $B_{t2}-B_{t1}$, $B_{t3}-B_{t2},..., B_{tn}-B_{tn-1}$ su nezavisne.

(iii) (*Gausova raspodela inkremenata*). Za bilo koji vremenski trenutak iz intervala $0\leq s,t \leq T$, proizvoljan inkrement B_t-B_s ima Gausovu raspodelu sa očekivanjem nula i varijansom $t-s$, tj. za svako $a<b$ važi:

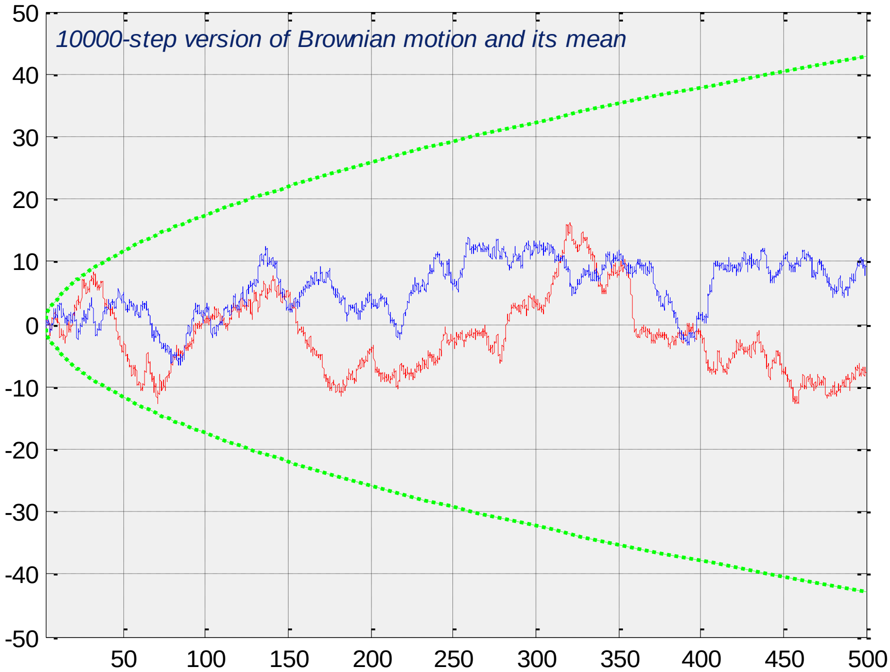
$$P\{a \leq B_t - B_s \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-x^2/2(t-s)}\,dx .$$

(iv) (*Neprekidnost trajektorija*). Za proizvoljno ω iz skupa verovatnoće jedan, važi da je $B_t(\omega)$ neprekidna funkcija po vremenu t.

---

17 Početna vrednost Braunovog kretanja može da bude proizvoljna tačka x, ali kada je u pitanju Standardno Braunovo kretanje onda je početna vrednost procesa nula.

Na *slici 2.1*. prikazane su trajektorije procesa Braunovog kretanja u vremenskom intervalu od T=500. Primetimo da se obe trajektorije nalaze u oblasti koja je ograničena zelenim linijama, što je posledica zakona o Iteriranom logaritmu, videti u [14].



slika2.1. Braunovo kretanje.

Lema 2.1 *(Kovarijansa Braunovog kretanja).* Kovarijansa Braunovog kretanja iznosi:

$$Cov(B_s, B_t) = \min(s,t),\ 0 \le s,t < \infty\ .$$

Dokaz:

Ako pretpostavimo da je $s \le t$, tada dobijamo: Cov(B_s, B_t) $=E(B_s \cdot B_t) - E(B_s) \cdot E(B_t)$. Na osnovu osobine *(iii)* iz definicije Braunovog kretanja sledi da je $E(B_t)=0$, odakle dobijamo:

$$Cov(B_s, B_t) = E(B_s \cdot (B_t - B_s + B_s)) = E(B_s \cdot (B_t - B_s)) + E(B_s^2) = E(B_s^2) = s.$$

Definicija 2.2 *(Druga verzija definicije Braunovg kretanja).* Neprekidni slučajni proces $\{B_t\}$, $0 \le t < T$ nazivamo *Standardnim Braunovim kretanjem* na intervalu [0,T), ako poseduje sledeće osobine:

(i) $B_0=0$.

(ii) (*Kovarijansa Braunovog kretanja*).
Kovarijansa procesa B_t iznosi: Cov(B_s, B_t) = min(s,t), za sve $0 \le s,t < T$.

(iii) (*Gausova raspodela inkremenata*). Za bilo koji vremenski trenutak iz intervala $0 \le s < t < T$, proizvoljan inkrement $B_t - B_s$ ima Gausovu raspodelu sa očekivanjem nula i varijansom $t-s$.

(iv) (*Neprekidnost trajektorija*). Za proizvoljno ω iz skupa verovatnoće jedan, važi da je $B_t(\omega)$ neprekidna funkcija po vremenu t.

Pozivajući se na *Definiciju 2.1*, može se pokazati da iz uslova *(iii)* navedene definicije, zajedno sa tvrđenjem:Cov(B_s,B_t)=min(s,t), sledi uslov *(ii)* o nezavisnosti inkremenata Braunovog kretanja. Dakle, *definicija 2.2* se dobija iz *definicije 2.1* kada se uslov *(ii)* o nezavisnosti inkremenata zameni uslovom o kovarijansi Braunovog kretanja i obratno, što znači da su navedene *definicije 2.1 i 2.2* Braunovog kretanja ekvivalentne. Ovo tvrđenje ćemo pokazati u sledećoj lemi.

Lema 2.2 *(Uslov nezavisnosti inkremenata).* Ako je proces $\{X_t\}$, $0\leq t< T$ Gausov proces i ako važe sledeće pretpostavke: $E(X_t)$=0za svako $0\leq t<T$ i Cov(X_s,X_t) = min(s,t), za sve $0\leq s,t< T$, tada sledi da proces $\{X_t\}$ ima *nezavisne inkremente*. Štaviše, ako za dati proces važe dodatni uslovi: X_0=0 i da proces $\{X_t\}$ ima neprekidne trajektorije, tada $\{X_t\}$ predstavlja standardno Braunovo kretanje na intervalu [$0,T$).

Dokaz:

S obzirom na to da važi tvrđenje da su koordinate višedimenzionalnog Gausovog vektora $\{V_i : 1\leq i \leq d \}$ nezavisne ako i samo ako je matrica kovarijanse Gausovog vektora Σ dijagonalna matrica, možemo da zaključujemo da će proces $\{X_t\}$ imati nezavisne inkremente ako i samo ako je matrica kovarijanse proizvoljnog konačnog vektora inkremenata:$(X_{t2} - X_{t1}, X_{t3} - X_{t2}, \ldots, X_{tn} - X_{tn-1})$ dijagonalna matrica. To znači da treba da pokažemo da su elementi izvan dijagonale te matrice jednaki nuli.

Prema tome, ako pretpostavimo da je $i< j$, tada za kovarijansu inkremenata dobijamo:

$$Cov(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) = E\left[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\cdot(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right] - E\left[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\right]\cdot E\left[(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right].$$

Kako je $E[(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})] = 0$ i Cov(X_s,X_t)=min(s,t) imamo:

$$E\left[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\cdot(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right] = E\left[X_{t_i} X_{t_j}\right] - E\left[X_{t_i} X_{t_{j-1}}\right] - E\left[X_{t_{i-1}} X_{t_j}\right] + E\left[X_{t_{i-1}} X_{t_{j-1}}\right]$$
$$= t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0.$$

Tvrđenje u drugom delu leme, da je proces $\{X_t\}$ uz neke dodatne uslove isto što i Braunovo kretanje sledi iz definicije Braunovog kretanja i time je dokaz leme završen, pogledati ref. [18].

2.2 Osobine Braunovog kretanja

Teorema 2.1 *(Osobine Braunovog kretanja).*Neka je $\{B_t\}, 0 \le t < T$ proces Braunovog kretanja, tada važe sledeće osobine datog procesa:

(i) Proces Braunovog kretanja B_t pripada klasi procesa sa *nezavisnim priraštajima*.

(ii) Proces Braunovog kretanja B_t pripada klasi *Markovskih* slučajnih procesa.

(iii) Proces Braunovog kretanja pripada klasi *Gausovih procesa*, pri čemu važi: $E(B_t)=0$ i važi da je $Cov(X_s,X_t) = \min(s,t)$.

(iv) (*Translaciona invarijantnost Braunovog kretanja*).

Za svako $t_0 \ge 0$ važi da je slučajni proces $\tilde{B}_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ Braunovo kretanje.

Dato tvrđenje je ekvivalentno tvrđenju da proces B_t pripada klasi *stacionarnih procesa*.

(v) (*Invarijantnost skaliranja Braunovog kretanja*).

Za svaki realan broj $\lambda > 0$, važi da je slučajni proces $\tilde{B}_t = B_{\lambda t} \big/ \sqrt{\lambda t}$ Braunovo kretanje.

Teorema 2.2 *(Osobine trajektorija Braunovog kretanja).* Ako se posmatra Braunovo kretanje $\{B_t\}, 0 \le t < T$ kao funkcija koja zavisi od vremena, tada za skoro sve trajektorije Braunovog kretanja važi:

(i) Trajektorije B.k. su neprekidne funkcije po promenljivoj t

(ii) Trajektorije B.k. nisu monotone ni na jednom intervalu, bez obzira na dužinu tog intervala

(iii) Trajektorije B.k. nisu diferencijabilne funkcije ni u jednoj tački

(iv) Trajektorije B.k. imaju beskonačnu varijaciju na proizvoljnom intervalu bez obzira na dužinu tog intervala

(v) Kvadratna varijacija Braunovih trajektorija na intervalu $[0,t]$ iznosi t, odnosno važi:

$$[B,B](t) = \big[B,B\big]([0,t]) = \underset{\|\pi\| \to 0}{\mathrm{P}\lim} \sum_{i=1}^{n} \left| B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n) \right|^2 = t \, .$$

Pogledati reference [9], [14] i [18].

2.3 Objašnjenje i motivacija konstrukcije Braunovog kretanja

Proces Braunovog kretanja može da se prikaže kao slučajna suma integrala funkcija iz $L^2[0,1]$ prostora i time se pokazuje *egzistencija* procesa Braunovog kretanja. Navedena konstrukcija, pored toga što se koristi za konstrukciju Braunovog kretanja,može da se koristi i za konstrukciju proizvoljnog slučajnog procesa, a takođe ima primenu i u izvođenjima pojedinih osobina Braunovog kretanja. Prema tome, cilj je da predstavimo proces Braunovog kretanja kao razvoj po funkcijama prostora $L^2[0,1]$, ali tako da koeficijenti razvoja budu slučajne promenljive. Za detaljnije obrazloženje konstrukcije Braunovog kretanja pomoću talasića pogledati reference [4], [5] i [18],dok Pol Levijevu konstrukciju Braunovog kretanja (*Paul Levy's construction*) možete pogledati u ref. [14].

Kada bi postojao proces belog šuma, koji predstavlja izvodni proces Braunovog kretanja, onda bi važilo:

$$\varepsilon_t = X_t' = \lim_{\Delta t \to 0} (X_{t+\Delta t} - X_t)/\Delta t ,$$

gde je ε_t oznaka za beli šum, a X_t Braunovo kretanje. Iz navedene jednakosti i osobina Braunovog kretanja proizilazi da su ε_t nezavisne veličine u vremenu sa očekivanjem nula i beskonačnom varijansom. Prema tome, zaključujemo da je ε_t klasičan beli šum u neprekidnom vremenu, čija je realizacija nemoguća. Ako primenimo L_2 teoriju na ε_t dobijamo sledeću jednakost:

$$\varepsilon_s(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega)\phi_n(s) , \tag{2.1}$$

Iz poslednje jednačine dobija se razvoj Braunovog kretanja koji je oblika:

$$X_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega)\int_0^t \phi_n(s)ds . \tag{2.2}$$

Iako je nemoguće realizovati jednačinu (2.1), iz razloga što Beli šum ne može da se opiše modelom slučajnog procesa, ispostavlja se da, se koeficijenti jednačine mogu odrediti, što je objašnjeno u sledećoj teoremi.

Teorema 2.3 *(Razvoj Braunovog kretanja).* Neka je $\{\phi_n\}$ proizvoljna KONB prostora $L^2[0,1]$ i neka je Z_i niz identičnih, nezavisnih Gausovih slučajnih promenljivih oblika $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ definisanih na prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Tada, za svako t važi da niz definisan izrazom:

$$X_t^n = \sum_{i=0}^{n} Z_i \int_0^t \phi_i(x)\, dx,\ \ n \to \infty , \tag{2.2a}$$

predstavlja Košijev niz u prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, čija je granična vrednost Gausova slučajna promenljiva sa očekivanjem jednakim nuli i varijansom jednakom t. Datu graničnu vrednost ćemo označiti sa $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Za proizvoljna dva trenutka t i s, važi da je kovarijansa od X_t jednaka: Cov(X_s, X_t) $=E(X_s \cdot X_t)$=min(s,t).

Napomena *Iz teoreme 2.3 zaključuje se da razvoj(2.2a) konvergira prema procesu X_t, kada $n\to\infty$.Za proces X_t pokazuje se da je Gausov proces sa funkcijom kovarijanse jednakom $min(s,t)$. Na osnovu leme 2.2 sledi da je Gausov proces sa osobinama: Cov(X_s,X_t)=min(s,t) i $E(X_t)=0$ proces sa nezavisnim inkrementima. Prema tome, da bi se pokazalo da je granična vrednost procesa X_t jednaka procesu Braunovog kretanja, ostaje još samo da se pokaže da X_t ima neprekidne trajektorije sa verovatnoćom jedan,kao i da je $X_0=0$. Pošto neprekidnost trajektorija zavisi od izbora baze $\{\phi_n\}$, sa namerom se odabire ortonormirana baza Harovih funkcija, koje pripadaju prostoru $L^2[0,1]$. Osobine funkcija iz $L^2[0,1]$ prostora kao i osobina ortonormiranosti dodatno su objašnjene u prilogu A, u odeljku 8.1.*

2.4 Harove i Šauderove funkcije (talasići)

Definicija 2.3 *(Harove funkcije)*. Familija Harovih funkcija $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ na intervalu $0\leq t \leq 1$ definiše se na sledeći način: $H_0(t)=1$, za $0\leq t \leq 1$,

$$H_1(t)=\begin{cases} 1 \quad za \;\; 0\leq t<\dfrac{1}{2}, \\ -1 \quad za \;\; \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1, \\ 0, \;\; u\ suprotnom. \end{cases} \qquad H_n(t)=\begin{cases} 2^{j/2} \quad za \;\; \dfrac{k}{2^j}\leq t<\dfrac{1/2+k}{2^j}, \\ -2^{j/2} \quad za \;\; \dfrac{1/2+k}{2^j}\leq t\leq \dfrac{1+k}{2^j}, \\ 0, \quad u\ suprotnom. \end{cases} \text{za } n\geq 2$$

Naglasimo specijalno, da svako $n\geq 1$ može da se jednoznačno predstavi u obliku: $n=2^j+k$, gde se konstante k i j nalaze u granicama: $0\leq k<2^j$, $j\geq 0$.

Napomena *Proizvoljna Harova funkcija $H_n(t)$,za $n>1$može da se predstavi translacijom i skaliranjem osnovne Harove funkcije $H_1(t)$ i to na sledeći način:*

$$H_n(t)=2^{j/2}\cdot H_1(2^j t-k),\;\; n=2^j+k,\;\; j\geq 0 \;\; i \;\; 0\leq k<2^j .$$

U slučaju kada se koristi sledeći zapis:$n=2^j+k$ i $0\leq k<2^j$ dobija se drugačija reprezentacija serije Harovih funckija $\{H_n\}$ i to u vidu dvostruko indekisranog niza, pogledati referencu [18].Oznaka j predstavlja broj vrste,dok oznaka k predstavlja pomeraj u fiksiranoj vrsti:

$$\begin{array}{l|l} j=0 & H_1 \\ j=1 & H_2 \;\; H_3 \\ j=2 & H_4 \;\; H_5 \;\; H_6 \;\; H_7 \\ j=3 & H_8 \;\; H_9 \;\; H_{10} \;\; H_{11} \;\; H_{12} \;\; H_{13} \;\; H_{14} \;\; H_{15} \end{array}$$

Sa ovakvom predstavom Harovih funkcija neke karakteristike baze $\{H_n\}$ postaju očiglednije. Kao npr. da sve funkcije u istoj vrsti (tj. funkcije sa istim indeksom j) predstavljaju translaciju prve funkcije u tom redu, kao i da su skupovi na kojima su proizvoljne dve funkcije iz iste vrste različite od nule disjunktni skupovi.

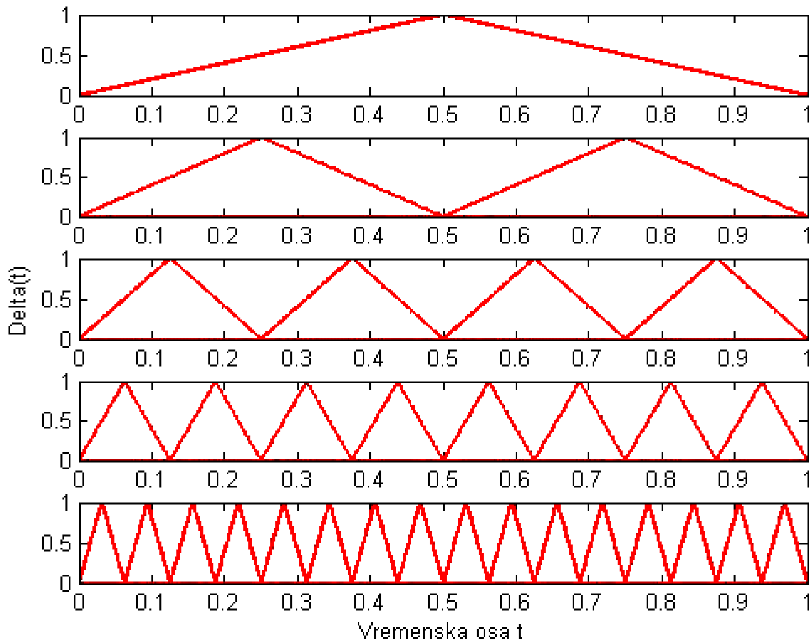
Lema 2.3 *(Harova baza).*
Familija Harovih funkcija $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ čini kompletnu ortonormiranu bazu prostora $L^2[0,1]$.

Definicija 2.4 *(Šauderove,trouglaste funkcije)*. Familiju Šauderovih funkcija $\{\Delta_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, na intervalu $0\leq t \leq 1$ definišemo kao neodređene integrale Harovih funkcija:

$$\int_0^t H_n(u)\,du=\lambda_n\,\Delta_n(t),\;\; \lambda_0=1, \tag{2.3}$$

gde se koeficijenti uz Šauderove funkcije računaju izrazom: $\lambda_n=(1/2)\cdot 2^{-j/2}$, $n=2^j+k$ i $0\leq k<2^j$, za $n\geq 1$.

Grafici Šauderovih funkcija, prikazani na *slici 2.2,* predstavljaju trougliće visine jedan koji leže iznad intervala dužine 2^{-j} i koji su oblika: $[k/2^j, (k+1)/2^j]$. Prema tome, za svako n važiće sledeća jednakost: $\max|\Delta_n(t)|=1$, za $0\leq t\leq 1$.



slika (2.2): Na slici su prikazani grafici Šauderovih funkcija $\Delta_n(t)$. Grafici Šauderovih funkcija koji imaju iste vrednosti promenljive j, odnosno oni grafici koji se nalaze u istoj vrsti, ne preklapaju se za različite vrednosti k.

Šauderove funkcije mogu da se napišu i u sledećem obliku:

$$\Delta_0(t)=t,\ \ za\ 0\leq t\leq 1.$$

$$\Delta_1(t)=\begin{cases} 2t & za\ 0\leq t<\frac{1}{2}, \\ 2(1-t) & za\ \frac{1}{2}\leq t\leq 1, \\ 0 & u\ \ suprotnom. \end{cases}\qquad \Delta_n(t)=\begin{cases} 2^{j+1}(t-\frac{k}{2^j}) & za\ \frac{k}{2^j}\leq t<\frac{k+1/2}{2^j} \\ 2^{j+1}(\frac{k+1}{2^j}-t), & za\ \frac{k+1/2}{2^j}\leq t\leq\frac{k+1}{2^j}, \\ 0, & u\ suprotnom. \end{cases}\ \text{za}\ n\geq 2.$$

Svako $n\geq 1$može da se jednoznačno predstavi u obliku:$n=2^j+k$,gde su konstante k i j u granicama:$0\leq k<2^j$, $j\geq 0$.

Napomena *Šauderove funkcije $\Delta_n(t)$, za $n\geq 1$ možemo da predstavimo translacijom i skaliranjem osnovne Šauderove funkcije $\Delta_1(t)$ na sledeći način: $\Delta_n(t)=\Delta_1(2^j\,t-k)$, $n=2^j+k$, $0\leq k<2^j$, $j\geq 0$. Postupak konstrukcije u kojem je Braunovo kretanje predstavljeno kao razvoj po funkcijama ortonormirane baze jeste vid Vejvlet analize, odnosno analize talasića u kojoj Harove funkcije predstavljaju vrstu talasića, videti ref. [18]. Osnovna Harova funkcija $H_1(t)$, iz koje se postupkom translacije i skaliranja dobijaju ostali članovi Harove serije talasića nazivamo ''majkom talasića''.*

2.4 Reprezentacija Braunovog kretanja pomoću talasića

Zbog jednostavnosti postupka konstruisaćemo Braunovo kretanje na intervalu [0,1], a zatim proširiti na ceo vremenski interval. Cilj je da se pokaže da razvoj (2.2a) konvergira uniformno i skoro sigurno ka X_t, kada se za ortonormiranu bazu $\{\phi_n\}$ izabere serija Harovih funkcija. Pokazaćemo da je granična vrednost datog razvoja Braunovo kretanje [4].

Teorema 2.4 *(Konvergencija vejvlet reprezentacije/ konvergencija reprezentacije Braunovog kretanja pomoću talasića).* Neka je $\{Z_n\}$, $0\leq n<\infty$ niz nezavisnih Gausovih slučajnih promenljivih oblika $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tada, kada $N\to\infty$, razvoj definisan izrazom:

$$X_t^N = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n Z_n \Delta_n(t) \tag{2.4}$$

konvergira uniformno po t, na intervalu [0,1], sa verovatnoćom jedan. Proces definisan kao granična vrednost datog razvoja: $X_t = \lim X_t^N$, kada $n\to\infty$, jeste stohastički proces sa neprekidnim trajektorijama.

Dokaz:

S obzirom da je n oblika: $n=2^j+k$, sledi da dati razvoj možemo da napišemo i drugačije:

$$X_t^N = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_n Z_n \Delta_n(t) \text{ , kada } N\to\infty.$$

Da bismo pokazali da dati razvoj konvergira kada $n\to\infty$, treba da pokažemo da su članovi tog razvoja ograničeni kada $n\to\infty$. Prema tome, pokazaćemo da je niz datih Gausovih slučajnih promenljivih Z_n ograničen odozgo nizom koji zavisi od parametra n i to tako što ćemo dokazati da je maksimalna vrednost niza Z_n ograničena, u oznaci:

$$b_j = \max_{0\leq k<2^j} |Z_n|.$$

(Datu vrednost b_j posmatraćemo u opsegu za koji je j fiksirano, a parametar k se menja: $0\leq k<2^j$, jer u tom opsegu funkcije $\Delta_n(t)$ imaju jednake maksimume i ne preklapaju se).

Lema: *Za proizvoljnu standardnu Gausovu slučajnu promenljivu, u oznaci* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ *i za proizvoljno* $x>0$ *važi:* $P(|Z|>x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-x^2/2}}{x}$.

Dokaz:

S obzirom da je $\frac{u}{x}\geq 1,\ x>0$ *imamo:*

$$P(|Z|>x) = 2P(Z>x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty \frac{u}{x}e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

Primenimo lemu na zadati niz Gausovih slučajnih promenljivih Z_n i dobićemo izraz:

$$P\left[|Z_n|>x_n\right] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-x_n^2/2}}{x_n} \text{ , za proizvoljno } x_n.$$

Prema tome, imamo:

$$P\left[b_j > x_n\right] = P\left[\max_{0\le k<2^j} |Z_n| > x_n\right] \overset{1.}{=} P\left[\bigcup_{0\le k<2^j} \{|Z_n| > x_n\}\right] \overset{2.}{\le} \sum_{0\le k<2^j} P\{|Z_n| > x_n\}$$

$$\le 2^j \cdot P\{|Z_n| > x_n\}$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{2^j e^{-x_n^2/2}}{x_n} \tag{2.5}$$

Jednakost 1. se oslanja na jednostavan stav, koja tvrdi da je maksimalna vrednost niza Z_n na nekom intervalu veća od x_n, ako je barem jedna vrednost tog niza veća od x_n. *Jednakost 2.* je posledica osobine subaditivnosti verovatnoće.

Poslednja nejednakost (2.5) važi za proizvoljnu konstantu x_n,prema tome važiće i za izabranu konstantu $x_n = j$. Zamenimo konstantu u datu nejednakost i dobićemo:

$$P\left[b_j > j\right] \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{2^j e^{-j^2/2}}{j}.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti za $j = 1, 2, \ldots,$ dobijamo:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\left[b_j > j\right] \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j e^{-j^2/2}}{j} < \infty.$$

S obzirom na to da red sa desne strane konvergira[18], primenom Borel-Kantelijeve leme dobijamo da je verovatnoća da će se događaj $\{b_j > j\}$ desiti beskonačno mnogo puta jednaka nuli, tj. mora da važi:

$$\left(\exists\, \bar{\Omega}, P(\bar{\Omega}) = 1\right)\left(\forall \omega \in \bar{\Omega}\right)\left(\exists\, J(\omega)\right)\left(\forall j \ge J(\omega)\right)\ b_j(\omega) \le j\,.$$

Kako je $\max(\Delta_n(t)) = 1,\ 0 \le t \le 1$, tada za $j \ge J(\omega)$ imamo:

$$\sum_{j=J(\omega)}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{J(\omega)}-1} \lambda_n Z_n \Delta_n(t) \le \sum_{j=J(\omega)}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{J(\omega)}-1} \max\left(\lambda_n Z_n \Delta_n(t)\right) = \sum_{j=J(\omega)}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{J(\omega)}-1} \frac{1}{2} \cdot 2^{-j/2}\, b_j(\omega)$$

$$\le \sum_{j=J(\omega)}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{J(\omega)}-1} \frac{1}{2} \cdot 2^{-j/2}\, j < \infty.$$

Kako posledenji član teži nuli kada $J \to \infty$, dobili smo da za svako $\omega \in \bar{\Omega}$, razvoj $X_t^N(\omega)$ konvergira uniformno po promenljivoj t, prema graničnoj vrednosti X_t. Neprekidnost trajektorija procesa $\{X_t(\omega);\ 0 \le t \le 1\}$,sledi iz uniformnosti konvergencije i primenom leme o graničnoj vrednosti neprekidnih funkcija *[lema 8.1; prilogA]*.

Teorema 2.5 *(Vejvlet reprezentacija Braunovog kretanja / reprezentacija Braunovog kretanja pomoću talasića).* Proces $\{X_t\}$, $0 \le t \le 1$ koji se definiše kao granična vrednost razvoja $\{X_t^N\}$, $N \to \infty$ je standardno Braunovo kretanje na intervalu [0,1].

<u>Dokaz</u>

[18] Konvergencija se dokazuje Dalamberovim kriterijumom.

Prema *lemi 2.2* proizvoljan Gausov proces sa neprekidnim trajektorijama, početnom vrednošću $X_0=0$ i sa očekivanjem i kovarijansom kao u jednačinama (2.6) jeste standardno Braunovo kretanje.

$$E(X_t)=0, \text{ za svako } 0\leq t< T \text{ i } Cov(X_s,X_t) = \min(s,t), \text{ za sve } 0\leq s,t< T, \tag{2.6}$$

U prethodnoj lemi o graničnoj vrednosti neprekidnih funkcija *[lema 8.1; prilogA]* pokazali smo da razvoj X_t^N uniformno konvergira prema procesu X_t i da su trajektorije tog procesa neprekidne u vremenu. Ostalo nam je još da pokažemo da je proces $\{X_t\}$ Gausov proces, zatim da je $X_0=0$, kao i da su njegovo očekivanje i kovarijansa dati uslovom (2.6). Tada će važiti da je proces X_t Braunovo kretanje.

Pokažimo prvo da je $E(X_t)=0$.

$$E(X_t) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n E\left(Z_n\right) \Delta_n(t) = 0 .$$

Za kovarijansu dobijamo:

$$Cov(X_s, X_t) = E(X_s \cdot X_t) = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(s) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m Z_m \Delta_m(t)\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} E\left(Z_n Z_m\right) \lambda_n \lambda_m \; \Delta_m(t)\Delta_n(s)$$

Iz pretpostavke da su $\{Z_n\}$ nezavisne i da imaju Gausovu raspodelu $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, sledi:

$$E\left(Z_n Z_m\right) = E(Z_n)E(Z_m) = 0 \text{ i } E(Z_n^{\,2}) = 1.$$

Prema tome, primenom definicije 2.4 o Šauderovim funkcija na prethodni izraz, dobijamo kovarijansu:

$$\begin{aligned} Cov(X_s, X_t) &= \sum_{n=0,n=m}^{\infty} E\left(Z_n Z_n\right) \lambda_n \lambda_n \; \Delta_n(s)\Delta_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Delta_n(s) \; \lambda_n \Delta_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s H_n(u)\,du \int_0^t H_n(u)\,du \\ &= \min(s, t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Poslednji korak u ovom dokazu bio bi da pokažemo da za proizvoljan konačan niz vremenskih trenutaka $t_1< t_2< ...< t_m$ slučajan vektor $(X_{t1}, X_{t2},...,X_{tm})$ ima višedimenzionalnu Gausovu raspodelu, odakle, na osnovu definicije Gausovog procesa, sledi da je $\{X_t\}$ zaista Gausov proces. Da bismo to pokazali, jednostavno ćemo da izračunamo karakterističnu funkciju datog slučajnog vektora $(X_{t1}, X_{t2},...,X_{tn})$. Dakle, neka je X m-dimenzionalni slučajni vektor i neka je $\theta = (\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$ realan vektor, tada karakterističnu funkciju vektora X računamo prema formuli:

$$\varphi_X(\theta) = E[\exp(i\,\theta^T X)] = E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{m} \theta_j X_{t_j}\right)\right] = E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{m} \theta_j \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(t_j)\right)\right]$$
$$= E\left[\exp\left(i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \theta_j \lambda_n Z_n \Delta_n(t_j)\right)\right] = E\left[\prod_{n=0}^{\infty} \exp\left(i\,\lambda_n Z_n \sum_{j=1}^{m} \theta_j \Delta_n(t_j)\right)\right].$$

Kako su slučajne promenljive Z_n nezavisne dobijamo:

$$\varphi_X(\theta) = E[\exp(i\,\theta^T X)] = \prod_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(i\,\lambda_n\, Z_n \sum_{j=1}^{m} \theta_j\, \Delta_n(t_j)\right)\right].$$

Primetimo da poslednji izraz podseća na formulu za karakterističnu funkciju jednodimenzionalne slučajne promenljive Ee^{its}, gde bi u našem slučaju slučajnoj promenljivoj S odgovarala baš Gausova slučajna promenljiva Z_n. Prema tome, možemo da iskoristimo formulu za karakterističnu funkciju jednodimenzionalne Gausove slučajne promenljive koja glasi:

$$\varphi_{Z_n}(t) = E\,\mathrm{e}^{itZ_n} = \exp(i\,t\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}), \text{ za } \mu = 0, \sigma = 1,$$

Odakle dobijamo:

$$\prod_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(i\left(\lambda_n \sum_{j=1}^{m} \theta_j\, \Delta_n(t_j)\right)\cdot Z_n\right)\right] = \prod_{n=0}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda_n \sum_{j=1}^{m} \theta_j\, \Delta_n(t_j)\right)^2\right)\right].$$

Prikažimo opet proizvod eksponenata kao sumu članova u argumentu:

$$\prod_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(i\left(\lambda_n \sum_{j=1}^{m} \theta_j\, \Delta_n(t_j)\right)\cdot Z_n\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n)^2\left(\sum_{j=1}^{m} \theta_j\, \Delta_n(t_j)\right)^2\right).$$

Napišimo kvadratni izraz u drugom obliku, a zatim primenimo Parsevalov identitet [(8.13); prilogA] i dobijamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n)^2\left(\sum_{j=1}^{m} \theta_j\, \Delta_n(t_j)\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} \theta_k\, \Delta_n(t_k)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n)^2\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \theta_j\theta_k \Delta_n(t_j)\Delta_n(t_k)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\;\sum_{n=0}^{\infty} \theta_j\theta_k \cdot \left(\lambda_n\Delta_n(t_j)\;\lambda_n\Delta_n(t_k)\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \theta_j\theta_k \cdot \min(t_j, t_k).$$

Prema tome, na kraju dobijamo izraz za karakterističnu funkciju slučajnog vektora X :

$$\varphi_X(\theta) = E[\exp(i\,\theta^T X)] = E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{m} \theta_j X_{t_j}\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \theta_j\theta_k \cdot \min(t_j, t_k)\right).$$

Na osnovu toga vidimo da poslednji izraz predstavlja karakterističnu funkciju višedimenzionalnog Gausovog slučajnog vektora sa očekivanjem nula i matricom kovarijanse $\sum = \min(t_i, t_j)$. Time smo pokazali da slučajan vektor $X = (X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tm})$ ima višedimenzionalnu Gausovu raspodelu, odakle je X_t Gausov proces, a na osnovu ostalih dokazanih osobina proces X_t je i Braunovo kretanje, videti referencu [18].

2.5 Konstrukcija Braunovog kretanja na proizvoljnom intervalu

Budući da je pokazano da standardno Braunovo kretanje postoji na intervalu [0,1], sada može da se konstruiše standardno Braunovo kretanje i na intervalu od $[0,\infty)$. Postupak se sastoji u tome da se generiše prebrojivo mnogo (nezavisnih) isečaka Braunovog kretanja na jediničnom intervalu, a zatim da se izvrši spajanje, ali tako da se početna tačka trajektorije svakog novog isečka poklapa sa krajnjom tačkom prethodne trajektorije, ref. [18].

Lema 2.4 *(Konstrukcija Braunovog kretanja na intervalu [0,T]).* Neka je $B^{(k)}(t)$ niz generisanih Braunovih kretanja na jediničnom intervalu, gde je $k=0,1,2,\ldots$ Braunovo kretanje $B(t)$ na proizvoljnom intervalu $t\in[0,T]$, definiše se spajanjem potrebnog broja Braunovh kretanja na jediničnim intervalima na sledeći način:

(i) Ako je $t \in [0,T]$, važi: $B(t) = B^{(1)}(t)$.

(ii) Ako je $t > 1$ i $n = [t]$, tada $B(t)$ definišemo izrazom: $B(t) = \sum_{k=1}^{n} B^{(k)}(1) + B^{(n+1)}(t-n)$. (2.8)

Npr. vrednost Braunovog kretanja u trenutku $t = 3.5$ predstavljamo na sledeći način:

$B(3.5) = B^{(1)}(1) + B^{(2)}(1) + B^{(3)}(1) + B^{(4)}(0.5)$.

3. Itoov integralni račun

U običnom integralnom računu, Rimanov integral se konstruiše graničnim postupkom koji podrazumeva da se prvo definiše Rimanov integral proste (stepenaste) funkcije[19], a zatim se definicija proširuje na klasu složenijih, tzv. Riman-integrabilnih funkcija. U daljem postupku se date složene funkcije, zbog osobina prostora kojem pripadaju, proizvoljno precizno aproksimiraju prostim funkcijama. Cilj graničnog postupka je da se Rimanov integral funkcije f, koja pripada klasi Riman-integrabilnih funkcija, definiše kao limes integrala prostih funkcija, za koje je dokazano da postoje i da konvergiraju prema složenoj funkciji f.

Analogan postupak primenjuje se na Riman-Stiltjesov integral, koji je sledećeg oblika: $\int f(s)dg(s)$, gde su f i g funkcije ograničene varijacije. Prema tome, Riman-Stiltjesov integral se definiše kao granična vrednost integralnih suma: $\sum f(s_i)[g(s_i)-g(s_{i-1})]$, i=1,..n, gde je: $s_1 < s_2 < .. < s_n$, proizvoljna particija intervala $[0,t]$. Koristeći teoremu srednje vrednosti, kao i činjenicu da je funkcija g diferencijabilna, može se pokazati sledeći identitet: $\int f(s)dg(s) = \int f(s)g'(s)ds$.

Zbog velike primene slučajnih procesa u raznim oblastima, kao i pojave modelovanja pojava slučajnim procesima, pojavila se potreba za integracijom po trajektorijama slučajnih procesa, kao što potreba za integracijom po funkcijama ograničene varijacije već uveliko postoji. Navedeni integral slučajnog procesa naziva se *stohastički integral*, a odgovarajući integralni račun naziva se *stohastički integralni račun*. Prilikom integracije slučajnih procesa važno je odrediti koje osobine treba da poseduju procesi po kojima se vrši integracija (*integratori*), a koje procesi koji se integrale (*podintegralni procesi*), uz uslov da polazni integral mora da postoji.

Obično se prilikom stohastičke integracije za integrator koristi proizvoljan martingalski proces, dok se u najuopštenijem slučaju za integrator koriste semimartingalski procesi, tada je stohastički integral oblika:

$$\int f(\omega, s)dX(s)\,. \tag{3.1}$$

Napominjemo da podintegralna funkcija može da bude, kako deterministička funkcija konačne varijacije tj. funkcija oblika: $f(\omega,t) = f(t)$, tako može da bude i slučajni proces, tj. funkcija oblika: $f(\omega,t) = X_t$.

[19] Prisetimo se da smo Rimanov integral proste funkcije definisali kao ''površinu ispod grafika podintegralne funkcije''.

U ovom poglavlju želimo da dokažemo egzistenciju i pokažemo konstrukciju stohastičkog integrala, koji za integrator koristi Braunovo kretanje i koji je sledećeg je oblika:

$$\int f(\omega, s) dB(s) , \tag{3.2}$$

Stohastički integral oblika (3.2) naziva se *Itoov integral*, a odgovarajući račun naziva se *Itoov integralni račun*. Dalje u radu koristićemo samo Itoove integrale.

Suštinska razlika zbog koje Itoove integrale ne možemo da predstavimo pomoću Stiltjesovog integrala je u tome što *trajektorije Braunovog kretanja ne pripadaju klasi funkcija ograničene varijacije sa verovatnoćom jedan*, odnosno trajektorije Braunovog kretanja su funkcije koje nisu diferencijabilne ni u jednoj tački *t*, ili drugačije rečeno *nigde diferencijabilne funkcije*.

Prema tome, Itoov integral mora iznova da se definiše i konstruiše. Najprirodniji način je da se koristi isti granični postupak kao prilikom konstrukcije Rimanovog i Stiltjesovog integrala, s tim što će analog prostoj funkciji, ovoga puta biti prost proces (ili slučajna stepenasta funkcija). Prilikom konstrukcije datog integrala moramo voditi računa da Itoov integral mora da zadrži i neke osnovne osobine integrala (videti ref. [9]) a to su:

(i) Ako je $f(\omega,t) = c$ ($c = const$), onda je: $\int_0^t c\, dB(s) = c(B(T) - B(0))$;

$$(ii)\ \text{Aditivnost: } \int_0^T f(\omega, s)\, dB(s) = \int_0^a f(\omega, s)\, dB(s) + \int_a^T f(\omega, s)\, dB(s); \tag{3.3}$$

(iii) Linearnost: $\int_0^T [\alpha f(\omega, s) + \beta g(\omega, s)]\, dB(s) = \alpha \int_0^T f(\omega, s)\, dB(s) + \beta \int_0^T g(\omega, s)\, dB(s)$;

Sve tri navedene osobine *(i)*-*(iii)* označićemo brojem (3.3).

3.1 Definicija i konstrukcija Itoovog integrala

- Uslovi egzistencije Itoovog integrala
- Klase$\mathcal{H}^2$ i $\mathcal{L}^2_{LOC}$
- Itoov integral determinističke proste funkcije
- Itoov integral proste slučajne funkcije
- Proširenje definicije Itoovog integrala
- Osobine Itoovog integrala na klasi $\mathcal{H}^2$

3.1.1 Uslovi egzistencije Itoovog integrala

Pojam apstraktnog integrala u nekom prostoru uvodi se u odnosu na datu meru. Prema tome, važno je izdvojiti klasu funkcija na koje se može primeniti postupak integracije i tu klasu čine baš merljive funkcije[20]. Tako da se prvi uslov egzistencije integrala odnosi na osobinu merljivosti funkcija, dok se drugi uslov odnosi na integrabilnost funkcija. Pod pojmom integrabilnih funkcija podrazumevamo merljive funkcije sa konačnom L^1 normom oblika *[PrilogA]*: $\int_S |f| \, d\mu < +\infty$.

S obzirom na to da postoji analogija između postupka konstrukcije apstraktnog integrala na proizvoljnom prostoru integrabilnih funkcija i konstrukcije Itoovog integrala na prostoru slučajnih funkcija, odnosno slučajnih procesa zaključujemo da konstrukcija Itoovog integrala ima smisla, ukoliko je podintegralna funkcija $f(\omega,t)$ *merljiva funkcija* na prostoru $\Omega\times[0,T]$ i ako ispunjava *uslov integrabilnosti* (tj. pripada prostoru integrabilnih funkcija).

U radu navodimo kako se definiše Itoov integral determinističke proste funkcije, slučajne proste i slučajne složene funkcije. Kako je slučaj determinističke proste funkcije najednostavniji, samim tim su i uslovi koje moraju da ispune te funkcije elementarni, a to su merljivost i integrabilnost. Naprotiv, kod slučajnih funkcija (i prostih i složenih) nameću se dodatna ograničenja koje procesi moraju da ispunjavaju, odnosno javljaju se stroži vidovi merljivosti, u koje spadaju *adaptiranost* i *progresivna merljivost* procesa.

Ako je podintegralna funkcija slučajni proces, onda data funkcija mora da zadovoljava i osobinu adaptiranosti. Međutim, da bi stohastički integral posedovao još neke dodatne željene osobine uvodi se jači uslov od adaptiranosti procesa, a to je: *uslov progresivne merljivosti*. Na primer, prethodni uslov adaptiranosti procesa X_t nije dovoljan da bi očekivanje i integral mogli da menjaju mesta (*Fubinijeva teorema*), ali *uslov progresivne merljivosti* nam to obezbeđuje, videti ref. [9]. Progresivna merljivost podintegralne funkcije obezbeđuje, između ostalog i osobinu adaptiranosti Itoovog integrala, pogledati ref. [10] i [15].

Napomena *Generalno govoreći konstrukcija stohastičkog integrala postupkom aproksimacije prostim funkcijama mogla bi da se izvede i samo za merljive procese, jer je skup prostih procesa gust u skupu merljivih funkcija. Međutim, tada ne bi bio ispunjen uslov da je stohastički integral martingalski proces, odnosno da je Itoov integral .*

[20] Pojam merljivosti funkcije ne zavisi od date mere na polaznom prostoru, već od izbora σ-polja na tom prostoru.

3.1.2 Klase $\mathcal{H}^2[0,T]$ i $\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$

U prvom koraku razvoja i definisanja Itoovog integrala koristićemo samo podintegralne funkcije koje pripadaju klasi merljivih, integrabilnih i adaptiranih slučajnih procesa, koje opisujemo sledećom definicijom, reference [15] i [18].

Definicija 3.1 (*Klasa procesa $\mathcal{H}^2[0,T]$*). Prostor $\mathcal{H}^2$=$\mathcal{H}^2[0,T]$ je skup svih slučajnih procesa $f(\omega,t), t\in[0,T]$, koji su progresivno merljivi (merljivi), adaptirani u odnosu na filtraciju$\{\mathcal{F}_t\}$ i za koje važi uslov integrabilnosti:

$$E\left[\int_0^T f^2(\omega,t)\,dt\right] < +\infty\,. \tag{3.3a}$$

Napomena *Vektorski prostor integrabilnih slučajnih procesa $L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)$ je nadskup podprostora $\mathcal{H}^2$, tj. važi: $\mathcal{H}^2\subset L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)$. Može se pokazati da je $\mathcal{H}^2$zatvoren linearni podprostor skupa $L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)$. Klasa $\mathcal{H}^2$merljivih, adaptiranih i integrabilnih procesa je nedovoljna da bi obuhvatila sve funkcije od interesa, jer se dešava da neke uobičajene neprekidne funkcije ne ispunjavaju stroge uslove integrabilnosti, pa samim tim ne pripadaju klasi $\mathcal{H}^2$. Zato se uvodi slabiji uslov od uslova integrabilnosti, koji nazivamo uslovom lokalizacije. Na klasi procesa za koje važi uslov lokalizacije, moguće je definisati Itoov integral na široj klasi podintegralnih funkcija nego što je klasa $\mathcal{H}^2$.*
Međutim, time smo oslabil iuslov integrabilnosti,zbog čega se dešava da Itoov integral, definisan na klasi procesa sa uslovom lokalizacije, poseduje samo najosnovnije osobine integrala, dok se druge korisne osobine Itoovog integrala gube. Prema tome, oslabljenjem uslova integrabilnosti gubimo korisne osobine Itoovog integrala kao što su Itoova izometrija, martingalske osobine Itoovog procesa, itd, videti ref [18].

Definicija 3.2 *(Klasa procesa sa uslovom lokalizacije$\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$).* Klasa $\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ je skup svih adaptiranih i merljivih funkcija oblika $f(\omega,t)$: $\Omega\times[0,T]\rightarrow R$, koje zadovoljavaju uslov lokalizacije:

$$P\left(\int_0^T f^2(\omega,t)\,dt < \infty\right) = 1\,. \tag{3.4}$$

Napomena *Primetimo da važi: $\mathcal{H}^2\subset\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$. Prema tome, ako je g realna i neprekidna funkcija, tada sve funkcije: $f(\omega,t)=g(B_t)$ pripadaju prostoru $\mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$.*

3.1.3 Itoov integral determinističke proste funkcije

Konstrukciju Itoovog integrala počećemo od najednostavnijeg slučaja, a to je kada za podintegralnu funkciju izaberemo determinističku prostu funkciju iz prostora $L^2[0,T]$, koja predstavlja funkciju po promenljivoj t i ne zavisi Braunovog kretanja: $f(\omega,t) = f(t)$. Možemo da je zovemo i ne slučajnim, odnosno determinističkim prostim procesom. Lako se pokazuje da je Itoov integral determinističke funkcije iz prostora $L^2[0,T]$ *martingalski proces*, pogledati ref. [9], [18].

Definicija 3.3 *(Deterministička prosta funkcija).* Funkciju$f(t)$ nazivamo *prostom determinističkom funkcijom*, ako postoji strogo rastući niz realnih brojeva 0= $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ proizvoljne konstante c_i, takve da funkcija može da se predstavi u vidu konačne sume oblika:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\,. \tag{3.5}$$

Definicija 3.4 *(Itoov integral determinističke proste funkcije).*Imajući u vidu osnovne osobine integrala (3.3) definiše se Itoov integral proste determinističke funkcije prema formuli:

$$I = \int_0^T f(t)\, dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \tag{3.6}$$

Zbog osobine da se proizvoljna funkcija merljivog prostora može aproksimirati prostom funkcijom, sledi da se Itoov integral proizvoljne (složene) determinističke funkcije može izračunati kao granična vrednost Itoovih integrala niza prostih determinističkih funkcija, kojima smo aproksimirali polaznu funkciju. Zamena mesta integrala i limesa sledi na osnovu teoreme o monotonoj konvergenciji, tzv. TMK teorema.

Napomena *Kako Itoov integral proste determinističke funkcije predstavlja linearnu kombinaciju Braunovih inkremenata za koje znamo da imaju Gausovu raspodelu i da su međusobno nezavisni, sledi da je Itoov integral proste determinističke funkcije Gausova slučajna promenljiva sa očekivanjem nula. Pri računanju varijanse datog integrala koristimo osobinu nezavisnosti Braunovih inkremenata i dobijamo:*

$$Var\left(\int_0^T f(t) dB_t\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 \cdot (t_{i+1} - t_i) = \sigma .$$

Drugim rečima, Itoov integral proste determinističke funkcije (3.6) može da se predstavi u vidu Gausove slučajne promenljive, oblika: $I \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$.

3.1.4 Itoov integral proste slučajne funkcije

Prvo ćemo definisati Itoov integral na klasi prostih slučajnih procesa[21], koji zadovoljavaju osobine adaptiranosti,merljivosti i integrabilnosti, ref. [9].Klasu procesa sa navedenim osobinama označićemo sa $\mathcal{H}_0^{\,2}$, pri čemu važi $\mathcal{H}_0^{\,2} \subset \mathcal{H}^2$. Dalje u tekstu, podrazumevaćemo da se osobina adaptiranosti procesa uvek posmatra u odnosu na standardnu filtraciju Braunovog kretanja $\{\mathcal{F}_t^B\}$.

Definicija 3.5 *(Prost slučajni proces).* Proizvoljan proces $\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ nazivamo *prostim adaptiranim slučajnim procesom*, ako postoji strogo rastući niz vremenskih trenutaka $0=t_0 < t_1 < ... < t_n=T$ i proizvoljne slučajne promenljive a_i, sa osobinama $a_i \in \mathcal{F}_{t\,i}$ i $E(a_i^2) < \infty$, takve da važi:

$$X_t = f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \cdot \mathbf{1}(t_i < t \le t_{i+1}) . \tag{3.7}$$

Definicija 3.6 *(Itoov integral prostog slučajnog procesa).* Itoov integral prostog adaptiranog slučajnog procesa definiše se prema formuli:

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \cdot \{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\} . \tag{3.8}$$

Napomena *U slučaju kada je podintegralna funkcija slučajan proces, slučajna promenljiva koja se dobija kao rešenje Itoovog integrala ne mora da ima Gausovu raspodelu,kao što je to bilo u slučaju determinističkog prostog procesa.*

21 Prost slučajan proces ima oblik stepenaste funkcije.

3.1.5 Proširenje definicije Itoovog integrala sa skupa prostih na skup složenih slučajnih procesa ($\mathcal{H}_0^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$)

Sledeći korak u definiciji Itoovog integrala sastoji se u tome da se proširi domen operatora $I(f)$ sa skupa $\mathcal{H}_0^2$ na skup $\mathcal{H}^2$, a za to je neophodno pokazati da je Itoov operator neprekidan, ref. [18]. Pošto je linearan operator I neprekidan ako i samo ako je ograničen, trebalo bi da pokažemo da važi sledeća nejednakost za Itoov operator:

$$\|I(f)\| \leq M \|f\| . \tag{3.9}$$

Navedena nejednakost je posledica naredne teoreme.

Teorema 3.1 *(Itoova izometrija na skupu $\mathcal{H}_0^2$).* Ako je $f \in \mathcal{H}_0^2$, tada važi:

$$\|I(f)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = \|f\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)} . \tag{3.10}$$

Dokaz

Ako postoji bilo koje $M<+\infty$ za koje je ispunjena nejednakost (3.9), sledi da je operator neprekidan. Itoova izometrija se svodi na podslučaj kada je konstanta $M=1$, odakle se dobija da je I ograničen i neprekidan. Zato, pokažimo gornju jednakost normi. Na osnovu *definicija 8.12 i 8.13 iz priloga A*, dobijamo norme funkcije f u prostorima integrabilnih slučajnih procesa $L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)$ i integrabilnih slučajnih promenljivih $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$:

$$\|f\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)} = \left[E\left(\int_0^T f^2(\omega,t)\,dt \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{i}$$

$$\|I(f)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = \left[E(I^2(f)) \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Neka je data funkcija $f(\omega,t)\in\mathcal{H}_0^2$, oblika:

$$f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\cdot \mathbf{1}(t_i < t \leq t_{i+1}) .$$

Tada je: $$f^2(\omega,t) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\cdot \mathbf{1}(t_i < t \leq t_{i+1}) \right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega)\cdot \mathbf{1}^2(t_i < t \leq t_{i+1}) + 2\cdot \sum_{0\leq i<j\leq n-1} a_i(\omega)a_j(\omega)\mathbf{1}(t_i < t \leq t_{i+1})\mathbf{1}(t_j < t \leq t_{j+1}) \right).$$

Na osnovu sledećih činjenica: $$\mathbf{1}(t_i < t \leq t_{i+1})^2 = \mathbf{1}(t_i < t \leq t_{i+1})$$

$$\mathbf{1}(t_i < t \leq t_{i+1})\cdot \mathbf{1}(t_j < t \leq t_{j+1}) = 0, \; i \neq j ,$$

dobijamo konačan izraz za kvadrat date funkcije:

$$f^2(\omega,t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega)\cdot \mathbf{1}(t_i < t \leq t_{i+1}) .$$

Dalje, računamo normu prema formuli:

$$\|f\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)} = E\left[\int_0^T f^2(\omega,t)\,dt\right] = E\left[\int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega)\cdot \mathbf{1}(t_i < t \le t_{i+1})\,dt\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega)\cdot \int_0^T \mathbf{1}(t_i < t \le t_{i+1})\,dt\right]$$

i dobijamo:

$$\|f\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)} = \sum_{i=0}^{n-1} E(a_i^2)\cdot(t_{i+1}-t_i)\,.$$

Da bismo izračunali normu u prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, treba da izračunamo prvo veličinu $I^2(f)$.

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = E[I^2(f)] = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\cdot\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\}\right)^2 =$$

$$= E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(a_i^2\cdot(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\right) + 2\cdot\sum_{0\le i<j\le n-1} a_i(\omega)a_j(\omega)(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E\left(a_i^2\cdot(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\right) + 2\cdot\sum_{0\le i<j\le n-1} E\left(a_i(\omega)a_j(\omega)(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E\left(a_i^2\cdot(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\right).$$

Na osnovu nezavisnosti Braunovih inkremenata: $(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})$ i $(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})$ i nezavisnosti koeficijenta $a_i(\omega)$ od $(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})$ i zbog $E(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}) = 0$, zaključujemo da je suma očekivanja unakrsnih proizvoda jednaka nuli.

Daljim sređivanjem poslednjeg izraza dobijamo:

$$\sum_{i=0}^{n-1} E(a_i^2\cdot(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2) = \left\{\begin{matrix} E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y) \\ X\ i\ Y\ nezavisne\end{matrix}\right\} = \sum_{i=0}^{n-1} E\left(a_i^2\right)\cdot E(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\,;$$

Iz izraza za varijansu inkremenata:

$$E(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2 = E(B_{t_{i+1}}^2 - 2B_{t_{i+1}}\cdot B_{t_i} + B_{t_i}^2) = t_{i+1} - 2t_i + t_i = t_{i+1}-t_i\,,$$

dobija se izraz za normu $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$:

$$\|I(f)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = \sum_{i=0}^{n-1} E(a_i^2)\cdot(t_{i+1}-t_i)\,.$$

Na osnovu čega, zaključujemo da su norme u različitim prostorima jednake, tj. da važi M=1.

Napomena *Iz teoreme o Itoovoj izometriji zaključili smo da je Itoov integral $I(f)$ linearan i neprekidan operator, koji preslikava prostor $\mathcal{H}_0^2$ u prostor $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Prilikom tog preslikavanja Itoov integral čuva rastojanje između elemenata, što znači da Košijev niz iz $\mathcal{H}_0^2$ preslikava u Košijev niz u prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Ovaj zaključak će biti od pomoći prilikom proširenja domena Itoovog operatora, kada pokažemo da elementi klase $\mathcal{H}^2$ mogu da se aproksimiraju elementima iz klase $\mathcal{H}_0^2$.*

Lema 3.1 *(Skup $\mathcal{H}_0^2$ je svuda gust skup u prostoru $\mathcal{H}^2$).* Za proizvoljni proces $f(\omega,t)\in\mathcal{H}^2$ postoji niz prostih procesa oblika $\{f_n\}$, $f_n\in\mathcal{H}_0^2$, takav da važi:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)}=0. \tag{3.11}$$

Lema 3.1 može drugačije da se protumači: Za proizvoljni proces $f(\omega,t)$ iz skupa $\mathcal{H}^2$ postoji niz prostih procesa $\{f_n\}$ iz $\mathcal{H}_0^2$, koji konvergira ka funkciji $f(\omega,t)$ u normi $L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)$. Prema tome, na osnovu *leme 3.1* zaključujemo da se proizvoljan element $f\in\mathcal{H}^2$ može prikazati kao granična vrednost niza $\{f_n\}$ iz skupa $\mathcal{H}_0^2$. Na osnovu čega sledi da je niz $\{f_n\}$ konvergentan niz u kompletnom prostoru $L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)$, pa je ujedno i košijev niz u tom prostoru. Uz dodatnu činjenicu da Itoov operator čuva rastojanje između elemenata, zaključujemo da je preslikani niz $\{I(f_n)\}$, u stvari, Košijev niz u prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$[22]. S obzirom na to da je $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ kompletan metrički prostor, onda svaki Košijev niz iz tog prostora konvergira, odakle sledi da i Košijev niz $\{I(f_n)\}$ konvergira ka nekom neodređenom elementu iz tog prostora i njega ćemo označiti sa $I(f)$, [18]. Drugačije se kaže i da košijev niz $\{I(f_n)\}$ konvergira ka elementu $I(f)$ u normi $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$),tj. važi sledeći identitet:

$$\lim_{n\to\infty}\|I(f_n)-I(f)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}=0, \tag{3.12}$$

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n)$$

Prema tome, Itoov integral procesa iz skupa $\mathcal{H}^2$ je korektno definisan.

Napomena *Svi prethodno navedeni pojmovi koji se tiču kompletnosti prostora (kao što su definicija gustog skupa, Košijevog niza, itd.) detaljno su izloženi i objašnjeni u prilogu A, odeljak 8.6.*

Napomena *Primenom Markovljeve nejednakosti na izraz (3.12) sledi da niz $\{I(f_n)\}$ konvergira ka $I(f)$ u verovatnoći. Prilikom aproksimacije elemenata $f\in\mathcal{H}^2$ elementima $\{f_n\}\subset\mathcal{H}_0^2$, prirodno je postaviti sledeća pitanja:*

Šta se dešava ukoliko odaberemo neki drugi niz f_n', $f_n'\neq f_n$, koji konvergira ka funkciji f ?

Da li će u tom slučaju Itoovi integrali biti jednaki ?

Da bismo pokazali da je Itoov integral $I(f)$ dosledno definisan, moramo da pokažemo da nizovi $I(f_n')$ i $I(f_n)$ imaju istu graničnu vrednost u prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ i da je ta granična vrednost jednaka baš $I(f)$.

Teorema 3.2 *(Jedinstvenost).* Neka su $\{f_n\}$ i $\{f_n'\}$ dva različita niza iz $\mathcal{H}_0^2$, tj. $f_n, f_n'\in\mathcal{H}_0^2$, takvi da važe izrazi:

$$\|f-f_n\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)}\to 0,$$

$$\|f-f_n'\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)}\to 0,\ \text{kada } n\to\infty. \tag{3.12a}$$

Tada, Itoovi integrali datih nizova, koji su oblika: $I(f_n')$ i $I(f_n)$ imaju istu graničnu vrednost u prostoru $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

<u>Dokaz</u>

Označićemo granične vrednosti nizova $I(f_n')$ i $I(f_n)$ sledećim oznakama: $I'(f)$ i $I(f)$. Treba da se dokaže u teoremi da su one jednake, odnosno da važi sledeći identitet:

$$\|I(f)-I'(f)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}=0.$$

---

[22] Iz činjenice da je Itoov integral I korektno definisan za proste procese $f_n\in\mathcal{H}_0^2$, sledi da su za svako n elementi $I(f_n)$ korektno definisani elementi prostora $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Zato, primenimo nejednakost trougla na formulu iznad i dobijamo sledeću nejednakost:

$$\begin{aligned}\left\|I(f)-I'(f)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} &\leq \left\|I(f)-I(f_n)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}+\left\|I(f_n)-I(f_n^{'})\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}+\\ &+\left\|I(f_n^{'})-I'(f)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Iz izraza (3.12a), koji su dati kao pretpostavke polazne teoreme, zaključujemo da su dati nizovi $\{f_n\}$i$\{f_n'\}$ konvergentni. Dalje, ako primenimo formulu (3.12) na date nizove $\{f_n\}$ i $\{f_n'\}$, dobijamo da prvi i treći član gornje nejednakosti teže nuli.Ostaje nam još da odredimo drugi član te nejednakosti.

Zato primenimo nejednakost trougla na izraz $\left\|f_n - f_n^{'}\right\|$ i dobijamo izraz:

$$\left\|f_n - f_n^{'}\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)} \leq \left\|f_n - f\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)} + \left\|f - f_n^{'}\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)}.$$

Na osnovu (3.12a) iz gornjeg izraza dobijamo:

$$\left\|f_n - f_n^{'}\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)} \to 0,\ n\to\infty. \tag{3.14}$$

Iz činjenice da nizovi f_n, f_n' pripadaju prostoru $\mathcal{H}_0^{\,2}$, sledi da i njihova razlika pripada tom prostoru, odnosno važi $f_n - f_n' \in \mathcal{H}_0^{\,2}$, odakle sledi da na tu razliku možemo da primenimo teoremu o Itoovoj izometriji, odakle dobijamo:

$$\left\|I\left(f_n - f_n^{'}\right)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = \left\|f_n - f_n^{'}\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)}.$$

Dalje, na osnovu linearnosti Itoovog integrala i izraza (3.14) sledi:

$$\left\|I(f_n)-I(f_n^{'})\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} \to 0.$$

Odakle dobijamo:

$$\left\|I(f)-I'(f)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = 0.$$

Napomena *Time što smo Itoov integral definisali kao graničnu vrednost konvergentng niza uspeli smo da dokažemo samo egzistenciju Itoovog integrala, odnosno da pokažemo da Itoov integral postoji kao element prostora L^2, tj. da postoji kao slučajna promenljiva koja pripada tom prostoru, ali ne i da taj element konkretno odredimo.Na osnovu dobijenog izraza:*

$$\left\|I(f_n)-I(f)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} \to 0,$$

možemo da zaključimo da norma razlike slučajnih promenljivih teži nuli u verovatnoći. Posledica toga je da je razlika slučajnih promenljivih jednaka nuli na svim skupovima P-mere jedan (dok na skupovima P-mere nula razlika može da bude bilo šta, jer nam skupovi P-mere nula nisu bitni). Znači da Itoov integral može da uzima vrednosti različitih slučajnih veličina koje se razlikuju samo na skupovima P-mere nula i da $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$-norma razlike i dalje zadrži vrednost nula. Odavde sledi da Itoov integral nije jednoznačno određen na skupovima mere nula, ref. [18].

Pošto je pokazano da je Itoov integral definisan i na skupu $\mathcal{H}^2$, sledi da se navedena *terorema 3.1* o Itoovoj izometriji na skupu $\mathcal{H}_0^{\,2}$, može proširiti i na skup $\mathcal{H}^2$ i tako dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 3.3 *(Itoova izometrija na skupu $\mathcal{H}^2$).* Ako je $f \in \mathcal{H}^2$, tada važi:

$$\left\|I(f)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = \left\|f\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T],P\otimes t)}.$$

Ovu teoremu navodimo bez dokaza.

3.1.6 Osobine Itoovog integrala na klasi $\mathcal{H}^2$

Teorema 3.4 *(Osobine Itoovog integrala za procese iz klase $\mathcal{H}^2$).* Neka je $X_t = f(\omega,t)$ progresivno merljiv proces[23], takav da je ispunjen uslov lokalizacije (3.4). Tada, je Itoov integral datog procesa definisan i poseduje sledeće osobine:

(i) Linearnost.

Ako su Itoovi integrali procesa $f(\omega,t)$ i $g(\omega,t)$ definisani i ako su α i β proizvoljne konstante, tada važi:

$$\int_0^T [\alpha f(\omega,t) + \beta g(\omega,t)]\, dB(t) = \alpha \int_0^T f(\omega,t)\, dB(t) + \beta \int_0^T g(\omega,t)\, dB(t).$$

(ii) Itoov integral indikatorske funkcije na intervalu (a,b].

$$\int_0^T \mathbf{1}_{(a,b]}(t) dB_t = B_b - B_a, \quad \int_0^T \mathbf{1}_{(a,b]}(t) \cdot f(\omega,t) dB_t = \int_a^b f(\omega,t) dB_t .$$[24]

(iii) Očekivanje Itoovog integrala.

$$E\left(\int_0^T f(\omega,t) dB_t\right) = 0 .$$

(iv) Itoova izometrija.

$$E\left(\int_0^T f(\omega,t) dB_t\right)^2 = \int_0^T E(f^2(\omega,t)) dt .$$

Osobine *(i)* i *(ii)* važe uvek, dok naprotiv, osobine *(iii)* i *(iv)* važe samo u slučaju kada podintegralni proces ispunjava uslov integrabilnosti (3.3a), pogledati reference [9] i [10].

[23] Napomenuli smo već da progesivna merljivost podrazumeva merljivost i adaptiranost procesa.

[24] $\mathbf{1}_{(a,b]}(t)$- je indikatorska funkcija intervala $(a,b]$.

3.2 Itoov integral kao proces

Napomenuli smo, da za fiksirano vreme t, Itoov integral $I(f)(\omega)$ na intervalu $[0,t]$ predstavlja slučajnu promenljivu iz prostora $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Prema tome, Itoov integral posmatran u proizvoljnom vremenskom periodu može da se interpretira kao proces, uz uslov da je definisan u svakom trenutku tog vremenskog perioda. Neformalna konstrukcija diskretnog slučajnog procesa I_t bi podrazumevala "spajanje" svih vrednosti Itoovog integrala, koje su računate u svakom vremenskom trenutku. S obzirom na to da je Itoov operator, koji smo do sada opisivali, preslikavao proces u slučajnu promenljivu, trebalo bi definisati "novo" preslikavanje I_t koje će preslikavati proces u proces. Pogledati reference [9], [18]. Za početak definišimo funkciju odsecanja oblika:

$$m_t(\omega,s)=1\{s\le t\}=\begin{Bmatrix}1, & s\in[0,t]\\ 0, & u\ suprotnom\end{Bmatrix}.$$

Za navedenu funkciju odsecanja m_t važi da je element prostora $m_t\in\mathcal{H}^2[0,T]$. Neka je f proizvoljna funkcija iz skupa $\mathcal{H}^2[0,T]$, tada za svako $t\in[0,T]$ važi da je funkcija $f_t=m_t\cdot f$, takođe iz tog skupa $\mathcal{H}^2[0,T]$. Na osnovu toga, sledi da je Itoov integral te funkcije $I(f_t)=I(m_t\cdot f)$ pravilno definisan element prostora $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Prema tome, Itoov integral se definiše kao proces na sledeći način:

$$I_t(f)(\omega)=\int_0^t f(\omega,s)\,dB_s\overset{def}{=}\int_0^T f_t(\omega,s)\,dB_s=I(m_t\cdot f)(\omega).$$

Napomena *Prema ref. [18] postupak konstrukcije Itoovog integrala kao procesa je korektan, ali uz nekoliko dodatnih prepravki. Problem je isti kao i kod Itoovog integrala, jer je u svakom fiksiranom trenutku $0\le t\le T$, proces I_t definisan samo kao element prostora $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, tj. kao slučajna promenljiva, koja nije jednoznačno određena na skupovima P-mere nula. Drugim rečima, definicija procesa je neodređena na klasi NULL skupova. Kada bi posmatrali diskretan proces, neodređenost definicije ne bi predstavljala problem, jer verovatnoća unije prebrojivo mnogo skupova P-mere nula ostaje skup P-mere nula, odnosno povremene i prebrojive neodređenosti ne mogu da utiču na putanju čitavog procesa. Nažalost, pošto je indeksni skup [0,T] Itoovog procesa neprebrojiv skup, može da se dogodi da unija neprebrojivo mnogo skupova P-mere nula obuhvati čak ceo skup ishoda Ω. Dakle, ukoliko na ovaj način konstruišemo proces I_t od integrala $I(f_t)$, može da se dogodi da konstruisani proces bude neodređen za svako $\omega\in\Omega$, odnosno može da se dogodi da kao verziju Itoovog procesa dobijemo proces koji uopšte "ne postoji" (tj. nema putanju), jer svaka trajektorija tog procesa pripada skupu P-mere nula. Ovaj problem se rešava tako što se od svih mogućih modifikacija (verzija) procesa I_t izabere neprekidna martingalska modifikacija (verzija) procesa I_t.*

Teorema 3.5 *(Martingalska osobina Itoovog integrala).* Za proizvoljnu funkciju $f\in\mathcal{H}^2$, postoji proces $\{I_t\}$, $t\in[0,T]$, koji je neprekidni martingal u odnosu na standardnu Braunovu filtraciju $\mathcal{F}_t$, takav da događaj oblika: $\{\omega: X_t(\omega)=I(m_t\cdot f)(\omega)\}$ ima verovatnoću jedan za svako $t\in[0,T]$.

3.3 Itoova formula

- Objašnjenje Itoove formule
- Definicija Itoovog procesa
- Kvadratna varijacija i kovarijacija Itoovog procesa
- Formula za stohastičku parcijalnu integraciju
- Generalna Itoova formula
- Itoova formula za funkcije više procesa

3.3.1 Objašnjenje Itoove formule

U običnom integralnom računu retko kada se direktno primenjuje definicija integrala prilikom njegovog izračunavanja. Najčešće se koristi Njutn-Lajbnicova formula, što je mnogo efikasniji postupak za računanje integrala. Shodno tome i u stohastičkom integralnom računu se retko primenjuje definicija Itoovog integrala I. Budući da Njutn-Lajbnicova teorema običnog integralnog računa ne važi u stohastičkom integralnom računu, za izračunavanje stohastičkih integrala koriste se drugi matematički aparati. Najčešće se u praksi se za izračunavanje stohastičkih integrala koristi *Itoova formula* [25].

Najednostavnija verzija Itoove formule glasi:

Teorema 3.6 *(Itoova formula za Braunovo kretanje).* Neka je proces B_t Braunovo kretanje na intervalu $[0,T]$ i neka je $f : R \to R$ neprekidna i dva puta diferencijabilna funkcija na skupu R, tada za svako $t \le T$ važi:

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds\,. \tag{3.15}$$

<u>Dokaz</u>

Počnimo tako što ćemo podeliti interval $[0,t]$ na n ekvidistantnih tačaka: $t_i = it/n$, $0 \le i \le n$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, a potom ćemo razliku funkcije f na krajevima intervala razviti u sumu, kao u referenci [18]:

$$f(B_t) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} \{ f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}) \}\,. \tag{3.16}$$

Tejlorova teorema: *Ako funkcija f ima neprekidan drugi izvod, tada za svako realno x i y važi:*

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x) + r(x,y),$$

gde se ostatak r računa formulom: $r(x,y) = \int_x^y (y-u)(f''(u) - f''(x))\,du\,.$ (3.16a)

Ostatak uTejlorovoj teoremi može da se prikaže i drugačije:

$r_1(x,y) = \frac{1}{2!} \cdot \int_x^y (y-u)^2 f'''(u)\,du$ ili $r_2(x,y) = \frac{f'''(c)}{3!}(y-x)^3$.

Primenićemo zatim Tejlorovu aproksimaciju sa ostatkom na datu razliku $f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})$, ali pre nego što to uradimo prodiskutovaćemo ostatak r iz Tejlorove formule. Dakle, prema postavci polazne teoreme imamo da je f neprekidna funkcija i uz dodatnu pretpostavku da je definisana na kompaktnom skupu (intervalu) dobija se da je f uniformno neprekidna funkcija. Na osnovu navedenih pretpostavki, iz formule za ostatak r iz Tejlorove formule izvodi se sledeća nejednakost nejednakost: $|r(x,y)| \le (y-x)^2 h(x,y)$, gde je h uniformno neprekidna i

[25] Itoova formula se na engleskom često koristi i pod nazivima: *change of variable formula* ili *chain rule*.

ograničena funkcija i za svako x važi jednakost: $h(x,x)=0$. Dalje, primenimo Tejlorovu teoremu na razliku iz jednačine (3.16), odnosno na razliku: $f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})$ i dobijamo:

$$f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}) = f'(B_{t_{i-1}})\cdot(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} f''(B_{t_{i-1}})\cdot(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 + r(B_{t_i}, B_{t_{i-1}}).$$

Novodobijeni izraz vratimo nazad u istu jednačinu (3.16), a zatim je predstavimo kao zbir tri člana, koja ćemo redom obeležiti oznakama A_n, B_n, C_n. Prema tome, iz izraza (3.16) dobijamo:

$$f(B_t) - f(0) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})\cdot(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})}_{1.\ A_n} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\cdot(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2}_{2.\ B_n} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} r(B_{t_i}, B_{t_{i-1}})}_{3.\ C_n}. \quad (3.17)$$

Sređivanje člana A_n:

Budući da je funkcija f' neprekidna, kada pustimo da $n\to\infty$ dobijamo da prvi član A_n predstavlja Itoov integral:

$$A_n \xrightarrow{p} \int_0^t f'(B_s)\, dB_s .$$

Sređivanje člana B_n:

Drugi član B_n liči na kvadratnu varijaciju Braunovog kretanja. Prema tome, možemo intuitivno da pretpostavimo oblik tog člana, a zatim i da ga dokažemo:

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\cdot(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \ \to\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\cdot(t_i - t_{i-1}).$$

Dakle, treba da pokažemo da razlika izraza sa leve i izraza sa desne strane teži nuli, pri čemu ćemo datu razliku označiti sa $\tilde{B}_n$. Tada dobijamo:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_n &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\cdot(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\cdot(t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\cdot\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\}.\end{aligned}$$

Kako je $E(\tilde{B}_n) = 0$, sledi da se za varijansu člana $\tilde{B}_n$ dobija izraz:

$$Var(\tilde{B}_n) = E(\tilde{B}_n^2) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} E\Big[\, f''(B_{t_{i-1}})^2 \cdot \{\, (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\,\}^2 \Big] +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot E\cdot \sum_{0\le i<j\le n} \underbrace{\overbrace{f''(B_{t_{i-1}})}^{\in\mathcal{F}_{t_{i-1}}}\overbrace{f''(B_{t_{j-1}})}^{\in\mathcal{F}_{t_{j-1}}}\left(\overbrace{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})}^{\in\mathcal{F}_{t_i}}\right)}_{\in\mathcal{F}_{t_{j-1}}}\Big((B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\Big).$$

S obzirom na to da je $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ nezavisno od σ–polja $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ sledi:

$$E(\tilde{B}_n^2) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} E\left[\, f''(B_{t_{i-1}})^2 \cdot \{\, (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\,\}^2 \right] +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot \sum_{0\le i<j\le n} E\cdot\left[\, f''(B_{t_{i-1}}) f''(B_{t_{j-1}})\Big((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\Big)\right]\cdot \overbrace{E\left[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\right]}^{=0}.$$

Dakle, zaključujemo da usled ortogonalnosti svojih sabiraka sledi da je suma očekivanja unakrsnih proizvoda jednaka nuli. Kako je $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ nezavisno od $B_{t_{i-1}}$ za varijansu $\tilde{B}_n$ dobijamo sledeći izraz:

$$E(\tilde{B}_n^2) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left[E\Big(f''(B_{t_{i-1}})^2\Big)\cdot E\Big\{ (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\Big\}^2 \right]. \qquad (3.18)$$

Nastavimo sa sređivanjem izraza (3.18), tako što ćemo prvo odrediti član: $E\Big\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\Big\}^2$:

$$E\Big\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\Big\}^2 =$$

$$= E\Big\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 - 2\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\cdot(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2\Big\}$$

$$= E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 - 2\,(t_i - t_{i-1})\,E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 + (t_i - t_{i-1})^2$$

$$= \left\{\begin{array}{l} E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = 0; \\ Var(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = \Delta t_i; \\ E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 = 3\big(\Delta t_i\big)^2; \end{array}\right\}$$

$$= 3\big(\Delta t_i\big)^2 - 2\big(\Delta t_i\big)^2 + \big(\Delta t_i\big)^2 = 2\left(\frac{t}{n}\right)^2.$$

Proverimo da li je varijansa $\tilde{B}_n$ ograničena?

Pošto funkcija f'',$(f'')^2$ u izrazu (3.18) uzima razne vrednosti na svom intervalu definisanosti K, naći ćemo njen supremum: $\sup\limits_{x\in K}\left| f''(x)^2\right|$.

Zatim, iz jednakosti $\sup\limits_{x\in K}\left| f(x)\right| = \| f\|_\infty$, dobija se konačan izraz za varijansu:

$$E(\tilde{B}_n^2) \le \frac{1}{4}\,\| f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{t^2}{2n}\,\| f''\|_\infty^2.$$

Kada pustimo da $n\rightarrow\infty$, iz poslednjeg izraza dobija se da očekivanje i da varijansa teže nuli, odnosno: $E(\tilde{B}_n^2)\rightarrow 0$, $Var(\tilde{B}_n) = E(\tilde{B}_n^2)\rightarrow 0$.

Odakle, primenom Čebiševljeve nejednakosti dobijamo da koeficijent $\tilde{B}_n$ teži nuli u verovatnoći: $\tilde{B}_n \xrightarrow{p} 0$.

Sređivanje člana C_n:
Ostala je još da se uradi procena ostatka u izrazu (3.17), tj. da se pokaže da treći član C_n teži nuli:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} r(B_{t_i}, B_{t_{i-1}}) \xrightarrow{p} 0 .$$

Već je rečeno, da se za neprekidnu funkciju f definisanu na kompaktnom skupu, ostatak u Tejlorovoj formuli dobija iz izraza: $|r(x,y)| \le (y-x)^2 h(x,y)$, odakle se dobija da je treći član C_n sledećeg oblika:

$$|C_n| \le \sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \cdot h(B_{t_{i-1}}, B_{t_i}) .$$

Izračunajmo očekivanje gornjeg izraza i primenimo Košijevu nejednakost na izraz sa desne strane:

$$E|C_n| \le \sum_{i=1}^{n} E\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4\right]^{\frac{1}{2}} \cdot E\left[h^2(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{3.19}$$

Prvi faktor se jednostavno izračunava: $E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 = 3t^2/n^2$. (3.20)

Ako iskoristimo činjenicu da je funkcija h uniformno neprekidna i da je $h(x,x)=0$ za svako x, možemo da procenimo i drugi faktor u jednačini (3.19). Kako je h funkcija dve promenljive, onda će za sve uređene parove važiti nejednakost (3.20a), a ako važi za sve uređene parove (a_1,a_2), onda mora da važi i za sve uređene parove oblika (a_1,a_1). Prema tome imamo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))(\forall (x,y),(a_1,a_2) \in R^2)\|(x,y)-(a_1,a_2)\| < \delta \Rightarrow \|h(x,y) - h(a_1,a_2)\| < \varepsilon . \tag{3.20a}$$

Na osnovu datog izraza možemo da napravimo procenu funkcije $h^2(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})$, kao i njenog očekivanja. Prema tome, očekivanje funkcije $h^2(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})$ rastavićemo na zbir vrednosti date funkcije kada je razlika $|y-x| < \delta$ i kada je razlika $|x-y| \ge \delta$, odakle dobijamo:

$$\begin{aligned} E\left[h^2(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})\right] &\le \varepsilon^2 \cdot P(|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| < \delta) + \|h\|_\infty^2 \cdot P(|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| \ge \delta)^{26} \\ &\le \varepsilon^2 + \|h\|_\infty^2 \delta^{-2} E(|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2) \\ &= \varepsilon^2 + \|h\|_\infty^2 \delta^{-2} \frac{t}{n}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Kada primenimo rezultate iz izraza (3.20) i (3.21) u nejednakost (3.19), dobijamo gornje ograničenje za $E\,|C_n|$:

$$E|C_n| \le n\left(3\frac{t^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\varepsilon^2 + \|h\|_\infty^2 \delta^{-2}\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \limsup_{n\to\infty} E\left(|C_n|\right) \le 3^{\frac{1}{2}} t\varepsilon .$$

Na osnovu definicije uniformne neprekidnosti sledi da je gornji izraz tačan za svaku pozitivnu vrednost $\mathcal{E}$, a to znači da će i za proizvoljno malu vrednost $\mathcal{E}$ postojati vrednost $n(\mathcal{E})$, počev od koje će gornja nejednakost biti ispunjena, odakle sledi da $E(|C_n|)\to 0$, kada $n\to\infty$.

Ako još jedanput primenimo Markovljevu nejednakost dobijamo $C_n \xrightarrow{p} 0$, što je i trebalo dokazati.

[26] U drugom članu sa desne stranje nejednakosti izabrali smo supremum funkcije $h^2(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})$ kao njeno gornje ograničenje,a zatim smo iskoristili Markovljevu nejednakost da u datom izrazu zamenimo verovatnoću sa očekivanjem.

Napomena *Dokazali smo da Itoova formula važi za sve C^2 funkcije definisane na kompaktnom skupu. Ako funkcije sa tom osobinom obeležimo oznakom $f_M \in C^2$, dobijamo Itoovu formulu u sledećem obliku, koja važi samo za funckije sa nevedenom osobinom:*

$$f_M(B_t) - f_M(0) = \int_0^t f_M{}'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_M{}''(B_s)\, ds. \qquad (3.22)$$

Itoova formula na skupu $f \in C^2(R)$:

Na osnovu [18], da bi pokazali da Itoova formula važi u opštijem slučaju, moramo da pokažemo da važi za sve funkcije iz skupa $C^2(R)$. Drugim rečima, moramo nekako da predstavimo funkcije iz skupa $C^2(R)$ pomoću funkcija sa kompaktnim nosačem f_M, što ćemo učiniti pomoću naredne leme:

Lema: *Za svaku funkciju $f \in C^2(R)$, postoji funkcija sa kompaktnim nosačem $f_M \in C^2$, takva da važi: $f(x)=f_M(x)$, za svako $|x| \leq M$.*

Dalje, ako primenimo navedenu Lemu na neprekidne funkcije oblika $f(B_t) \in C^2(R)$, sledi da postoji kompaktna funkcija $f_M \in C^2$, takva da važi: $f(B_t)=f_M(B_t)$, za svako $|B_t| \leq M$. Zatim, definišemo slučajnu promenljivu koja predstavlja prvi vremenski trenutak kada trajektorija Braunovog kretanja pređe vrednost M, odnosno definišemo slučajnu promenljivu koje je oblika: $\tau_M = \min\{t : |B_t| \geq M\}$[27].Tada za svako $\omega \in \{t \leq \tau_M\}$važe sledeće jednakosti: $f(B_t)=f_M(B_t)$, $f'(B_t)=f'_M(B_t)$. Na osnovu teoreme o postojanosti Itoovog integrala u skupu $\mathcal{L}^2_{LOC}$ (tzv. *Persistence of identity theorem*) sledi da će za svako $\omega \in \{t \leq \tau_M\}$ važiti sledeći identiteti:

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s = \int_0^t f_M{}'(B_s)dB_s,$$

$$\int_0^t f''(B_s)ds = \int_0^t f_M{}''(B_s)ds.$$

Kada primenimo gornje identitete u Itoovoj jednačini (3.22) dobijamo da za svako $\omega \in \{t \leq \tau_M\}$, važi jednakost:

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds. \qquad (3.23)$$

S obzirom da je $P(\tau_M \to \infty)=1$ sledi da je jednačina (3.23) ispravna sa verovatnoćom jedan. Prema tome, dokaz Itoove formule je kompletan i završen.

Primer 3.1. Rešiti Itoov intgral $\int_0^t B_s dB_s$?

Rešenje

Postoji više načina da se reši dati stohastički integral. Prvi je malo složeniji, jer podrazumeva direktnu primenu definicije Itoovog integrala. Shodno tome, trebalo bi ponoviti isti postupak koji je korišćen u definiciji Itoovog integrala, odnosno trebalo bi izvršiti aproksimaciju podintegralne funkcije prostim slučajnim procesima, definisanim na konačnim vremenskim intervalima. Nakon sređivanja formule za Itoov intergal datih prostih procesa dobijamo izraz koji će težiti traženom integralu kada broj particija teži beskonačnosti.

Drugi način rešavanja polaznog stohastičkog integrala je mnogo jednostavniji i koristi Itoovu formulu (*teorema 3.6*). Posmatrajmo determinističku kvadratnu funkciju i njene izvode: $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$. Zatim, primenimo Itoovu formulu na kvadratnu funkciju sledećeg oblika $f(B_t) = B_t^2$ i dobićemo:

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds$$

[27] Primetimo da je slučajna promenljiva τ_M vreme zaustavljanja.

$$B_t^{\ 2} = 0^2 + \int_0^t 2B_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\, ds \Rightarrow \int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}B_t^{\ 2} - \frac{1}{2}t.$$

Postoji i treći način za rešavanje navedenog stohastičkog integrala, koji koristi pravilo za stohastičku parcijalnu integraciju, o kojem će biti reči u poglavlju za parcijalnu integraciju.

Teorema 3.7 *(Itoova formula za funkciju vremenske i prostorne promenljive).*Za proizvoljnu funkciju f iz skupa $f\in C^{1,2}(R^{+}\times R)$ važi sledeća jednačina:

$$f(t,B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)ds\ .$$

Napomena *Ako je f proizvoljna funkcija za koju važi $f\in C^{1,2}(R^{+}\times R)$,tada na osnovu teoreme 3.7 zaključujemo da proizvoljan proces X_t oblika:$X_t = f(t,B_t)$, može uvek da se predstavi na sledeći način:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\ dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)\ ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)\ ds \qquad (3.24)$$

Ovakav zapis procesaX_t naziva se stohastički integralni zapis.Postoji i skraćeni zapis ove formule,tzv. stohastički diferencijalni zapis Itoove formule,koji se zbog svoje jednostavnosti mnogo češće koristi u literaturi od integralnog zapisa. Pri tome, napominjemo da stohastički diferencijal funkcije nismo definisali, tako da treba voditi računa o tome da iza ovakvog zapisa uvek stoji integralna jednačina. Diferencijalni oblik Itoove formule glasi:

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)\ dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)\ dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)\ dt\ . \qquad (3.25)$$

Itoova teorema obično se koristi za nalaženje diferencijala funkcije nekog procesa i ona je analog izvodu složene funkcije u običnom integralnom računu(Chain rule). Kao i Njutn-Lajbnicova formula u običnom interalnom računu, Itoova formula se definiše i u složenijim oblicima, pogledati [18].

3.3.2 Definicija Itoovog procesa

Definicija 3.7 *(Definicija Itoovog procesa).* Proces$\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ je *standardan ili Itoov proces*, ako može da se predstavi u sledećem integralnom obliku:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\omega,s)\,ds + \int_0^t b(\omega,s)\; dB_s \text{ , za } 0\leq t \leq T. \tag{3.26}$$

gde su $a(\cdot,\cdot)$ i $b(\cdot,\cdot)$ adaptirani i progresivno merljivi procesi (merljivi procesi), koji ispunjavaju uslove lokalizacije:

(i) $P(\int_0^T |a(\omega,s)|\, ds < \infty) = 1,$

(ii) $P(\int_0^T |b(\omega,s)|^2\, ds < \infty) = 1.$

Uslovi lokalizacije za procese $a(\cdot,\cdot)$ i $b(\cdot,\cdot)$ mogu i drugačije da se postave. Tako da za svako $t< +\infty$ moraju da važe sledeći uslovi:$\{a_s\mathbf{1}_{(0,t]}(s)\}\in \mathcal{L}^1_{LOC}$, $\{b_s\mathbf{1}_{(0,t]}(s)\}\in \mathcal{L}^2_{LOC}$, ref. [9] i [18].

Napomena *Itoov proces (3.7) može da se predstavi i u stohastičkom diferencijalnom obliku, koji se zbog svoje jednostavnosti češće koristi od integralnog zapisa i sledećeg je oblika:*

$$dX_t = a(\omega,t)\,dt + b(\omega,t)\; dB_t \text{ , za } 0\leq t \leq T. \tag{3.27}$$

Diferencijalni oblik Itoovog procesa, napisan bez integralnog zapisa nema nekog posebnog smisla, odnosno diferencijalni zapis sam za sebe nema nikakvog smisla. Razlog tome jeste što je Braunovo kretanje nigde diferencijabilna funkcija. Prema tome integralni zapis se uvek podrazumeva. Napomenimo da je skup Itoovih procesa (skup svih procesa koji su oblika (3.7)) prirodni domen za teoriju Itoove integracije. To znači da proizvoljan proces koji se definiše kao glatka funkcija Itoovog procesa i vremenske promenljive t, tj.proces oblika:$U_t=g(X_t,t)$ *pripada skupu Itoovih procesa i prema tome, može eksplicitno da se predstavi kao stohastički integral. Drugačije može da se kaže da je skup Itoovih procesa zatvoren.*

Napomena *Itoovi procesi mogu da se tumače i kao rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina (SDE), videti ref. [10]. Prema tome, ako Itoov proces* $\{X_t\}$ *zadovoljava integralnu jednačinu (3.26), tada ujedno rešava i stohastičku diferencijalnu jednačinu oblika:* $dX_t = a_t\,dt + b_t\,dB_t$, *za* $0\leq t\leq T$. *(3.28)*

3.3.3 Kvadratna varijacija i kovarijacija Itoovog procesa

U *poglavljima 8.2 i 8.3 priloga A*, date su osnovne definicije i teoreme iz oblasti varijacije i kovarijacije realne funkcije i slučajnog procesa, a za detaljnije tumačenje varijacije i kovarijacije Itoovog procesa i integrala pogledati ref. [9]. U ovom poglavlju ćemo obrazložiti varijaciju i kovarijaciju Itoovog integrala i Itoovog procesa. Za Itoov integral koristićemo sledeću oznaku: $I_t = \int_0^t X_s \, dB_s$.

Teorema 3.8 *(Kvadratna varijacija Itoovog integrala).* Kvadratna varijacija Itoovog integrala I_t data je formulom:

$$[I, I]_t = \left[\int_0^t X_s \, dB_s, \int_0^t X_s \, dB_s \right](t) = \int_0^t X_s{}^2 \, ds\ ^{28}. \tag{3.29}$$

Napomena *Slično procesu Braunovog kretanja i Itoov integral je neprekidna i nigde diferencijalna funkcija. Prema tome, Itoov integral I_t ima beskonačnu varijaciju na intervalu [0,t], za svako $t \le T$, ako važi sledeća nejednakost* $\int_0^t X_s{}^2 ds > 0$.

Teorema 3.9 *(Kvadratna kovarijacija Itoovog integrala).* Kvadratna kovarijacija Itoovih integrala $I_t^{(1)}$ i $I_t^{(2)}$,koji su definisani na intervalu [0,t], data je formulom:

$$[I_1, I_2]_t = \left[\int_0^t X_s^{(1)} \, dB_s, \int_0^t X_s^{(2)} \, dB_s \right](t) = \int_0^t X_s^{(1)} \cdot X_s^{(2)} \, ds\,. \tag{3.30}$$

gde su: $I_t^{(1)} = \int_0^t X_s^{(1)} dB_s$ i $I_t^{(2)} = \int_0^t X_s^{(2)} dB_s$.

Teorema 3.10 *(Kvadratna varijacija Itoovog procesa).* Neka je X_t Itoov proces: $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$. Tada kvadratna varijacija procesa X_t ,$0 \le t \le T$ postoji i data je formulom:

$$[X, X](t) = [X]_t = \left[\int_0^t \sigma_s \, dB_s \right](t) = \int_0^t \sigma_s^2 \, ds\,. \tag{3.31}$$

<u>Dokaz</u>

Kako su Itoov proces X_t i Itoov integral oblika: $\int_0^t \sigma_s dB_s$ slučajne neprekidne funkcije i kako je integral: $\int_0^t \mu_s ds$ neprekidna funkcija po promenljivoj t kao i funkcija ograničene varijacije, tada za varijaciju procesa X_t dobijamo:

$$[X, X]_t = [X]_t = \left[\int_0^t \mu_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dB_s \right](t)\ ^{29}.$$

$$\begin{aligned} [X, X]_t = [X]_t &= \left[\int_0^t \mu_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dB_s \right](t) \\ &= \left[\int_0^t \mu_s \, ds \right](t) + 2\left[\int_0^t \mu_s \, ds, \int_0^t \sigma_s \, dB_s \right](t) + \left[\int_0^t \sigma_s \, dB_s \right](t) = \\ &= \left[\int_0^t \sigma_s \, dB_s \right](t) = \int_0^t \sigma_s^2 \, ds. \end{aligned}$$

Na osnovu *teoreme 8.3 iz priloga A*, sledi da su kovarijacija i varijacija u kojima se javlja integral $\int_0^t \mu_s ds$ jednake nuli. Prema tome dokazali smo varijaciju Itoovog procesa.

---

28 Lako je pokazati validnost date formule za proste procese.Uopšten slučaj se dokazuje aproksimaicijom složenog procesa prostim procesima.

29 Ovde se koristi formula za varijansu zbira slučajnih promenljivih: var($X+Y$)= var(X)+var(Y)+2cov[X,Y].

Teorema 3.11. Ako su X i Y Itoovi procesi i ako je X ograničene varijacije, tada je njihova kovarijacija jednaka nuli $[X,Y](t)=0$.

Napomena *Na osnovu osobina kvadratne varijacije i kovarijacije (teorema 8.3; Prilog A) i na osnovu osobina kvadratne varijacije Braunovog kretanja,imamo:*$[B,B](t)=t$, $[B,t](t)=0$, *odakle izvodimo neformalna pravila*[30] *za računanje diferencijala kvadratne varijacije i kovarijacije Braunovog kretanja i determinističke funkcije vremena. Na osnovu tih pravila se kasnije izvode analogna pravilna za Itoove procese, pogledati ref. [9] i [18]. Navedena pravila su sledećeg oblika:*

$$d[B,B](t)=dB_t\cdot dB_t=dt,\ d[B,t](t)=dB_t\cdot dt=0,\ d[t,t](t)=dt\cdot dt=0.$$

Na osnovu navedenih pravila, konvencijom se uvodi formalan postupak za računanje i manipulaciju sa stohastičkim diferencijalima, koji u mnogome pojednostavljuje stohastički račun. Navedeni postupak se naziva Boks algebra i izveden je iz Engleskog naziva Box algebra i glasi:

$$\begin{bmatrix} \cdot & dt & dB_t \\ dt & 0 & 0 \\ dB_t & 0 & dt \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Već smo spomenuli da se na osnovu Boks algebre, kao i osobina kvadratne varijacije i kovarijacije Itoovog procesa izvodi još jedan skup neformalnih pravila, koja se odnose na Itoove procese,umesto na Braunov proces:

$$d[X,X](t)=dX_t\cdot dX_t,\ d[X,Y](t)=dX_t\cdot dY_t. \tag{3.32a}$$

Teorema 3.12 *(Kvadratna kovarijacija Itoovog procesa).*

Neka su dati Itoovi procesi sledećeg oblika: $dX_t=\mu_X(t)dt+\sigma_X(t)dB_t$ i $dY_t=\mu_Y(t)dt+\sigma_Y(t)dB_t$. Tada se kvadratna kovarijacija datih procesa računa prema formuli: $d[X,Y](t)=\sigma_X\cdot\sigma_Y(t)\,dt$.

<u>Dokaz</u>

Prema pravilima Boks algebre za računanje stohastičkih diferencijala, kvadratnu kovarijaciju dva Itoova procesa dobijamo iz formule $d[X,Y](t)=dX_t\cdot dY_t$, odnosno kao proizvod diferencijala tih procesa. Prema tome, za kovarijaciju datih procesa dobijamo:

$$d[X,Y](t)=dX_t\cdot dY_t=$$
$$=(\mu_X(t)\,dt+\sigma_X(t)\,dB_t)\cdot(\mu_Y(t)\,dt+\sigma_Y(t)\,dB_t)=\sigma_X(t)\cdot\sigma_Y(t)\ (dB_t)^2=\sigma_X(t)\cdot\sigma_Y(t)\ dt.$$

[30] Ovde se koristi osobina da je funkcija t neprekidna funkcija ograničene varijacije, kao i da je proces Braunovog kretanja neprekidna funkcija sa kvadratnom varijacijom t.

3.3.4 Formula za parcijalnu integraciju (stohastičko pravilo proizvoda)

Pravilo proizvoda za stohastičku integraciju, odnosno parcijalna integracija u stohastičkom integralnom računu je analog formuli za diferencijal proizvoda u običnom integralnom računu. S obzirom da u običnom integralnom računu raspolažemo samo funkcijama ograničene varijacije, a u stohastičkom integralnom računu raspolažemo funkcijama i ograničene i beskonačne varijacije sledi da bi trebalo da se napravi uopštenje ovog postupka koje bi važilo za sve funkcije i ograničene i beskonačne varijacije, ref. [9].

Teorema 3.13 *(Stohastička parcijalna integracija).*

(i) Formula za stohastičku parcijalnu integraciju u integralnom obliku glasi:

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X,Y](t). \qquad (3.33)$$

(ii) Formula u diferencijalnom obliku glasi:

$$d(X_t\, Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d[X,Y](t). \qquad (3.34)$$

Dokaz

Prvi način za izvođenje formule za stohastičku parcijalnu integraciju, odnosno diferencijal proizvoda je da se koristi Itoova formula za funkciju dve promenljive $f(x,y) = x \cdot y$, tj. Itoova formula za funkcije više procesa o kojoj će biti reči u narednim poglavljima.

Drugi način za izvođenje formule (3.33) je pomoću formule za kvadratnu kovarijaciju i ovaj dokaz je potpuno nezavisan od već navedenog načina koji koristi Itoovu formulu za funkcije više procesa. Dakle, pođimo od formule za kvadratnu kovarijaciju procesa X i Y :

$$\left[X,Y\right]_t = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

Ako se navedenoj sumi doda, a zatim oduzme član: $\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} Y_{t_i}$, dobija se:

$$= \lim_{\|\pi\|\to 0} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} Y_{t_{i+1}} - X_{t_i} Y_{t_i}) - \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) - \sum_{i=0}^{n-1} Y_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \right]$$

$$= \lim_{\|\pi\|\to 0} \left[(X_{t_n} Y_{t_n} - X_{t_0} Y_{t_0}) - \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) - \sum_{i=0}^{n-1} Y_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \right]$$

$$= \lim_{\|\pi\|\to 0} \left[(X_t\, Y_t - X_0\, Y_0) - \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) - \sum_{i=0}^{n-1} Y_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \right].$$

Poslednje dve sume konvergiraju u verovatnoći ka Itoovim integralima, odakle dobijamo željeni izraz:

$$[X,Y](t) = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$$

Napomena *Na osnovu formule za stohastičku parcijalnu integraciju dobija se još jedan izraz za računanje kvadratne varijacije procesa i glasi:* $[X,X](t) = X_t^2 - X_0^2 - 2\int_0^t X_s dX_s$. *(3.35)*

Primer 3.2

Izraziti Itoov integral: $\int_0^t f(s)dB_s$ preko integrala: $\int_0^t B_s(\omega)df(s)$? Pretpostaviti da je f deterministička, neprekidna i diferencijabilna funkcija.

Rešenje

Počnimo od izraza za stohastički diferencijal proizvoda funkcije $f(t)$ i Braunovog kretanja, odnosno stohastičke parcijalne integracije, odnosno $d(f(t)\cdot B_t)=f(t)dB_t+B_t\, df(t)+d[f(t),B_t]$. S obzirom na to da je funkcija $f(t)$ deterministička i neprekidna, a na osnovu *(teoreme 8.3; Prilog A)* sledi da je kovarijacija: $[f(t),B_t]=0$. Prema tome, iz polazne formule dobijamo sledeći izraz: $d(f(t)\cdot B_t) = f(t)dB_t+B_t\, df(t)$, koji u integralnom obliku glasi:

$$f(t)\cdot B_t - f(0)\cdot B_0 = \int_0^t f(s)\, dB_s + \int_0^t B_s\, df(s) \Rightarrow \int_0^t f(s)\, dB_s = f(t)\cdot B_t - f(0)\cdot B_0 - \int_0^t B_s\, df(s),$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena *Primetimo, da ako je jedan proces neprekidan i ograničene varijacije, tada je kovarijacioni član u izrazu za stohastičku parcijalnu integraciju (3.33) jednak nuli, pa se data formula svodi na formulu za običnu parcijalnu integraciju.*

Primer 3.3.

Rešiti integral $\int_0^t B_s dB_s$, iz *primera 3.2* koristeći stohastičku parcijalnu integraciju ?

Rešenje

Primenimo formulu za stohastičku parcijalnu integraciju da bismo izračunali kvadratnu varijaciju Braunovog kretanja. To je formula (3.35) koja glasi:

$$[X,X](t) = X_t^2 - X_0^2 - 2\int_0^t X_s dX_s \text{ , za } X_t = B_t.$$

Daljim sređivanjem date formule dobijamo: $[B_t,B_t](t) = B_t^2 - B_0^2 - 2\int_0^t B_s dB_s$.

Kako je kvadratna varijacija Braunvog kretanja: $[B_t ,B_t] =t$, kao i da važi: $B_0 = 0$ dobijamo:

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\, dB_s + t \Rightarrow \int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

3.3.5 Generalna Itoova formula (Itoova formula za Itoov proces)

Definicija Itoovog integrala u kojoj se kao integrator koristi Braunovo kretanje može da se proširi tako što se umesto Braunovog kretanja za integrator izabere Itoov proces, pogledati reference [10] i [18]. U tom slučaju, dobija se uopšteniji stohastički integral od Itoovog, koji smo pomenuli u jednačini (3.1).

Prema tome, neka je X_t Itoov proces oblika: $dX_t = a_t\, dt + b_t\, dB_t$, za koji su ispunjeni uslovi *(i)* i *(ii)* iz *definicije 3.7* i neka je Y_t adaptiran proces, takav da za svako $t < +\infty$ važe sledeći uslovi [31]:

(i) $P(\int_0^t |Y_s\, a_s|\, ds < \infty) = 1$, odnosno $\{Y_s \cdot a_s \cdot \mathbf{1}_{(0,t]}(s)\} \in \mathcal{L}^1_{LOC}$.

(ii) $P(\int_0^t Y_s^2\, b_s^2\, ds < \infty) = 1$, odnosono $\{Y_s \cdot b_s \cdot \mathbf{1}_{(0,t]}(s)\} \in \mathcal{L}^2_{LOC}$.

Tada, stohastički integral oblika: $I_t = \int_0^t Y_s dX_s$ postoji i definiše se sledećom formulom:

$$I_t = \int_0^t Y_s\, dX_s := \int_0^t Y_s a_s\, ds + \int_0^t Y_s b_s\, dB_s, \quad za \quad 0 \le t \le T. \tag{3.36}$$

Teorema 3.14 (*Itoova formula za funkciju* $f(X_t)$).
Neka je $\{X_t\}$, $t \in [0,T]$ Itoov proces sledećeg oblika: $dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dB_t$. Ako je $f(x)$ dva puta neprekidna i diferencijabilna funkcija na R ($f \in C^2(R)$), tada stohastički diferencijal procesa $Y_t = f(X_t)$ postoji i dat je izrazom:

$$\begin{aligned} d\, f(X_t) &= f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d[X,X]_t. \qquad (3.37)\\ &= f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\sigma^2(t)\, dt \\ &= \left(f'(X_t)\mu(t) + \frac{1}{2} f''(X_t)\sigma^2(t) \right) dt + f'(X_t)\sigma(t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Integralni oblik ove jednakosti glasi: $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma^2(s)\, ds$.

Teorema 3.15 (*Itoova formula za funkciju* $f(t,X_t)$). Neka je $f \in C^{1,2}(R^+ \times R)$ [32] i neka je $\{X_t\}$, $t \in [0,T]$ Itoov proces oblika (3.26), pri čemu je $X_0 = 0$,tada funkcija Itoovog procesa i vremenske promenljive, odnosno funkcija $f(t,X_t)$, može da se predstavi u sledećem integralnom obliku:

$$f(t,X_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s) b^2(\omega,s)\, ds. \tag{3.38}$$

Diferencijalni zapis formule (3.38) glasi:

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= f_t(t,X_t)dt + f_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t,X_t)dX_t \cdot dX_t \\ &= f_x(t,X_t)b(\omega,t)dB_t + \left(f_x(t,X_t)a(\omega,t) + \frac{1}{2} b^2(\omega,t) f_{xx}(t,X_t) + f_t(t,X_t) \right) dt. \end{aligned}$$

---

[31] Ukoliko su navedeni uslovi ispunjeni sledi da su oba integrala na desnoj strani jednačine (3.36) ispravno definisana.

[32] Drugim rečima funkcija $f(t,x)$ je dva puta neprekidna i diferencijabilna funkcija po promenljivoj x i jednom neprekidna i diferencijabilna funkcija po promenljivoj t.

Teorema 3.16 *(Kada je Itoov proces martingal).*Neka je$\{X_t\}$, $t\in[0,T]$ Itoov proces čija je integralna jednačina oblika (3.26). U teoremi se pretpostavlja da slučajna promenljiva X_0 ima konačan prvi momenat, da slučajni proces$\{a_s\}$pripada klasi $\mathcal{H}^1$ i da slučajni proces$\{b_s\}$pripada klasi $\mathcal{H}^2$.Tada, važi da je Itoov proces$\{X_t\}$ martingal u odnosu na standardnu Braunovu filtraciju akko važi da je $a_t = 0$ skoro sigurno, za skoro svako $t \geq 0$.

3.3.6 Itoova formula za funkcije više procesa

Ukoliko proizvoljna dva procesa X_t i Y_t poseduju stohastički diferencijal u odnosu na Braunovo kretanje i ako funkcija $f\,(x,y)$ ima neprekidne sve parcijalne izvode prvog i drugog reda, tada funkcija oblika $f\,(X_t,Y_t)$ takođe poseduje stohastički diferencijal, videti ref. [9] i [18]. Da bismo pronašli stohastički diferencijal slučajne funkcije koja zavisi od dva procesa, trebaće nam, pre svega Tejlorov razvoj determinističke funkcije drugog reda, koji je oblika:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dx\,dy \right).$$

Podsetimo se pravila izvedenih iz Boks algebre (3.32a), u poglavlju o kvadratnoj varijaciji i kovarijaciji, koja glase:

$$(dX_t)^2 = dX_t \cdot dX_t = d[X,X]_t = \sigma_X^2(t)\,dt,$$

$$(dY_t)^2 = dY_t \cdot dY_t = d[Y,Y]_t = \sigma_Y^2(t)\,dt,$$

$$dX_t\,dY_t = d[X,Y]_t = \sigma_X(t)\,\sigma_Y(t)dt,$$

gde su koeficijenti: $\sigma_X(t)$ i $\sigma_Y(t)$ difuzioni koeficijenti procesa X_t i Y_t respektivno.

Teorema 3.17 *(Itoova formula za funkcije dva procesa).* Neka funkcija $f\,(x,y)$ ima neprekidne sve parcijalne izvode prvog i drugog reda, odnosno $f \in C^2(R)$ i neka slučajni procesi X_t iY_t imaju stohastičke diferencijale sledećeg oblika: $dX_t=\mu_X(t)dt+\sigma_X(t)dB_t$ i $dY_t=\mu_Y(t)dt+\sigma_Y(t)dB_t$.Tada stohastički diferencijal funkcije $f\,(X_t,Y_t)$ dobijamo iz formule:

$$df(X_t,Y_t) = \frac{\partial f(X_t,Y_t)}{\partial x}dX_t + \frac{\partial f(X_t,Y_t)}{\partial y}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,Y_t)}{\partial x^2}dX_t \cdot dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,Y_t)}{\partial y^2}dY_t \cdot dY_t + \\ + \frac{\partial^2 f(X_t,Y_t)}{\partial x \partial y}dX_t dY_t.$$

Napomena *Specijalan slučaj Itoove formule za funkcije dva procesa $f\,(X_t,Y_t)$ dobije se kada se Itoova formula za funkcije dva procesa primeni na funkciju oblika $f\,(X_t,\,t)$. Primetimo da na ovaj način može da se izvede Itoova formula sa vremenskim i prostornim promenljivim, odnosno teorema 3.15.*

4. Stohastičke diferencijalne jednačine

Diferencijalne jednačine često se koriste za opisivanje evolucije nekog sistema. Stohastičke diferencijalne jednačine (*stochastic differential equations; SDE*) se dobijaju kada se u obične diferencijalne jednačine uvede slučajna komponenta šuma, odnosno kada se nasumično izvrši perturbacija sistema običnih diferencijalnih jednačina, pogledati reference [5] i [9].

Definicija 4.1 *(Rešenje obične diferencijalne jednačine)*.Neka je $x(t)$ diferencijabilna funkcija definisana za $t \geq 0$ i neka je $\mu(x,t)$ funkcija dveju promenljivih x i t. Ako za svako $t \geq 0$ važi relacija: $dx(t)/dt = x'(t) = \mu(x(t),t)$, gde je $x(0)=x_0$, tada $x(t)$ nazivamo *rešenjem obične diferencijalne jednačine (ODJ)* sa početnim uslovom x_0[33].

Gornja jednačina može da se napiše i u drugačijem obliku: $dx(t)=\mu(x(t),t)dt$, a ukoliko je ispunjen zahtev da je $x'(t)$ neprekidna funkcija, onda važi:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \mu(x(s), s)ds \, .$$

Iako je Braunovo kretanje nigde-diferencijabilna funkcija, često se u literaturi pojavljuje pojam procesa, koji je jednak izvodu Braunovog kretanja po vremenu i koji spada u procese neprekidne u vremenu sa međusobno nezavisnim vrednostima, tzv. proces belog šuma, oblika:$\xi(t)=dB(t)/dt=B'(t)$. S obzirom da izvod Braunovog kretanja ne postoji, ne postoji ni proces belog šuma. Ako sa $\sigma(x,t)$ označimo intenzitet šuma u tački x u trenutku t , tada prema dogovoru važi:

$$\int_0^T \sigma(X_t, t) \cdot \xi(t)\, dt = \int_0^T \sigma(X_t, t) \cdot B'(t)\, dt = \int_0^T \sigma(X_t, t) \cdot dB_t \ ,$$

gde je poslednji izraz Itoov integral. Stohastičke diferencijalne jednačine (*SDJ*) nastaju npr. kada se koeficijenti običnih diferencijalnih jednačina perturbuju belim šumom.

33 Obično se dodaje i zahtev da je $x'(t)$ neprekidna funkcija.

4.1 Definicija, uslovi egzistencije i jedinstvenosti striktnog rešenja

Neka je B_t, za $t \geq 0$ proces Braunovog kretanja $\mu(x,t)$ i $\sigma(x,t)$su date funkcije, a X_t je nepoznati proces, tada jednačinu oblika: $dX_t = \mu(X_t,t)\, dt + \sigma(X_t,t)\, dB_t$, (4.1)

nazivamo *stohastička diferencijalna jednačina vođena Braunovim kretanjem* ili *SDJ difuzionog tipa*. Funkcije $\mu(x,t)$ i $\sigma(x,t)$se nazivaju koeficijentima jednačine, gde je $\mu(x,t)$ *mera prosečnog rasta* X_t (*average rate of growth*), kaže se i *koeficijent drifta (pomeraja)*, dok je $\sigma(x,t)$ *koeficijent volatilnosti*, koji meri disperziju procesa X_t [34], videti ref. [9].

Definicija 4.2 *(Striktno rešenje SDJ)*. Neka je B_t, za $t \geq 0$ zadat proces Braunovog kretanja. Proces X_t naziva se *striktno rešenje (Strong solution)* stohastičke diferencijalne jednačine oblika (4.1), ako za svako $t > 0$, postoje integrali: $\int_0^t \mu(X_s,s)ds$, $\int_0^t \sigma(X_s,s)dB_s$ i ako važi sledeća relacija:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)\, dB_s\ , \tag{4.2}$$

gde je X_0 početni uslov [35].

S obzirom da rešenje X_t zavisi od trajektorije Braunovog kretanja do trenutka t, sledi da striktno rešenje SDJ (4.1) može da se protumači i kao funkcional $F(t,(B_t,s \leq t))$ zadatog Braunovog kretanja B_t, videti ref. [9].

Napomena *Napominjemo da je samo kod nekih tipova SDJ moguće naći rešenja u zatvorenom obliku (closed form solution), dok je u velikom broju slučajeva ovaj postupak ili nemoguć ili veoma komplikovan, zbog čega se pribegava korišćenju raznih numeričkih metoda za izračunavanje rešenja SDJ. Prilikom korišćenja numeričkih metoda važno je da su uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja zadovoljeni, jer nema svrhe numerički tražiti rešenje koje ne postoji ili koje nije jedinstveno. Uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja su takođe bitni jer nam na neki način opisuju SDJ.*

Napomena *Postoji uopšteniji oblik SDJ:* $dX_t(\omega) = \mu(t,\omega)dt + \sigma(t,\omega)dB_t$, *(4.3)*

gde koeficijenti $\mu(x,t)$ *i* $\sigma(x,t)$ *mogu da zavise i od promenljive t i od celokupne prošlosti procesa* X_t *i* B_t, *u oznaci:* $(X_s,B_s,\ s \leq t)$, *tada su koeficijenti jednačine oblika:* $\mu((X_s,s \leq t),t)$, $\sigma((X_s,s \leq t),t)$.*Jedina restrikcija koja koju moraju da zadovolje koeficijenti* $\mu(t,\omega)$ *i* $\sigma(t,\omega)$ *jeste da budu adaptirani procesi sa definisanim odgovarajućim integralima.*

Teorema 4.1 *(Egzistencija i jedinstvenost striktnog rešenja SDJ).* Neka su μ i σ merljive funkcije koje ispunjavaju sledeće uslove:

(i) *Koeficijenti μ i σ su lokalno Lipšicovi po x i uniformno Lipšicovi po t.*
To znači da za svako T i N postoji konstanta K , koja zavisi samo od T i N, takva da za $\forall |x|,|y| \leq N$ i za svako $0 \leq t \leq T$, važe sledeći uslovi:

$$\left|\mu(x,t) - \mu(y,t)\right| < K\left|x - y\right|, \quad \left|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)\right| < K\left|x - y\right| \text{[36]}. \tag{4.4}$$

(ii) Koeficijenti μ i σ ispunjavaju uslove maksimalnog linearnog rasta:

$$\left|\mu(x,t)\right| \leq K(1+\left|x\right|) \quad i \quad \left|\sigma(x,t)\right| \leq K(1+\left|x\right|)\text{, za svako } 0 \leq t \leq T \text{[37]}. \tag{4.5}$$

[34] Primetimo da kada je parametar $\sigma = 0$, SDJ postaje obična diferencijalna jednačina (*ODE*).

[35] Ako malo malo ublažimo uslove za striktno rešenje SDJ (4.1) dobijamo, tzv. slabo rešenje o kojem će biti reči.

[36] Dati uslovi mogu da se zamene jednim zajedničkim uslovom: $|\mu(x,t) - \mu(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| < K' |x-y|$, pogledati [5].

[37] Kao i u prvom slučaju, dva uslova mogu da se zamene jednim ekvivalentnim uslovom: $|\mu(x,t)|+|\sigma(x,t)| < K'(1+|x|)$.

Slučajna promenljiva X_0 je nezavisna od Braunovog kretanja ($B_t, 0 \leq t \leq T$) ili drugim rečima slučajna promenljiva X_0 je nezavisna od σ-polja generisanog slučajnim procesom B_s, $s \geq 0$. Takođe, za X_0 mora da bude ispunjen i uslov integrabilnosti, koji glasi:

$$E(X_0^2) < +\infty. \tag{4.6}$$

U tom slučaju stohastička diferencjalna jednačina oblika: $dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dB_t$ ima *jedinstveno striktno* rešenje X_t koje je neprekidno po t. Dato rešenje poseduje i osobinu da je adaptirano filtraciji generisanoj slucajnom promenljivom X_0 i procesom $B_s(\cdot)$, $s \leq t$, kao i osobinu integrabilnosti:

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2 \, dt\right] < \infty .$$

Pored navedenih osobina striktno rešenje zadovoljava i sledeću nejednakost, videti u ref. [9]:

$$E\left(\sup_{0 \le t \le T} X_t^{\,2}\right) < C\left(1 + E(X_0^{\,2})\right), \tag{4.7}$$

Pri čemu konstanta C zavisi samo od promenljivih K i T.

4.2 Slaba rešenja SDJ

Koncept slabog rešenja nam omogućava da damo značenje stohastičkoj diferencijalnoj jednačini kada striktno rešenje ne postoji. Slaba rešenja su rešenja u raspodeli i ona mogu biti definisana na nekom drugom prostoru verovatnoće, gde uslovi za koeficijente SDJ koji se odnose na egzistenciju slabih rešenja su manje strogi od uslova za egzistenciju striktnih rešenja, pogledati ref. [9].

Definicija 4.3 *(Egzistencija slabog rešenja).* Ako postoji prostor verovatnoće sa filtracijom, Braunovo kretanje $B_t^\wedge$ definisano na tom prostoru, kao i proces $X_t^\wedge$ adaptiran datoj filtraciji, takvi da: $X_0^\wedge$ ima datu raspodelu, za svako t važi da su integrali u formuli (4.8) definisani i ako za $X_t^\wedge$ važi sledeća jednačina:

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \int_0^t \mu(\hat{X}_u, u)\, du + \int_0^t \sigma(\hat{X}_u, u)\, dB_u \, . \tag{4.8}$$

Tada proces $X_t^\wedge$ nazivamo *slabim rešenjem SDJ*, čiji je diferencijalni oblik: $dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dB_t$.

Definicija 4.4 *(Jedinstvenost slabog rešenja).* Za slabo rešenje kažemo da je jedinstveno, ako važi sledeći stav: Kada god imamo dva rešenja X_t i X_t' (mogu da budu definisana i na različitim prostorima verovatnoće), takva da su im raspodele od X_0 i X_0' jednake, tada su i sve konačno-dimenzionalne raspodele od X_t i X_t' jednake.

Napomena *Iz definicije zaključujemo da je svako striktno rešenje ujedno i slabo rešenje.Jedinstvenost striktnog rešenja (tj. jedinstvenost prema putanjama) podrazumeva i jedinstvenost slabih rešenja.*

4.3 Primeri stohastičkih diferencijalnih jednačina

U sledećim primerima prikazaćemo neke od osnovnih tipova SDJ kao i dve najednostavnije metode za rešavanje SDJ, koje se sastoje u korišćenju Itoove formule ili stohastičkog pravila proizvoda.

Primer 4.1 *(Blek-Šolsov model; Black-Scholes-Merton-ov model).*
Prvo ćemo navesti *Black-Scholes-Merton-ov model*, u kome se stopa prinosa dx_t/x_t opisuje slučajnom funkcijom. Neka je $x(t)$ vrednost koju će imati $1 nakon određenog vremenskog perioda t, pošto je uložen na štedni račun u banci, gde se parametar *r* tumači kao kamatna stopa. Ako pretpostavimo da se okamaćivanje vrši neprekidno u vremenu, vrednost $x(t)$ se dobija kao rešenje obične diferencijalne jednačine: $dx(t)/x(t)=rdt$ i iznosi:

$$x(t)=e^{rt}, x(0)=1 \ x(0)=1.$$

Ako je stopa prinosa dx_t/x_t podložna slučajnim fluktuacijama (koje predstavljaju slučajne funkcije), tada se umesto konstantnog člana r, uzima član perturbovan šumom, koji je oblika: $r+\xi(t)$. Tada se dobija SDJ, oblika: $dX_t/dt=(r+\sigma\xi(t))X_t$, čiji je ekvivalentni zapis oblika:

$$dX_t = rX_t\,dt+\sigma X_t\,dB_t, \tag{4.9}$$

gde se r i σ nazivaju koeficijent drifta (pomeraja) i koeficijent volatilnosti. Model oblika (4.9), čiji su koeficijenti r i σ konstantni, naziva se *model Geometrijskog Braunovog kretanja*, dok je rešenje ove SDJ proces koji nazivamo Geometrijsko Braunovo kretanje i oblika je:

$$X_t = e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B_t}, \text{ gde je } X_0=1. \tag{4.10}$$

Pokažimo da je Geometrijsko Braunovo kretanje rešenje date SDJ: $dX_t = rX_t\,dt+\sigma X_t\,dB_t$. Zato posmatrajmo izvode logaritamske funkcije $f(x)=\ln(x)$, $f'(x)=1/x$, $f''(x)=-1/x^2$.
Koristeći Itoovu formulu izračunaćemo stohastički diferencijal funkcije $f(x)=\ln(x)$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{1}{X_t}dX_t + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X_t^2})\sigma^2 X_t^2\,dt \\ &= \frac{1}{X_t}\left(rX_t\,dt+\sigma X_t\,dB_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\,dt \\ &= (r-\frac{1}{2}\sigma^2)\,dt + \sigma\,dB_t\,. \end{aligned}$$

Proces $\ln X_t$ dobijamo primenom Itoove formule za Braunovo kretanje (3.15):

$$\begin{aligned} \ln X_t &= \ln X_0 + \int_0^t (r-\frac{1}{2}\sigma^2)\,ds + \int_0^t \sigma\,dB_s \\ &= \ln X_0 + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)\,t + \sigma\,(B_t - B_0) \Rightarrow \end{aligned}$$

Odakle jednostavno dobijamo rešenje ove SDJ u obliku:

$$X_t = e^{\ln X_0 + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t} = X_0 \cdot e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}.$$

Napomena *Slučaj kada je koeficijent volatilnosti $\sigma=0$, odgovara situaciji kada u modelu nema šuma i tada dobijamo običnu determinističku jednačinu $dx_t=rx_t\,dt$ i njeno rešenje iznosi: $x(t)=e^{rt}$, $x(0)=1$.*

Primer 4.2 *(Lanževinova jednačina i Ornstajn-Ulenbekov proces).*
Neka je B_t, za $t \geq 0$ proces Braunovog kretanja, tada SDJ oblika: $dX_t=-\alpha X_t\, dt+\sigma dB_t$, (4.11)
nazivamo *Lanževinovom jednačinom,* gde su koeficijenti α i σ proizvoljne nenegativne konstante, a X_t nepoznati proces.

Primetimo prvo da u slučaju kada je koeficijent volatilnosti $\sigma=0$, dobijamo sličnu situaciju kao kod modela Geometrijskog Braunovog kretanja, kada u modelu nema šuma, tj. dobija se dobija obična diferencjalna jednačina čije rešenje iznosi: $x(t)= x_0 e^{-\alpha t}$.

Pokažimo kako se nalazi rešenje Lanževinove jednačine, tako što ćemo razmotriti proces: $Y_t = X_t e^{\alpha t}$. Ako iskoristimo pravilo za stohastički diferencijal proizvoda i ako imamo u vidu da je kovarijacija procesa $e^{\alpha t}$ i procesa X_t jednaka nuli ($e^{\alpha t}$ ima ograničenu varijaciju), tada dobijamo:

$$dY_t = e^{\alpha t} dX_t + \alpha e^{\alpha t} X_t\, dt .$$

Daljim sređivanjem date jednačine imamo:

$$dY_t = e^{\alpha t}(-\alpha X_t dt + \sigma dB_t) + \alpha e^{\alpha t} X_t dt = \sigma e^{\alpha t} dB_t ,$$

Odakle dobijamo proces:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}\, dB_s .$$

S obzirom da važi: $X_t = Y_t e^{-\alpha t}$ i $X_0 = Y_0$, dobijamo rešenje Lanževinove SDJ, koje se naziva *Ornstajn-Ulenbekov proces* i oblika je:

$$X_t = e^{-\alpha t} \cdot \left(X_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}\, dB_s \right) . \tag{4.12}$$

Napomena *Postoji uopšteni oblik Lanževinove stohastičke diferencjalne jednačine i dat je formulom:*

$$dX_t = \left(\beta - \alpha X_t\right) dt + \sigma\, dB_t . \tag{4.13}$$

Rešenje uopštene Lanževinove SDJ dobija se iz formule: $X_t = \dfrac{\beta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \cdot \left(X_0 - \dfrac{\beta}{\alpha} + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}\, dB_s \right).$

Napomena *Napominjali smo već da ukoliko postoji striktno rešenje SDJ, tada na osnovu definicije 4.2 ono je adaptirano filtraciji zadatog Braunovog kretanja, što znači da je striktno rešenje funkcija trajektorije Braunovog kretanja do trenutka t, tj.oblika je:*$(B_s, s \leq t)$, *[9].Na osnovu rezultata Jamade i Vatanabe (Yamade i Watanabe) (1971), izvedeno je da, ukoliko su uslovi egzistencije i jedinstvenosti teoreme ispunjeni, tada postoji funkcija* F, *takva da je striktno rešenje sledećeg oblika:* $X_t = F(t,(B_s,\ s \leq t))$.*Nalaženje funkcije* F *u eksplicitnom obliku nije jednostavno, čak ni za prostije oblike Itoovih integrala kao što je to integral sledećeg oblika:*

$$X_t = \int_0^t f(B_s) dB_s \text{ , odnosno u određenijem obliku: } X_t = \int_0^t |B_s|^{1/2}\, dB_s .$$

Već smo pokazali da rešenje Lanževinove jednačine postoji i da je oblika (4.12). Probajmo dalje da nađemo onda funkcionalnu zavisnost tog rešenja od trajektorije Braunovog kretanja, tako što ćemo primeniti parcijalnu integraciju na sledeći član: $\int_0^t e^{\alpha s}\, dB_s$. *Odakle dobijamo novi izraz:*

$$e^{\alpha t} B_t - e^{\alpha 0} B_0 = \int_0^t e^{\alpha s} dB_s + \alpha \int_0^t B_s e^{\alpha s} ds = \int_0^t e^{\alpha s} dB_s = e^{\alpha t} B_t - \alpha \int_0^t B_s e^{\alpha s} ds .$$

Nakon sređivanja poslednje jednačine, dobija se željeni oblik rešenja Lanževinove SDJ:

$$X_t = F(t,\ (B_s,\ 0 \leq s \leq t)) = e^{-\alpha t} X_0 + \sigma B_t - \sigma \alpha \int_0^t e^{\alpha(t-s)} B_s\, ds .$$

4.4 Stohastički eksponent i stohastički logaritam

Teorema 4.2 *(Stohastički eksponent)*. Neka proces X_t ima stohastički diferencijal i neka za proces U_t važi sledeća stohastička diferencijalna jednačina: $dU_t = U_t \cdot dX_t$, iz koje se dobija formula za proces U_t:

$$U_t = 1 + \int_0^t U_s\, dX_s, \quad U_0 = 1. \tag{4.14}$$

Proces U_t naziva se *stohastički eksponent procesa* X_t i obeležava se oznakom $\mathcal{E}(X)$, pogledati ref. [9]. Za stohastički eksponent važe sledeća tvrđenja:

(i) Ako je proces X_t Itoov proces, tada je jedinstveno rešenje SDJ (4.14) dato formulom:

$$\mathcal{E}(X)(t) = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X,X](t)}. \tag{4.15}$$

(ii) Ako je proces X_t ograničene varijacije tada je jedinstveno rešenje SDJ (4.14) dato formulom:

$$U_t = e^{X_t - X_o}. \tag{4.16}$$

Dokaz :

Dokaz egzistencije rešenja SDJ (4.14) sastoji se u tome, da se korišćenjem Itoove formule pokaže da je ponuđena jednačina (4.15) zaista rešenje date SDJ, odnosno da kada dati izraz zamenimo nazad u stohastičku diferencijalnu jednačinu dobijamo identitet. Zato napišimo jednačinu (4.15) u jednostavnijem obliku: $U_t = e^{V_t}$, gde je $V_t = X_t - X_0 - 1/2[X,X](t)$. Tada za stohastički eksponent dobijamo:

$$d\mathcal{E}(X)(t) = dU_t = d(e^{V_t}) = e^{V_t} dV_t + 1/2\, e^{V_t}\, [V,V](t). \tag{4.17}$$

S obzirom da je funkcija kvadratne varijacije$[X,X](t)$ funkcija ograničene varijacije, kao i da je proces X_t neprekidan važi: $[X, [X,X]](t)=0$.Odavde sledi da se kvadratna varijacija procesa V_t svodi na kvadratnu varijaciju procesa X_t, tj. važi: $[V,V](t)=[X,X](t)$. Prema tome, iz jednačine (4.17) dobijamo:

$$d\mathcal{E}(X)(t) = e^{V_t}\left(dX_t - \frac{1}{2} d[X,X](t)\right) + \frac{1}{2} e^{V_t} [X,X](t),$$

odnosno kada se i poslednja jednačina sredi dobija se oblik: $d\mathcal{E}(X)(t) = e^{V_t}\, dX_t$.

Dokaz jedinstvenosti rešenja se dokazuje tako što se pretpostavi da postoji još jedan proces koji je rešenje jednačine (4.14), neka to bude proces $U_1(t)$. Tada, bi trebalo da se pokaže da važi: $d(U_1(t)/U(t))=0$.

Napomena *Primetimo da za razliku od običnog eksponenta funkcije: $g(t)=exp(f)(t)=e^{f(t)}$,stohastički eksponent $\mathcal{E}(X)$ zahteva poznavanje svih vrednosti procesa X_t do zadatog trenutka t, što je posledica činjenice da stohastički eksponent zavisi od člana kvadratne varijacije$[X,X](t)$.*

Primer 4.3

Stohastički eksponent Braunovog kretanja je rešenje SDJ oblika: $dU_t = U_t\, dB_t$, U_0=1, gde data SDJ važi za svako t . Stohastički eksponent od B_t dat je izrazom:

$$\mathcal{E}(B)(t) = e^{B_t - \frac{1}{2}t}.$$

Primer 4.4 *(Primena u finansijama: Proces cena akcija i stopa prinosa cene akcije).*
Neka je S_t oznaka za proces koji opisuje kretanje cena akcija i pretpostavimo da je to Itoov proces tj. da ima stohastički diferencijal. *Proces obrta (povraćaja) vrednosti akcije*[38] u nekom trenutku t, označava se sa R_t i definiše se sledećom relacijom: $dR_t{=}dS_t/S_t$. (4.18)

Formula (4.18) može da se zapiše u drugačijem obliku: $dS_t{=}S_t\, dR_t$, odakle vidimo da je proces S_t stohastički eksponent procesa obrta vrednosti akcije R_t.

Generelno govoreći, u većini slučajeva je jednostavnije napraviti model za proces obrta vrednosti određene aktive nego napraviti model za opisivanje kretanja vrednosti te aktive.
Navedimo kao primer Blek-Šolsov model, gde se pretpostavlja da su obrti uzajamno disjunktnih vremenskih intervala međusobno nezavisni i da imaju konačnu varijansu.Ova pretpostavka vodi nas do modela za proces obrta vrednosti akcije oblika: $R_t = \mu t+\sigma B_t$.Na osnovu čega koristeći se formulom za stohastički eksponent (4.15) dobija se proces cena akcija:

$$S_t = S_0\,\mathcal{E}(R)_t = S_0\, e^{R_t - R_0 - \frac{1}{2}[R,R](t)}$$

$$= S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

Primetimo da je u Blek-Šolsovom modelu proces cena akcija geometrijsko Braunovo kretanje.

Neka je $U{=}\mathcal{E}(X)$, tada se proces X_t naziva *stohastički logaritam* procesa U_t i obeležava se oznakom: $\mathcal{L}$(U). Stohastički logaritam je inverzna operacija operaciji stohastičkog eksponenta. Na primer stohastički eksponent Braunovog kretanja B_t je proces exp(B_t –1/2·t). Prema tome, B_t je stohastički logaritam procesa.

Teorema 4.3 *(Stohastički logaritam).* Neka proces U_t ima stohastički diferencijal i neka je različit od nule. Tada, za proces X_t kažemo da je *stohastički logaritam* procesa U_t, ako se dobija kao rešenje sledeće SDJ:

$$dX_t = dU_t/U_t\,,\ X_0 = 0, \tag{4.19}$$

Proces X_t dobija se prema formuli: $X_t = \mathcal{L}(U)(t) = \ln\left(\dfrac{U_t}{U_0}\right) + \displaystyle\int_0^t \frac{d[U,U](t)}{2U_t^{\,2}}$, [9]. (4.20)

<u>Dokaz:</u>

SDJ za stohastički logaritam $\mathcal{L}$(U), tj. jednačina (4.19), dobija se iz definicije stohastičkog eksponenta $\mathcal{E}(X)$. Prema Itoovoj formuli diferencijal logaritamske funkcije iznosi:

$$d\left(\ln U_t\right) = \frac{1}{U_t} dU_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{U_t^{\,2}}\right) d[U,U](t)\,,$$

tj. važi da je:
$$\frac{dU_t}{U_t} = d\left(\ln U_t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_t^{\,2}}\right) d[U,U](t)\,.$$

Dalje, zamenimo poslednji izraz u SDJ (4.19) i dobijamo:

$$dX_t = \frac{dU_t}{U_t} = d\left(\ln U_t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_t^{\,2}}\right) d[U,U](t)\,.$$

---

[38] Ovaj proces se drugačije naziva i *stopa prinosa cene(vrednosti)akcije* i predstavlja relativnu promenu cene akcije u vremenskom intervalu dt, tj. priraštaj cene akcija u nekom trenutku.

Nakon integracije dobija se željeni izraz:

$$X_t = \ln U_t - \ln U_0 + \int_0^t \frac{d[U,U](t)}{2U_t^2} \ .$$

4.5 Definicija, uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina

Definicija 4.5 *(Linearne SDJ).* Za stohastičku diferencijalnu jednačinu: $dX_t=\mu(X_t,t)dt+\sigma(X_t,t)dB_t$ kažemo da je *linearna SDJ*, ako su koeficijenti jednačine μ i σ oblika: $\mu(X_t,t)=\alpha(t)+\beta(t)X_t$, $\sigma(X_t,t)= \gamma(t)+\delta(t)X_t$, gde su funkcije α, β, γ, δ unapred zadati adaptirani procesi i neprekidne funkcije po promenljivoj t. Prema tome, jednodimenzionalne linearne SDJ u najopštijem slučaju imaju oblik:

$$dX_t = (\alpha(t) + \beta(t)X_t)dt + (\gamma(t) + \delta(t)X_t)dB_t \,, \tag{4.21}$$

Definicija 4.6 *(Linearne SDJ u užem smislu).*Linearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu nazivamo *linearnom jednačinom u užem smislu (linear in the narrow sense)*, ako je u jednačini (4.21) ispunjen sledeći uslov: $\delta \equiv 0$.

Definicija 4.7 *(Homogene linearne SDJ).* Linearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu nazivamo *homogenom* [39], ako za koeficijente jednačine (4.21) važe uslovi: $\alpha \equiv \gamma \equiv 0$, za sve $0\le t \le T$.

Teorema 4.4 *(Egzistencija i jedinstvenost rešenja linearne SDJ).* Ako data linearna stohastička diferencijalna jednačina ispunjava uslove:

$$\sup_{0\le t\le T}\left[\,|\alpha(t)|+|\beta(t)|+|\gamma(t)|+|\delta(t)|\,\right]<\infty \,, \tag{4.22}$$

tada koeficijenti jednačine μ i σ ispunjavaju uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja. Drugim rečima, linearna SDJ oblika:$dX_t =(\alpha(t)+\beta(t)X_t)dt+(\gamma(t)+\delta(t)X_t)\, dB_t$,$X(0)=X_0$,*ima jedinstveno rešenje* X_t, gde mora da budu ispunjeni sledeći uslovi: X_0 je nezavisna od $(B_t, 0\le t\le T)$ i $E(X_0^2)<+\infty$[40].

[39] Homogene linearne SDJ se drugačije nazivaju i jednačine stohastičkog eksponenta.
[40] Linearne stohastičke diferencijalne jednačine spadaju u klasu SDJ koje imaju eksplicitna rešenja.

4.6 Primeri i rešenja izabranih linearnih SDJ

Homogena linearna SDJ

Prema definiciji 4.7, homogena linearna SDJ je uopštena linearna SDJ (4.21)za čije koeficijente važi: $\alpha \equiv \gamma \equiv 0$, za svako $0 \leq t \leq T$. Prema tome, homogena stohastička diferencijalna jednačina je sledećeg oblika:

$$dU_t = \beta(t)U_t dt + \delta(t)U_t dB_t\,. \tag{4.23}$$

Homogena linearna SDJ rešava se tako što se gornja jednačina (4.23) oblikom svede na jednačinu za stohastički eksponent procesa Y_t, gde je Y_t Itoov proces, oblika: $Y_t = \beta(t)dt + \delta(t)dB_t$, ref. [9]. Prema tome, jednačina stohastičkog eksponenta je sledećeg oblika:

$$dU_t = \underbrace{(\beta(t)\ dt + \delta(t)\ dB_t)}_{dY_t} \cdot U_t = U_t \cdot dY_t\,.$$

Dalje, ako primenimo formulu (4.15) za rešenje stohastičkog eksponenta, dobijamo za proces U_t:

$$\begin{aligned} U_t &= \mathcal{E}(Y)(t) \\ &= U_0 \cdot \exp(Y_t - Y_0 - \frac{1}{2}[Y,Y](t)) \\ &= U_0 \cdot \exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds + \int_0^t \delta(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \delta^2(s)\,ds \right). \end{aligned}$$

Prema tome, rešenje homogene linearne SDJ je oblika:

$$U_t = U_0 \cdot \exp\left(\int_0^t (\beta(s) - \frac{1}{2}\delta^2(s))\,ds + \int_0^t \delta(s)\,dB_s \right).$$

Ova jednačina može da se reši i na drugi način, tako što se pretpostavi da je rešenje u obliku proizvoda dva procesa, međutim navedeno rešenje, u kojem koristimo poznate osobine stohastičkog eksponenta je efektnije i brže. Pogledati referencu [5] gde su objašnjene razne metode za rešavanje linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina kao i uslovi egzistencije i jedinstvenosti njihovih rešenja.

Linearna SDJ u najopštijem obliku

Kao što je već napomenuto, linearna stohastička diferencijalna jednačina u najopštijem slučaju glasi:

$$dX_t = (\alpha(t) + \beta(t)X_t)\,dt + (\gamma(t) + \delta(t)X_t)\ dB_t\,. \tag{4.24}$$

Rešenje date jednačine potražićemo u obliku proizvoda dva procesa: $X_t = U_t \cdot V_t$,čiji diferencijali iznose, redom: $dU_t = \beta(t)U_t\,dt + \delta(t)U_t\,dB_t$ i $dV_t = a(t)\,dt + b(t)dB_t$, gde važi: $U_0 = 1, V_0 = X_0$, kao i da su $a(t)$ i $b(t)$ nepoznati koeficijenti, ref. [9]. ProcesU_t se dobija kao rešenje homogene linearne stohastičke diferencijalne jednačine i iznosi:

$$U_t = U_0 \cdot \exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds + \int_0^t \delta(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \delta^2(s)\,ds \right).$$

S obzirom da je $X_t = U_t \cdot V_t$ rešenje polazne SDJ, trebalo bi da kada ga zamenimo nazad u polaznu jednačinu dobijemo identitet. Prema tome, prvo treba da se izračuna stohastički diferencijal od X_t, a zatim metodom izjednačavanja koeficijenata polazne jednačine (4.24) i novodobijene jednačine (4.25) da se izračunaju nepoznati koeficijenti $a(t)$ i $b(t)$. Prema tome, nađimo stohastički diferencijal od $X_t = U_t \cdot V_t$:

$$
\begin{aligned}
dX_t &= d(U_t \cdot V_t) \\
&= dU_t \cdot V_t + U_t \cdot dV_t + \mathrm{cov}[U_t, V_t] \\
&= \left(\beta(t)U_t \cdot V_t\, dt + \delta(t)U_t \cdot V_t\, dB_t\right) + \left(a(t)U_t\, dt + b(t)U_t\, dB_t\right) + \left(\delta(t)b(t)U_t\, dt\right) \\
&= \left[\beta(t)X_t + a(t)U_t + \delta(t)b(t)U_t\right]dt + \left[\delta(t)X_t + b(t)U_t\right]dB_t . \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Zatim izjednačavanjem koeficijenata datih jednačina (4.24) i (4.25), dobijaju se koeficijenti $a(t)$ i $b(t)$:

$$
\begin{aligned}
b(t)U_t &= \gamma(t), \\
a(t)U_t &= \alpha(t) - \delta(t)b(t)U_t \\
&= \alpha(t) - \delta(t)\gamma(t).
\end{aligned}
$$

Krajnje rešenje linearne SDJ iznosi: $X_t = U_t \cdot V_t$

$$
\begin{aligned}
&= U_t \cdot \left(V_0 + \int_0^t a(s)\, ds + \int_0^t b(s)\, dB_s \right) \\
&= U_t \cdot \left(X_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \delta(s)\gamma(s)}{U_s}\, ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{U_s}\, dB_s \right). \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Linearna SDJ u užem smislu; Lanževinova jednačina.

Prema definiciji 4.6 *linearna SDJ u užem smislu* dobija se iz opšte linearne SDJ, kada se uzme da je $\delta \equiv 0$ i ona je sledećeg oblika:

$$dX_t = (\alpha(t) + \beta(t)X_t)\, dt + \gamma(t)\ dB_t . \qquad (4.27)$$

Primetimo da je uz odgovarajući izbor koeficijenata α, β, γ u datoj jednačini, moguće dobiti uopšteni oblik Lanževinove SDJ (4.13), kao i njen jednostavniji oblik (4.11), koji su navedeni u primeru 4.2, kome je još objašnjeno kako se Lanževinova SDJ rešava direktno, pogledati ref. [9] i [18].

Međutim, Lanževinova SDJ može da se reši i kao specijalan oblik linearne stohastičke diferencijalne jednačine tj. bolje rečeno, kao specijalan oblik linearne SDJ u užem smislu. Prema tome može da se iskoristi formula (4.26), uz uslov da je $\delta \equiv 0$. Pokazaćemo dati postupak rešavanja, ali na Lanževinovoj SDJ, gde važi da je koeficijent $a(t)$ zadat i neprekidan adaptiran proces. Jednačina je sledećeg oblika:

$$dX_t = a(t)X_t\, dt + dB_t, \qquad (4.28)$$

Dalje, uporedimo koeficijente jednačine (4.27) i jednačine (4.28), odakle dobijamo sledeće vrednosti: $\beta(t)=a(t), \gamma(t)=1, \alpha(t)=0$.Analogno kao u slučaju rešavanja linearne SDJ najopštijeg oblika, rešenje polazne jednačine (4.28) potražićemo u obliku proizvoda: $X_t=U_t \cdot V_t$, s tim što što će diferencijal procesa U_t, u ovom slučaju iznositi:$dU_t= a(t)U_t\, dt$, odakle je: $U_t = \exp(\int_0^t a(s)ds)$.

S obzirom, da imamo sve potrebne komponente jednačine (4.26), tj. imamo i gore naveden proces U_t i koeficijente $\beta(t)=a(t), \gamma(t)=1, \alpha(t)=0$ i $\delta \equiv 0$, jednostavno se dobija rešenje polazne Lanževinove SDJ (4.28) i ono je sledećeg oblika:

$$X_t = e^{\int_0^t a(s)ds} \cdot \left(X_0 + \int_0^t e^{-\int_0^u a(s)ds}\, dB_u \right).$$

Braunov most

Braunov most je u najednostavnijem obliku proces Braunovog kretanja sa fiksiranim vrednostima na krajevima intervala [0,1], gde su: $X_0=X_1=0$. Braunov most se dobija kao rešenje sledeće linearne SDJ:

$$dX_t = \frac{-X_t}{1-t}\,dt + dB_t,\ \ 0 \le t < 1,\ \ X_0 = 0. \tag{4.29}$$

U *opštijem obliku SDJ Braunov most* ima fiksirane vrednosti na krajevima intervala [0,T], tako da važi: $X_0=a$ i $X_T=b$. Navedeni opšti oblik Braunovog mosta dobija se kao rešenje sledeće linearne SDJ:

$$dX_t = \frac{b-X_t}{T-t}\,dt + dB_t,\ \ 0 \le t < T,\ X_0 = a. \tag{4.30}$$

Primetimo da se gornja SDJ dobija iz linearne SDJ uopštenog oblika, kada se koeficijenti u uopštenoj linearnoj SDJ zamene sledećim vrednostima:$\alpha(t)=b/(T-t)$, $\beta(t)= -1/(T-t)$,$\gamma(t)=1$,$\delta(t)=0$. Prema tome i rešenja SDJ (4.29) i SDJ (4.30) dobijaju se primenom formule za rešenje uopštene linearne SDJ (4.26), kada se u nju zamene navedeni koeficijenti α, β, γ, δ. Prema tome, rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina (4.29) i (4.30) redom iznose:

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s,\ \ 0 \le t < T\ ,$$

$$X_t = a\,(1-\frac{t}{T}) + b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}\,dB_s,\ \ 0 \le t < T\ \ .$$

Napomena *S obzirom da je podintegralna funkcija deterministička, kao i da za svako $t < T$ važi sledeći uslov: $\int_0^t ds/(T-s)^2 < \infty$,zaključujemo da je proces $\int_0^t dB_s/(T-s) < \infty$ martingal i štaviše Gausov proces sa početnom vrednošću $X_0=a$. Prema tome, zaključujemo da je Braunov most neprekidan Gausov proces na intervalu [0,T] sa očekivanjem: $E(X_t) =a(1- t/T) + bt/T$ i funkcijom kovarijanse: $Cov(X_t,X_s) =min(s,t) -st/T$.*

5. Osnovni pojmovi iz finansijske matematike

Objasnimo prvo neke finansijske pojmove neophodne za bolje razumevanje ovog rada. Počećemo, pre svega sa berzom, kojom ćemo se najviše baviti u ovom poglavlju, odnosno sa njenim načinima funkcionisanja i matematičkim opisom (matematičkim modelom). Najvažniji, ujedno i najpoznatiji berzanski centri u svetu su Njujork, London, Tokio, Frankfurt i Čikago, dok je najveća berza Njujorška berza hartija od vrednosti. Pojam berze može da se interpretira na dva načina:

- Prvo značenje berze (*exchanges*) poklapa se sa uopštenijim pojmom od same berze, odnosno sa pojmom ''tržišta'' u generalnom smislu, pogledati referencu [23]. U tom slučaju, berza se definiše kao posebno organizovano stalno mesto na kojem se u određeno vreme i po unapred utvrđenim pravilima trguje određenim tipiziranim robama, uslugama, hartijama od vrednosti i devizama. U ekonomskoj terminologiji opisuje se kao organizovano tržište na kojem se obavlja kupoprodaja fungibilne (zamenljive) robe, proizvoda, usluga...
- Berza ima još jedno značenje, u kojem se interpretira kao specijalizovana institucija koja se bavi samo trgovinom hartija od vrednosti (akcije, obveznice, opcije), novcem i stranim valutama.

Jedan od osnovnih razloga nastanka institucije berze jeste okupljanje većeg broja investitora sa manjim vrednostima kapitala, zbog koncentracije kapitala na jednom mestu i mogućeg finansiranja skupih projekata u budućnosti. Drugi bitan uzrok nastanka berze jeste želja za ubrzavanjem vremenskog perioda od ulaganja do profitiranja, odnosno mogućnost prodaje hartije od vrednosti pre nego što ona dospe na realizaciju.

Koreni berzanske vrste trgovine iz kojih je berza i dobila ime vezuju se za Flandriju, grad Briž i XVI vek. Međutim, današnje velike berze nastale su mnogo kasnije. Počeci Njujorške berze vezuju se za 1792. godinu, kada se 24 brokera okupilo i potpisalo Batonvudski sporazum. Nekoliko godina kasnije, tačnije 1801. godine osnovana i je Londonska berza. Nakon toga, pojavom industrijske revolucije berza dobija sadašnje konture: zgradu, pravila poslovanja, organe upravljanja. Ubrzo posle 1929. godine država se uključuje u ono što je do tada bilo autonomno berzansko pravo i time znatno povećava sigurnost poslovanja na berzi, pri čemu se vodilo računa da se ne ugrozi berzanski mehanizam.

Razvojem računara i kompjuterizacijom berzanskog poslovanja, pojam "mesto" u definiciji berze gubi na značaju. Trgovina elektronskim putem je omogućena i to sa bilo kog mesta i skoro neprekidno u vremenu. Najveća svetska akcijska berza elektronskog tipa je *NASDAQ*. Međutm, i pored svih ovih promena berza je zadržala svoje prve i osnovne postulate a to su *poverenje i sigurnost*.

Opcijama ili bolje rečeno vorentima (*warrants*) se trguje vekovima u mnogim zemljama, ali formalan razvoj i ekspanzija tržišta opcija započela je 1973. godine uvođenjem akcijskih opcija na listu finansijskih proizvoda Čikaške berze (*Chicago Board Options Exchage ili CBOE*). Neplanirano, iste godine istraživači Blek i Šol (*Black & Scholes*) i nezavisno od njih Merton (*Merton*) objavljuju radove u kojima uvode i objašnjavaju fundamentalne principe teorije određivanja cene opcija koristeći princip nearbitraže. U periodu od 1973. godine pa do danas, trgovina finansijskim derivatima se toliko razvila da se opcijama, fjučserima i ostalim finansijskim derivatima može trgovati u velikim količinama na berzama i tržištima širom sveta.

5.1 Struktura berze

Aktiva (Assets) je osnovno finansijsko sredstvo kojim se trguje na berzi. Pod aktivom podrazumevamo sve objekte, koji imaju neku vrednost, odnosno objekte kojima možemo da trgujemo na berzi. Aktivu čine sledeći finansijski proizvodi:

- *Roba (Commodity)*: Bakar, srebro, zlato, nafta, struja, kafa, žito, itd.
- *Valute (Currencies)*: Euro, Dolar, Funta, itd.
- *Obveznice i državne hartije od vrednosti (Bonds)* su vrednosni papiri, odnosno sertifikati koje izdaje vlada ili javna kompanija koja garantuje da će pozajmljeni novac *(glavnica)* sa fiksiranom kamatnom stopom biti vraćen u dogovorenom roku.
- *Akcija (Stock)* neke kompanije: predstavlja ispravu (dokument) koji se za određenu sumu novca izdaje kupcu (vlasniku akcije) i na osnovu kojeg vlasnik te akcije stiče određena prava. U zavisnosti od vrste akcije i njenog udela u kompaniji, vlasnik akcije može imati pravo učešća u organima uprave te kompanije kao i u raspodeli njene dobiti. Vlasnici akcija kompanije nazivaju se deoničarima koji na osnovu svojih akcija dobijaju prihod u vidu dividende.
- *Finansijski derivati (Financial derivatives,Derivatives,Securities, Contingent claims)* su izvedene hartije od vrednosti. Predstavljaju složene finansijske instrumente izvedene iz osnovne[41] finansijske aktive (*underlying asset*) i njihova vrednost određena je vrednošću, odnosno cenom osnovne finansijske aktive. U derivate spadaju kupovne/prodajne opcije, forvard i fjučsers ugovori, itd.

Hartije od vrednosti (Securities) predstavljaju dokumente kojima se obećava isplata novca, kamate, zarade ili dividende. Hartije od vrednosti u užem smislu predstavljaju investicione jedinice, odnosno hartije od vrednosti kod kojih postoji rizik ulaganja, koji se kompenzuje potencijalnom zaradom srazmernom riziku. U hartije od vrednosti spadaju akcije, obveznice, opcije i druge složenije vrste derivata, itd.

Berzanski indeks (Indices) je lista od n akcija trenutno najbolje kotiranih kompanija date države i predstavlja njihovu aritmečku sredinu[42].

[41] Kaže se i primarne finansijske aktive.

[42] Indeks može da se definiše i kao statistička mera promena u portfoliju (portfelju) akcija koji predstavlja deo celokupnog tržišta.

Indeksima se meri kretanje cene aktiva na tržištu. Najčešće citirani tržišni indeksi su američki indeks: *Dow Jones Industrial Average* (sadrži cene akcija 30 kompanija u SAD, kao što su Microsoft, IBM, itd), zatim britanski indeks: *FT-SE*, nemački indeks: *DAXX*, kao i japanski indeks: *NIKKEI Dow*. Najpoznatiji srpski indeks je indeks Beogradske berze *BELEXKS15*.

Portfolio (Portfolio) je skup vrednosnih papira koje poseduje investitor ili kompanija, gde vrednosni papiri ne moraju da budu istog tipa. Portfolio može da se sastoji iz akcija, valuta, opcija, itd. U portfolio čak možemo svrstati i neku vrednu svojinu, kao što su nakit, slike, itd.

Prihod (Isplata) (Payoff, Payout) je ukupna količina novca koja se po završetku svih transakcija na tržištu vraća investitoru, dok *Profit (Dobit)* čini razliku prihoda i investirane sume novca (tj. čistu zaradu koju dobija investitor).

Stopa prinosa (Rate of return)[43] ukazuje na relativnu promenu uloženog kapitala, odnosno predstavlja odnos profita i vrednosti početne investicije.

Kratko prodavanje (Prodaja na kredit) (Short selling) podrazumeva prodaju finansijske aktive po određenoj ceni i sa dogovorenim datumom predaje vlasništva (u budućnosti), gde prodavac u trenutku same prodaje ne poseduje datu aktivu. Ovakva transakcija na tržištu je dozvoljena i legalna. Prodavci koji trguju na ovakav način obično procenjuju da će biti u mogućnosti da kupe tu aktivu po nižoj ceni nego po kojoj su je prodali i na taj način ostvare profit. Međutim, ne mora ostvarivanje profita da bude jedini cilj kratke prodaje, postoje i druge strategije koje se koriste na tržištu.

Kratka pozicija (Short position) je pozicija u kojoj se investitor nalazi nakon prodaje aktive koju trenutno ne poseduje. Kratka pozicija može da se ostvari raznim transakcijama na tržištu, kao što su kratka prodaja te aktive, kupovina prodajne opcije (*put option*), kao i raznim drugim strategijama, koje ne moraju da imaju za cilj profitiranje zbog pada cene te aktive. Neke od njih mogu da služe npr. za smanjenje rizika (*hedge portfolio*).

Duga pozicija (Long position) podrazumeva poziciju u kojoj se investitor nalazi nakon kupovine, odnosno sklapanja ugovora o kupovini određene finansijske aktive i to sa namerom da je zadrži određen vremenski period, u iščekivanju porasta njene vrednosti, samim tim i svoje potencijalne zarade. Na primer, za vlasnika akcija kompanije McDonald's se kaže da ''ima dugu poziciju sa McDonald's-om'', što u stvari znači da on poseduje tu aktivu i ima nameru da je zadrži, jer je malo verovatno da će opadati vrednosti akcija velikih kompanija, kao što su to Microsoft, Coca-cola, McDonald's i druge.

Kamata je nadoknada za korišćenje pozajmljenog kapitala i nju korisnik kapitala plaća vlasniku kapitala.

Kamatna stopa (Interest rate) predstavlja broj jednak iznosu koji dužnik godišnje plaća poveriocu na svakih 100 pozaljmljenih jedinica kapitala.

Volatilnost (Volatility) je pojam koji opisuje nestabilnost (promenljivost) tržišta, odnosno slučajan faktor koji utiče na promenu cene na tržištu..

Diskontovanje (Discounting) je postupak (metoda) za utvrđivanje koliku vrednost bi određene isplate u budućnosti imale danas (u sadašnjosti). Drugim rečima to je svođenje budućih vrednosti finansijskih instrumenata na sadašnje vrednosti, koje nazivamo *diskontne (diskontovane) vrednosti (discounted value)*. Diskontovanje je jedan od osnovnih principa koji se koriste u finansijama i obavlja se tako što se vrednost u budućnosti pomnoži sa *diskontnom stopom (discount rate)*. Diskontna stopa se opisuje kao ''fiktivna'' kamatna stopa, odnosno stopa koju bi dati novac u budućnosti mogao da zaradi da je drugačije bio uložen.

---

[43] Pored naziva *rate of return*, na engleskom često srećemo nazive: *return on investment (ROI), return on asset (ROA) lii return on equity (ROE).*

U finansijskom žargonu postoji izreka: *''Dolar vredi više danas nego sutra''.* To je posledica činjenice da *novac ima vremensku vrednost*, jer u sadašnjem trenutku novac ima mogućnost (kapacitet) da ostvari interes, ukoliko se uloži na drugačiji način.

U zavisnosti od strategije koju koriste, kao i od dugoročnog cilja koji žele da ostvare, učesnici na tržištu dele se na arbitražere, špekulante i hedžere.

- *Arbitraža (Arbitrage)* je mogućnost da ostvari trenutni profit bez rizika sa početnim ulaganjem, ili da se vremenom ostvari profit bez rizika i bez ikakvih početnih ulaganja.
  Osnovna pretpostavka efikasnog funkcionisanja tržišta je da arbitraža ne postoji [44].
  Imajući u vidu, da su situacije u kojima se javlja arbitraža realne i moguće, na tržištu se javlja potreba za *arbitražerima***.** Arbitražeri su učesnici na tržištu (najčešće zaposleni od strane same uprave tržišta), koji su zaduženi da pronalaze i koriste neusaglašenosti prilikom zadavanja cene, odnosno arbitražne situacije i od toga zarađuju profit oslobođen rizika. Samim tim što neko uoči i iskoristi arbitražnu priliku, na tržištu izaziva određenu reakciju, nakon koje se arbitražna prilika prekida.
- *Hedžeri* su učesnici na tržištu čiji je motiv učešća isključivo zaštita od rizika, usled eventualnih gubitaka koji bi mogli nastati zbog kasnijih promena cene određenih aktiva. Njima je cilj da obezbede konstantnu vrednost svog portfolia, što postižu korišćenjem raznih strategija. Primer jedne od takvih strategija je istovremeno zauzimanje suprotnih pozicija u finansijskim derivatima. Na robno-berzanskom tržištu hedžeri bi bili proizvođači i prerađivači.
- *Špekulanti* su učesnici na tržištu čiji je glavni motiv učešća samo zarada (profit), a ne zaštita od rizika. Prema tome, špekulanti ulaze u velike rizike, a samim tim mogu da ostvare veće profite ili veće gubitke. One špekulante koji očekuju rast cene pojedinih aktiva i u odnosu na to formiraju svoj porfolio, nazivamo *bikovima (bulls)*, dok one koji očekuju pad cene nazivamo *medvedima (bears)*.

5.2 Modeli tržišta

Osnovna pretpostavka efikasnog tržišta je da cena ima slučajni karakter i da se kretanje cena dešava na slučajan način. Prema tome, cena proizvoljne aktive u budućnosti ne može se tačno odrediti, ali zato se može odrediti njena najverovatnija raspodela u datom trenutku[45] i na osnovu podataka iz prošlosti mogu se predvideti mogući skokovi u kretanju cena, kao i funkcije očekivanja i disperzije. Osnovne pretpostavke, odnosno hipoteze tržišta od kojih se polazi pri konstrukciji i razmatranju tržišta jesu:

(i) *Proces kojim se opisuje kretanje cena na tržištu je Markovski proces. To znači da je prošlost (istorija) procesa cena u potpunosti sadržana u sadašnjoj ceni, tako da će očekivanje procesa cena zavisiti samo od vrednosti cene u sadašnjem trenutku.*

(ii) *Smatra se da tržište trenutno deluje na svaku novu informaciju o aktivi ili na njenu promenu.*

Koriste se razni modeli za opisivanje finansijskih tržišta. Posebno izdvajamo *Binomni model*, kao diskretan model tržišta i *model geometrijskog Braunovog kretanja*, kao neprekidan model tržišta.

[44] Prema matemtičkoj terminologiji, koju ćemo formalno uvesti malo kasnije, ekvivalent tvrđenju da arbittraža ne postoji jeste tvrđenje da je skup trenutaka u kojima se arbitraža javlja skup verovatnosne mere nula .

[45] Odnosno skup njenih mogućih vrednosti i verovatnoće tih vrednosti u datom trenutku.

Navedimo opšte pretpostavke koje se koriste u modelima finansijskog tržišta. Pre svega, pretpostavlja se da je tržište *bez frikcija (frictionless)*, odnosno teorijski idealna sredina za trgovanje koja podrazumeva sledeće osobine:

- Svi investitori ne mogu da utiču na formiranje cene (*All investors are price takers*).
- Svi učesnici na tržištu imaju podjednako pristup relevantnim informacijama.
- Prilikom trgovine na tržištu nema transakcijskih troškova ni provizije.
- Sve aktive na tržištu savršeno su deljive i likvidne. Kaže se da je tržište likvidno kada je u svakom trenutku moguće kupiti ili prodati neograničenu količinu aktiva na tržištu. U konkretnom slučaju, to znači da je moguće pozajmiti neograničenu količinu sredstava iz banke (npr. kratkom prodajom obveznica).
- Nema nikakvih ograničenja na iznose bankarskih kredita, a kamatne stope prilikom davanja i uzmanja kredita su jednake.
- Dozvoljeno je kratko prodavanje vrednosnih papira, koje se obično upražnjava kada je na tržištu zastupljena tendencija pada cene pojedinih aktiva (tada se kaže da je investitor u kratkoj poziciji sa nekom aktivom).
- Pod opcijom se podrazumeva opcija Evropskog tipa. Vlasnik opcije ima pravo da izvrši opciju[46] (*exercise*) i to tačno na *datum isteka opcije*, odnosno *datum dospeća* (*expiry date*).

Napominjemo da se navedeni skup osobina koristi i pod nazivom *tržišna mikrostruktura*. Prema tome, idealno tržište (tržište bez frikcija) podrazumeva odsustvo mikrostrukturnog šuma. Ovaj termin ćemo dalje u radu često koristiti (poglavlje 6).

S obzirom na to da tržište obiluje količinom i raznovrsnošću finansijskih proizvoda, kao i velikim brojem učesnika, razumljivo je da će učesnici imati različite subjektivne stavove o kretanju cena na tržištu i njihovim verovatnoćama. Uopšteno posmatrano, moguće je da dve stranke koje su povezane opcionim ugovorom imaju različite procene verovatnoća kretanja cene osnovne aktive. Pojam *subjektivna verovatnoća* odnosi se na individualno mišljenje pojedinca o stanju neke aktive. Koristi se i termin *realna (stvarna) verovatnoća*. Prema tome, jasno je da očekivanje cene proizvoljne aktive zavisi od subjektivne procene tržišta koju napravi investitor.

Međutim, da bi se konstruisao *pouzdan (verodostojan)* model finansijskog tržišta, mora da se, na neki način, garantuje jedinstvenost cene proizvoda, kao i da se isključi mogućnost subjektivnog procenjivanja cene datog proizvoda. Prema tome, *jedinstvenost cene je primarna osobina svakog tržišta*. Jedan od načina da se ona obezbedi je da se, pored uvođenja dodatnih zahteva na tržište, primeni i *postupak replikacije portfolia*, odnosno postupak koji se koristi za određivnje cene proizvoljnog instrumenta, pogledati ref. [12].

[46] Izvrsenje ne mora obavezno da znaci i prodaja.

5.3 Binomni model tržišta

Za početak, razmotrićemo najednostavniji netrivijalan i diskretan model finansijskog tržišta, tzv. *Binomni model*. Na njemu ćemo objasniti osnovne postupke za određivanje cene derivata, kao i osnovne pojmove koji se kasnije koriste u složenijim modelima. Ovaj model razvili su, nezavisno jedni od drugih Šarp (*Sharpe*) (1978), Rendelman i Barter (*Rendleman & Bartter*) (1979) godine. Iako, postoje binomni modeli sa većim brojem perioda (*multiperiod models*), počećemo od verzije ovog modela sa vremenskim periodom dužine jedan. Za detaljnije objašnjenje tematike finansijskog tržišta, kao i za pregled raznih modela koji se koiriste za opisivanje tržišta pogledati reference [3], [12], [19] i [20].

Za binomni model $\mathcal{M}=(S,B,\Phi)$ pretpostavljamo sledeće osobine:

- Dozvoljena je kratko prodavanje svih aktiva na tržištu, kao i situacija da se investitor nađe u kratkoj poziciji.
- Količine svih aktiva na tržištu mogu da budu proizvoljni realni brojevi, odnosno $\phi\in R^2$.
- Pretpostavlja se da nema transakcijskih troškova prilikom trgovine na tržištu.
- Tržište je likvidno.
- Podrazumeva se da nema razlike između kupovne cene i cene ponude, odnosno kupovna cena je jednaka prodajnoj ceni svih aktiva na tržištu.

Opis binomnog modela:

- Model se posmatra u dva vremenska trenutka: $t = 0$ ("danas") i $t = T$ ("sutra").
- U modelu se pretpostavlja da postoje dve *osnovne* aktive, jedna je visokog rizika (*risky asset*), a druga je bez rizika (*risk-free aseet*).To su respektivno *akcija i obveznica*, a njihove vrednosti cena u trenutku t, obeležićemo oznakama: S_t i B_t.
- Verovatnosni prostor (prostor ishoda) binomnog modela sastoji se iz dva stanja: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$. Dalje, ovaj prostor opremljen je σ-poljima: $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{F}_T=2^{\Omega}$, gde $\mathcal{F}_T$ - sadrži sve podskupove skupa Ω i opremljen je verovatnoćom P definisanom na merljivom prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$, tako da su verovatnoće ishoda $P=\{\omega_1\}$ i $P=\{\omega_2\}$ strogo pozitivne.
- Proces cena obveznica B_t je deterministički proces[47] i opisuje se formulom:
$$B_0=1,\quad B_T=1+r,\quad r\in R,\ r\geq 0\,,$$
gde je r kamatna stopa obveznice za jedan vremenski period. Postojanje obveznice može da se interpretira i kao postojanje banke sa kamatnom stopom r.
- Sledeći osnovni instrument je akcija čija se cena modeluje strogo pozitivnim diskretnim procesom, oblika: $S=\{S_t\}$, $t\in[0,T]$. Pretpostavljamo da je proces S *adaptiran filtraciji* $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_T\}$, što znači da je slučajna promenljiva S_t, $\mathcal{F}_t$-merljiva za svako $t=0,T$, odnosno važi:
$$S_0\in R\,,\ S_T(\omega)=\begin{cases} S^u\,,\ ako\ \ je\ \omega=\omega_1, \\ S^d\,,\ ako\ \ je\ \omega=\omega_2. \end{cases}$$ (gde mora da važi uslov: $S^u>S^d$).

[47] Specijalno, u ovom modelu jeste deterministički, ali u generalnom slučaju ne mora da bude.

5.3.1 Osnovni pojmovi binomnog modela

U *odeljku 5.1* o strukturi berze pokušali smo da sa ekonomske tačke gledišta objasnimo način funkcionisanja proizvoljnog finansijskog tržišta, kao i pojmove koji ga opisuju. U poglavlju što sledi opisaćemo iste i dodatno uvesti druge neophodne pojmove, ali ovoga puta sa strožijim matematičkim pristupom problemu postavke i konstrukcije modela finansijskog tržišta. Kao što je već napomenuto u uvodu, ovim postupkom izlaganja naglašena je složenost prelaza sa ekonomskih činjenica i opisa problema na matematičku formalnu postavku modela. Sa namerom je izabran najednostavniji binomni model za analizu funkcionisanja tržišta, jer na datom modelu može mnogo bolje da se razume način razmišljanja prilikom formalne konstrukcije i formiranja pretpostavki datog tržišta, koje su neophodne za njegovo efikasno funkcionisanje. Za detaljan pregled karakteristika binomnog modela pogledati reference [3], [12] i [19]. Ovde napominjemo da većina pojmova koji su ovde navedeni važe i za mnogo složenije modele od binomnog, jer se kao osnova za konstrukciju većine složenih koristi baš binomni model. Zato smo prilikom definisanja ili objašnjavanja određenih pojmova koristilli pojam "proizvoljan model finansijskog tržišta" ili "diskretni model tržišta" umesto samo binomni model tržišta.

Definicija 5.1. Pod pojmom *portfolio* podrazumevamo dvo-dimenzionalni vektor oblika $\phi=(\alpha,\beta)$, gde sa $\alpha,\beta \in R$ označavamo redom, broj akcijskih deonica koje investitor poseduje u proizvoljnom trenutku i količinu novca β, koji je uložen (deponovan) na bankovni račun ili pozajmljen iz banke. U tom slučaju, sa Φ obeležavamo prostor svih linearnih kombinacija portfolia datog oblika $\phi=(\alpha,\beta)$. Prema tome, važi: $\Phi=R^2$.

Napomena *Primetimo da promenljive α i β mogu da budu i pozitivne i negativne. Ako je $\beta=3$, to znači da smo kupili 3 obveznice u nekom trenutku, a ako je $\alpha=-2$ znači da smo prodali dve akcijske deonice. U finansijskom žargonu, kaže se da imamo dugu poziciju u obveznici i kratku poziciju u akciji. Za proizvoljan model, veoma je važno pretpostaviti da su kratke pozicije i kratka prodaja dozvoljene.*

Definicija 5.2. *Proces vrednosti* portfolia ϕ, odnosno *proces bogatstva (wealth process)* se u vremenskim trenucima $t = 0$ i $t = T$, definiše izrazima:

$$V_0(\phi) = \alpha_0 S_0 + \beta_0, V_T(\phi) = \alpha_0 S_T + \beta_0 (1+r), \tag{5.1}$$

gde je S_T cena akcije u trenutku dospeća T.

Definicija 5.3. Portfolio ϕ nazivamo *arbitražnom prilikom* (*arbitrage opportunity*) ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$V_0(\phi) = 0,\ V_T(\phi) \geq 0\ \ i\ \ P\{V_T(\phi) > 0\} > 0 \tag{5.2}$$

Pojam *jaka arbitražna prilika*[48] odnosi se na portfolio ϕ za koji važe sledeće nejednakosti:

$$V_0(\phi) < 0\ \ i\ \ V_T(\phi) \geq 0 \tag{5.3}$$

Ukoliko na celom tržištu $\mathcal{M}$ ne postoji portfolio koji ispunjava navedene uslove, onda kažemo da u datom tržišnom modelu $\mathcal{M}$ *nema arbitraže*.

Napomena *Svako ko trguje na tržištu ima za cilj da napravi zaradu sa što manjim ulaganjem i u tom kontekstu arbitraža jeste željeni portfolio. Međutim, postojanje arbitraže se interpretira kao ozbiljan problem neusaglašenosti cena širom tržišta, samim tim cene pojedinih aktiva nisu jedinstvene. Zbog čega je prirodno proučavati tržite u kome nema arbitraže i u kome na jedinstven način možemo da odredimo "fer" cenu proizvoljne aktive.*

Lema 5.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi: $u=S^u/S_0$, $d=S^d/S_0$. Tada, kažemo da *binomni model nema arbitražu* ako i samo ako je ispunjen sledeći uslov: $d \leq r + 1 \leq u.$ (5.4)

---

[48] Ova dva skupa uslova za arbitražnu priliku nisu nužno ekvivalentna.

Definicija 5.4.*Finansijski derivat*(*Contingent claim*)[49] proizvoljne osnovne aktive, sa vremenom dospeća T, je $\mathcal{F}_T$-merljiva realna slučajna promenljiva definisana na skupu Ω, sledećeg oblika: $X=F(Z)$, gde je Z proces cena polazne osnovne aktive.

Finansijski derivat X može drugačije da se interpretira i kao standardizovan ugovor koji svom vlasniku isplaćuje prihod X, u trenutku dospeća $t=T$. Funkcija F naziva se *funkcija ugovora* (*contract function*). Tipičan primer finansijskog derivata je *evropska kupovna opcija* koja je izvedena iz akcije kao osnovne aktive.

Definicija 5.5. Neka je model tržišta oblika $\mathcal{M}=(S,B,\Phi)$. Cenu derivata X u trenutku t označićemo sa $\Pi_t(X)$, dok ćemo cenu $\Pi_0(X)$ nazivati proizvodnom cenom derivata X.

Napomena *Najvažniji problem na nekom finansijskom tržištu jeste određivanje "fer" cene derivata (ako ona uopšte postoji za dati derivat). Navedena "fer" cena izračunava se tako što se sve moguće arbitražne prilike koje mogu da nastanu u vezi sa cenom datog derivata izbegavaju. Prema tome, zaključujemo da fer cena datog derivata X u trenutku T mora da bude jednaka vrednosti profita datog derivata u trenutku T, odnosno da bi uspešno izbegli arbitražu mora da važi uslov: $\Pi_T(X)=X$. Sledeće što treba odrediti je cena datog derivata u trenutku $t=0$: $\Pi_0(X)$.*

Definicija 5.6 Za proizvoljni derivat X kaže se da je dostižan (*reachable*) na nekom tržištu $\mathcal{M}=(S,B,\Phi)$, ako postoji portfolio ϕ takav da važi: $V_T(\phi)=X$ sa verovatnoćom jedan. U tom slučaju, kažemo da portfolio ϕ replicira dati derivat X , odnosno da je portfolio ϕ replikacioni portfolio.

Napomena *Ako je određeni derivat X dostižan, odnosno ako postoji portfolio ϕ koji replicira,tada sa finansijske tačke gledišta nema nikakve razlike između posedovanja datog derivata X ili portfolia ϕ, jer šta god da se u međuvremenu dogodi na tržištu, vrednosti derivata$X$ i portfolia ϕ biće jednake u trenutku$T$. Prema tome cena derivata X treba da se poklopi sa tržišnom vrednošću replikacionog portfolia.*

Definicija 5.7 Ako svaki derivat na tržištu može da se replicira kažemo da je tržište *kompletno*[50].

Lema 5.2 Ako pretpostavimo da binomni model nema arbitražu, odnosno ako važi uslov: $d \le r+1 \le u$, onda je binomni model kompletan.

5.3.1 Princip određivanja cena u binomnom modelu

U binomnom modelu određivanje cene se vrši na sledeći nači:

(i) Ako je proizvoljni derivat X dostižan znači da može da se replicira nekim portfoliom ϕ i tada jedini razumni ("fer") proces cene derivata X, mora da ispuni sledeći uslov:

$$\Pi_t(X) = V_t(\phi),\ t = 0, T\,. \tag{5.5}$$

(ii) Ako pretpostavimo da je derivat X dostižan, tj. da postoji portfolio ϕ koji ga replicira, tada važi sledeće tvrđenje: Ako u početnom trenutku $t=0$, za cenu derivata X uzmemo bilo koju drugu vrednost različitu od $V_0(\phi)$, onda sigurno dobijamo arbitražnu priliku. Drugim rečima, da bi izbegli arbitražnu priliku mora da bude ispunjen uslov:

$$\Pi_0(X)= V_0(\phi). \tag{5.6}$$

Definicija 5.8. Proizvodna cena $\Pi_0(X)$ derivata X, izvedena pod pretpostavkom da u tržišnom modelu $\mathcal{M}$ nema arbitraže, naziva se *arbitražnom cenom* derivata X (*arbitrage free price*).

---

[49] Finansijski derivat drugačije se naziva i *Uslovno pravo na zahtev.*

[50] Navedena osobina kompletnosti tržišta se poklapa sa definicijom kompletnosti metričkog prostora koja je data u *definiciji 8.15 u priloguA.*

Napomena *S obzirom, da na realnom tržištu postoji mogućnost da se pojavi arbitražna prilika, možemo da kažemo da je arbitražna cena izvedena u "savršenim uslovima" tržišta, odnosno u uslovima koji nisu stvarni, jer su mnoge realne okolnosti zanemarene. Zbog toga se do arbitražne cene nekog proizvoda na finansijskom tržištu dolazi, pre posredstvom tzv. arbitražera, nego racionalnim i logičnim investicionim odlukama svih učesnika na tržištu.*
Arbitražeri svojom pojavom i delovanjem na tržištu usaglašavaju subjektivne cene kupaca i prodavaca nekog proizvoda i dovode do pojave jedinstvene cene datog proizvoda, koju smo mi definisali kao arbitražnu cenu ("fer" cenu). Prema tome, nama je u interesu da arbitražnu cenu definišemo kao vrednost koja isključuje sve moguće arbitražne prilike, koje mogu da nastanu prilikom repliciranja proizvoljnog derivata X.

Lema 5.3 Pretpostavimo da u tržišnom modelu $\mathcal{M}=(S,B,\Phi)$ nema arbitraže. Označimo sa H racionalni proces cena proizvoljnog dostižnog derivata X, za koji važi: $H_0 \in R$ i $H_T = X$. Ako sa Φ_H označimo novu klasu svih portfolia koji su dobijeni kao kombinacija akcija, obveznica i novog derivata H, tada *prošireni tržišni model*, u oznaci: (S,B,Φ,Φ_H) nema arbitražu ako i samo ako važi: $H_0 = \Pi_0(X)$.

Napomena *Pokazuje se da je repliciranje portfolia najoptimalniji način kontrole rizika (hedging).*

5.3.2 Princip određivanja cena u binomnom modelu (postupkom replikacije portfolia)

Sada ćemo razmotriti kada za neodređen (proizvoljan) derivat X sa vremenom dospeća T postoji replikacioni portfolio u binomnom modelu $\mathcal{M}$ i ako postoji da li je jedinstven u datom modelu. Neka je dati derivat X oblika:

$$X(\omega) = \begin{cases} X^u, \ ako \ je \ \omega = \omega_1, \\ X^d, \ ako \ je \ \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Tada, na osnovu *I.principa određivanja cena* (5.5), dobijamo replikacioni portfolio $\phi=(\alpha,\beta)$ iz sistema linearnih jednačina oblika[51]:

$$\begin{cases} \alpha_0 S^u + \beta_0(1+r) = X^u, \\ \alpha_0 S^d + \beta_0(1+r) = X^d, \end{cases} \tag{5.7}$$

Iz ovog sistema jednačina dobijamo jedinstveno rešenje za α_0 i β_0:

$$\alpha_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d}, \ \beta_0 = \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1+r)(S^u - S^d)}$$, za neodređene vrednosti X^u i X^d.

Prema ref. [12], ako sistem linearnih jednačina ima jedinstveno rešenje, tada za neodređeni derivat X postoji jedinstveni replikacioni portfolio i na osnovu *II.principa određivanja cena* (5.6) postoji i jedinstvena proizvodna cena na tržištu $\mathcal{M}$ koja je sledećeg oblika:

$$\Pi_0(X) \overset{def}{=} V_0(\phi) = \alpha_0 S_0 + \beta_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d} S_0 + \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1+r)(S^u - S^d)}. \tag{5.8}$$

[51] Budući da se model sastoji iz dva stanja ω_1 i ω_2, zaključujemo da se i sistem jednačina sastoji iz dve jednačine.

Napomena *Generalno, proizvodna cena strogo pozitivnog derivata X može da bude i negativna u konstruisanom modelu.U tom slučaju na tržištu postoji profitabilna nerizična trgovinska strategija, tzv. arbitražna mogućnost, koja se sastoji iz akcije i nerizičnog davanja i uzimanja kredita. Da bi eliminisali takve ''nepovoljne situacije'', tj. arbitražne mogućnosti koje su protivrečne sa racionalnom predstavom tržišta, moraćemo da u naš prosti model tržišta uvedemo još neka dodatna ograničenja.*

5.3.3 Princip određivanja cena u binomnom modelu (postupkom određivanja Martingalske mere)

Objasnili smo postupak za određivanje cene proizvoljnog derivata u binomnom modelu, postupkom repliciranja. Međutim, postoji i drugi postupak kojim se određivanje "fer" cene svodi na određivanje nove mere verovatnoće P^*, koja je ekvivalentna stvarnoj meri P. Jednostavnim sređivanjem sistema jednačina (5.7) dobija se linearna jednačina, koja je poznata pod engleskim nazivom *Risk-neutral valuation (pricing) formula* i glasi:

$$S_0 = (1+r)^{-1}(p_* S^u + (1-p_*)S^d)\,. \tag{5.9}$$

gde su p_* i $(1–p_*)$ nenegativni brojevi koji u zbiru daju jedan (dobijaju se rešavajući jednačinu (5.9) po nepoznatoj p_*). Možemo da ih tumačimo kao verovatnoće događaja ω_1 i ω_2 u odnosu na novu meru verovatnoće P^* i iznose:

$$p_* = P^*\{\omega_1\} = \frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d} \quad \text{i} \quad (1-p_*) = P^*\{\omega_2\} = \frac{S^u - (1+r)S_0}{S^u - S^d}\,.$$

Definicija 5.9. Nova mera verovatnoće P^* naziva se *martingalska mera (mera sa neutralnim rizikom)* ukoliko važi sledeći uslov:

$$S_0 = \frac{1}{(1+r)}\mathrm{E}_{P^*}\left[S_T\right] = \mathrm{E}_{P^*}\left[(1+r)^{-1}S_T\right]\text{[52]}. \tag{5.10}$$

Dalje, definišimo diskontovani proces cena akcija S^* pomoću sledećih izraza[53] :

$$S_0^* = S_0, \quad S_T^* = (1+r)^{-1}S_T\,. \tag{5.11}$$

Na osnovu navedenog izraza za diskontovani proces cena sledi da se formula (5.10) može zapisati kao martingalski identitet koji je oblika:

$$S_0^* = \mathrm{E}_{P^*}[S_T^*]\,, \tag{5.12}$$

Dakle, možemo da zaključujemo da je diskontovani proces cena akcija S^* *martinglaski proces u odnosu na novu meru verovatnoće P^**, odnosno da je diskontovani proces cena akcija *P^*-martingal*. Prema tome, za meru verovatnoće P^* možemo da koristimo naziv *martingalska mera diskontovanog procesa S^**. Navedeni metod za izračunavanje cena derivata naziva se *martingalski metod* i on se zasniva ujedno i na martingalskim procesima i na određivanju odgovarajuće martingalske mere.

Martingalski procesi mogu intuitivno da se predstave kao verovatnosni model "Fer igre". To znači da diskontovani proces S^* može da se protumači kao model za ''fer igru'', ali u *ekonomiji sa neutralnim rizikom* (*risk-neutral economy*) u kojoj su verovatnoće budućih fluktuacija cena određene baš martingalskom merom P^*. Zbog toga se mera P^* drugačije naziva i *verovatnoća neutralnog rizika (risk neutral probability)*.

---

52 Formula (5.10) je ekvivalentan zapis formule (5.9).

53 Diskontovani proces cena akcija može da se protumači kao model diskontovanja cene akcija.

Lema 5.4. Diskretni tržišni model nema arbitražu akko postoji ekvivalentna martingalska mera P^*.

Lema 5.5. Neka binomni model $\mathcal{M}=(S,B,\Phi)$ nema arbitražu. Tada se arbitražna cena u početnom trenutku, proizvoljnog derivata X sa vremenom dospeća T, dobija iz formule (5.9):

$$\Pi_0(X) = V_0 = (1+r)^{-1}(p_* X^u + (1-p_*)X^d),$$

ili iz njenog ekvivalentnog oblika:

$$\Pi_0(X) = \frac{1}{(1+r)} \mathrm{E}_{P^*}\left[X\right] = \mathrm{E}_{P^*}\left[(1+r)^{-1} X\right]. \tag{5.13}$$

Martingalsku meru p^* određujemo na jedinstven način iz sledeće formule: $S_0 = \dfrac{1}{(1+r)} \mathrm{E}_{P^*}\left[S_T\right].$ (5.13a)

Napomena *Prema tome, ako je uslov odsustva arbitraže u nekom tržišnom modelu zadovoljen, tada sigurno postoji martingalska mera i prema tome moguće je odrediti proizvodnu cenu derivata X. Međutim, može da se desi da postoji više različitih i ekvivalentnih martingalskih mera. Osobina kompletnosti tržišta nam obezbeđuje jedinstvenu martingalsku meru, odnosno jedinstvenu cenu zadatog potraživanja (claim) X.*

Intuitivno je jasno da subjektivna i stvarna verovatnoća ne treba da utiče na određivanje cene opcije, tj. ne bi trebalo da individualne procene, odnosno prognoziranja verovatnoća mogućih događaja na tržištu (npr. pad i rast cena neke aktive) utiču na određivanje cene nekog derivata. Potrebna nam je neka "zajednička formula" za izračunavanje cena derivata na tržištu, koja bi važila za sve investitore, bez obzira na njihov subjektivni stav prema riziku, a to je baš *Risk-neutral pricing formula*.

Prema tome, izračunavanja "fer" cene finansijskog derivata, koja ne predstavlja arbitražnu priliku izvodimo kao da stvarno trgujemo na tržištu bez rizika (risk-neutral market) i za ta izračunavanja koristimo navedeni martingalski metod i risk-neutral pricing formulu. Pri tome, ne podrazumevamo stvarno da je realna svetska ekonomija isto što i ekonomija sa neutralnim rizikom, već nam ekonomija sa neutralnim rizikom služi više kao alat za jednostavnija izračunavanja cena finansijskih instrumenata.

Osnovna ideja određivanja cene nekog derivata zasnovana je isključivo na postojanju (egzistenciji) portfolia koji savršeno štiti investitora od izloženosti riziku (tzv. replikacionog portfolia)[54], gde se rizik javlja usled neodređenosti budućih cena raznih finansijskih instrumenata na tržištu. Na osnovu toga, zaključujemo da konkretne vrednosti verovatnoća elementarnih događaja nisu od tolikog značaja za određivanje cene proizvoljnog derivata, koliko je važnije odrediti samu strukturu stvarne verovatnoće P, a ne napraviti konkretan izbor verovatnoće iz skupa uzajamno ekvivalentnih mera verovatnoće.

U praksi, odnosno u ekonomskoj terminologiji ovo se objašnjava kao činjenica da se svi investirori (kao i ostali učesnici na tržištu) slažu u vezi oblika i opsega budućih fluktuacija cena osnovnih finansijskih instrumenata, ali mogu da imaju različite individualne procene verovatnoća finansijskih instrumenata na tržištu tj. različite subjektivne verovatnoće.

Prema [12] najvažnija uloga u postupku određivanja cena koju ima stvarna (realna) veorvatnoća jeste u samom određivanju strukture stvarne verovatnosne mere P, odnosno u utvrđivanju koji su događaji u skupu ishoda mogući a koji nemogući.Matematički rečeno, na osnovu njih se utvrđuju klase ekvivalentnih verovatnosnih mera.

54 Portfolio koji štiti investitora od rizika naziva se hedž porfolio (*hedge portfolio*), što u bukvalnom prevodu znači kontrolu rizika.

5.4 Složeni modeli tržišta

5.4.1 Diskretni modeli tržišta

Za detaljan uvid u složenije diskretne i neprekidne modele koji se koriste za opisivanje tržišta pogledati reference [3], [12] i [20]. Uopšteniji model od binomnog jeste jednoperiodni model, koji sadrži N osnovnih aktiva (S_1,S_2...,S_N), pri čemu se pretpostavlja da skupu osnovnih aktiva pripada i jedna obveznica: B=S_1. Slično kao što smo određivali početnu tj. proizvodnu cenu nekog derivata u binomnom modelu, tako nam je i u datom jednoperiodnom modelu od interesa da odredimo fer, odnosno arbitražnu proizvodnu cenu proizvoljnog derivata X. Drugim rečima, želimo da odredimo proizvodnu cenu derivata X, koja je u skladu sa skupom osnovnih aktiva (S_1,S_2...,S_N), ali tako da arbitražne prilike ne postoji ni u polaznom ni u proširenom modelu tržišta, koji je oblika: (S_1,S_2...,S_N, Π), gde je Π replikacioni proces datog derivata, ref. [3]. Ovaj problem se rešava slično kao i u binomnom modelu, korišćenjem sledeće leme:

Lema 5.6. Prošireni tržišni model (S_1,S_2...,S_N, Π) nema arbitražu akko postoji martingalska mera p* takva da važe sledeći izrazi:

$$\Pi_0(X) = \frac{1}{(1+r)} \mathrm{E}_{P*}[\Pi_1(X)], \quad S_0 = \frac{1}{(1+r)} \mathrm{E}_{P*}[S_1]. \tag{5.14}$$

Na osnovu date leme, možemo da se zapitamo šta se dešava ako na tržištu postoji više različitih martingalskih mera? Da li i tom slučaju na tržištu nema arbitraže?

Odgovor je sledeći: Ako postoji jedna martingalska mera, tada će prema prethodnoj *lemi*, za datu meru p*, svi replikacioni i samofinansirajući portfolii datog derivata X imati iste vrednosti u svakom trenutku t. Štaviše, ova zajednička vrednost cene derivata X je ista i za različite izbore ekvivalentnih martingalskih mera, ukoliko postoji više različitih martingalskih mera, odnosno ako je tržište nekompletno. To znači da oni derivati koji mogu da se repliciraju će čak i u nekompletnim tržištima imati jedinstvenu cenu u svakom trenutku, odnosno njihova cena neće zavisiti od izbora martingalske mere, ref. [3]. Prema tome, sledeća jednakost važiće za sve martingalske mere p* i za sve replikacione portfolie:

$$\Pi_0(X) = \frac{1}{(1+r)} \mathrm{E}_{P*}[X].$$

Dakle, ako postoji više različitih ekvivalentnih martingalskih mera, tada oni derivati koji mogu da se repliciraju ne predstavljaju arbitražne prilike. Ova pojava postojanja više različitih martingalskih mera je posledica nedostatka kompletnosti tržišta, što je navedeno u napomeni na *72. strani*.

Prema *definiciji 5.7* važi da je tržište kompletno ako svaki derivat na tržištu može da se replicira, što u datom jednoperiodnom modelu matematički može da se opiše na sledeći način. Tržište je kompletno ako i samo ako prostor linearnih kombinacija osnovnih aktiva obuhvata prostor svih mogućih ishoda. Na osnovu navedenog stava, *leme 5.6*, kao i *definicije 5.7* možemo da izdvojimo dve osnovne teoreme finansijske matematike, koje važe, kako u proizvoljnim diskretnim modelima tržišta, tako i u neprekidnim modelima tržišta, ali u malo izmenjenom obliku. Date teroreme glase:

Teorema 5.1 *(I fundamentalna teorema)*. Diskretan model finansijskog tržišta nema arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalska mera. Data mera ne mora da bude jedinstvena.

Teorema 5.2 *(II fundamentalna teorema)*. Za diskretan model, u kome se pretpostavlja da nema arbitraže, kaže se da je kompletan ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalska mera.

Sledeći, malo složeniji diskretan model jeste višeperiodni model, koji kao i binomni model sadrži dve aktive, akciju i obveznicu kao predstavnike skupa osnovnih aktiva. Za razliku od binomnog dati model sadrži više vremenskih perioda. Prisetimo se da u kompletnim tržištima, kao što je to binomni model postoji jedinstvena cena za svaki izvedeni derivat, pri čemu je ta cena određena vrednošću replikacionog portfolia. Dalje, primetimo da je osnovni razlog za kompletnost binomnog modela činjenica da postoje tačno dva osnovna (*underlying*) finansijska instrumenta (B i S), koji se koriste pri rešavanju sistema od dve jednačine, pri čemu svaka od jednačina predstavlja krajnji mogući ishod u datom prostoru ishoda. Ovo možemo da generalizujemo stavom da je model kompletan ako se broj osnovnih aktiva, uključujući i bankovni račun, poklapa sa brojem ishoda u datom prostoru. Imajući ovaj stav u vidu, postupak konstrukcije višeperiodnog modela tržišta deluje prilično obeshrabrujuće. Na primer, ukoliko bi želeli da naš višeperiodni model poseduje 20 vremenskih perioda i dve osnovne aktive, sledi da u tom slučaju prostor ishoda sadrži oko 2^{20} ~10^6 elemenata ishoda, što uveliko prevazilazi broj svih mogućih aktiva na bilo kojem postojećem tržištu. To bi značilo da je nemoguće konstruisati kompletan model sa dovoljno velikim brojem vremenskih perioda, što naravno nije istina. Situacija ipak nije toliko loša, jer ćemu u novom višeperiodnom modelu malo oslabiti uslove binomnog modela i dozvoliti da portfolio ima mogućnost ''rebelansiranja'' u vremenu, ref. [3]. Navedeni postupak pruža mnogo više stepeni slobode portfolia. Takav portfolio nazivaćemo ''*samofinansirajućim''* portfoliom i on je prisutan kod višeperiodnih diskretnih i neprekidnih tržišta. Podrazumeva se da na početku perioda t investitor poseduje portfolio iz prethodnog perioda $[t\text{-}\Delta t,t)$, odnosno da se vrednost portfolia na početku perioda t dobija kada se proda stari portfolio, iz perioda $[t\text{-}\Delta t,t)$ po trenutnim cenama. Nakon prodaje ili kratke prodaje aktiva dobijeni fiktivni novac može da se reinvestira u novi portfolio.O novom portfoliu se odlučuje tek nakon posmatranja cene aktiva u datom trenutku t i na osnovu informacija koje investitor poseduje iz prethodnog peroda $[t\text{-}\Delta t,\ t)$. S obzirom na to da se radi o diskretnom modelu možemo da kažemo da je Δt =1.

Definicija 5.9 *(Samofinansirajući portfolio)*. Portfolio se naziva *samofinansirajućim*, ako u svakom trenutku počev od njegovog formiranja pa nadalje, nema nikakvih dodatnih ulaganja niti povlačenja novca iz njegovih fondova[55]. Drugim rečima, sve promene u vrednosti datog portfolia jesu posledica dobitaka ili gubitaka realizovanih investicijama ulaganih iz sredstava samog porfolia, [9].

Neka je skup osnovnih aktiva datog višeperiodnog diskretnog modela jednak uređenom paru: (S,B) i neka je portfolio oblika $\phi=(\alpha,\beta)$, gde α,β redom označavaju broj akcija i broj obveznica. Tada za dati portfolio kažemo da je samofinansirajući ako važe sledeće jednakosti:

$$V_t = V_0 + \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \Delta S_i + \beta_i \Delta B_i \text{ , odnosno} \tag{5.15}$$

$$\alpha_{t-\Delta t} S_{t-\Delta t} + \beta_{t-\Delta t} B_{t-\Delta t} = \alpha_t S_{t-\Delta t} + \beta_t B_{t-\Delta t}$$

pri čemu važi da ΔS predstavlja razliku trenutne (sadašnje) cene i cene u prethodnom trenutku:$\Delta S=S(t)-S(t-\Delta t)$, odnosno u diskretnom modelu: $\Delta S=S(t_n)-S(t_{n-1})$.

Navedeni višeperiodni model sa dvočlanim skupom osnovnih aktiva predstavlja polaznu osnovu za konstrukciju neprekidnog modela. Neprekidni model finansijskog tržišta dobija se kada primenimo limes na jednačinu (5.15) kada $\Delta t\to 0$, odnosno ako se pretpostavi da je period između dva uzastopna vremenska trenutka infinitezimalno mali. Prilikom prelaska sa diskretnog na neprekidni model treba imati u vidu način na koji je definisan Itoov integral. Prisetimo se da su inkrementi Braunovog kretanja i Itoovom integralu oblika: $W(t_{n+1})-W(t_n)$, odnosno da su oni neprekidni sa desne strane (razlike su postavljene ''unapred''), dok su

55 Prema tome, kupovina novih aktiva u datom portfoliu se finansira prodajom starih.

inkrementi procesa cena akcija S u jednačini (5.15) neprekidni sa leva (razlike su postavljene "unazad"). Prema tome, treba voditi računa prilikom ovog postupka, [3].

U ovom odeljku počeli smo sa jednoperiodnom modelom, koji je imao proširen skup osnovnih aktiva i nastavili sa višeperiodnim modelom koji je imao elementaran skup osnovnih aktiva. Na kraju, navodimo da se "objedinjavanjem" ova dva modela može formirati složeniji diskretni višeperiodni model tržišta, koji se sastoji iz većeg broja različitih aktiva. To mogu da budu razni tipovi akcija i obveznica sa različitim datumima dospeća, kao i razne vrste finansijskih derivata. Pretpostavlja se da ovaj višeperiodni model sadrži N osnovnih aktiva oblika: $(S_1,S_2...,S_N)$, gde važi B=S_1. Ovaj model je daleko uopšteniji u odnosu na prethodna dva i najpribližnije opisuje stanje realnog tržišta. U datom modelu portfolio se predstavlja proizvoljnim adaptiranim N-dimenzionalnim procesom. Obično se pretpostavlja da je porfolio Markovski proces, odnosno da zavisi od svoje prošlosti isključivo preko sadašnje vrednosti cene, dok se u generalnom slučaju dopušta i da portfolio zavisi od čitave trajektorije cene iz prošlosti.

Napominjemo da se i iz ovog modela, ukoliko pustimo da vremenski interval $\Delta t\to 0$, dobija neprekidan model finansijskog tržišta.

5.4.2 Neprekidni modeli tržišta

U prethodnom poglavlju ukratko smo objasnili postupak prelaska sa diskretnog na neprekidan model finansijskog tržišta koji sadrži dve osnovne aktive. S obzirom na to da je postupak isti i kada model sadrži veći broj osnovnih aktiva, pretpostavićemo ubuduće da dati neprekidan model poseduje dve osnovne aktive S i B. Neprekidan model tržišta pogledati u refrencama [3], [9], [12] i [20], s tim što je u referenci [3] kompletno opisan.

Iako u neprekidnom modelu postoje različite verzije koncepta tržišta bez arbitraže, osnovno značenje ostaje isto kao i u diskretnom modelu, a to je da je nemoguće napraviti profit ni iz čega bez preuzimanja nekog rizika. Osnovna razlika između ova dva modela jeste pre svega u tome sto se umesto konačnih nizova slučajnih promenljivih, kretanje cena finansijskih instrumenata opisuje slučajnim procesima neprekidnim u vremenu. Takođe se pretpostavlja da su procesi cena Markovski, odnosno da zavise od prošlosti isključivo preko trenutne (sadašnje) vrednosti cene.

Ako pretpostavimo kao i u konačnom modelu, da je portfolio oblika $\phi=(\alpha,\beta)$, gde su α,β redom broj akcija i broj obveznica koje investitor poseduje u proizvoljnom trenutku t, tada se tržišna vrednost portfolia u tom trenutku određuje prema formuli: $V_t=\alpha_t\, S_t+\beta_t\, B_t$, dok se promena vrednosti portfolia u zavisnosti od priraštaja cena aktiva u vremenskom periodu Δt, određuje prema formuli: $dV_t = \alpha_t\, dS_t+\beta_t\, dB_t$. Prema tome, u neprekidnom modelu portfolio oblika $\phi=(\alpha,\beta)$, $0\le t \le T$, nazivamo samofinansirajućim ukoliko je promena vrednosti portfolia isključivo posledica promene cene aktiva koje portfolio sarži i kada pustimo da $\Delta t\to 0$ u jednačini (5.15) dobijamo izraz za vrednost portfolia u trenutku t u integralnom obliku:

$$V(t)=V(0)+\int_0^t \alpha_u dS_u + \int_0^t \beta_u dB_u \,. \tag{5.16}$$

Podrazumeva se da su procesi koji opisuju cenu aktiva S_t i B_t semiratingalski procesi, dok su α_t i β_t predvidljivi procesi, koji moraju da zadovolje određene uslove egzistencije i definisanosti stohastičkih integrala. Napominjemo da prvi integral nije Itoov integral nego stohastički interal kome je integrator semiratingalski proces.

Dalje, u nastavku objasnićemo značenje pojma volatilnosti, s tim što postoji više različitih načina interpretacije ovog pojma, u zavisnosti od modela tržišta u kojem se volatilnost opisuje. Sa ekonomske tačke gledišta, volatilnost predstavlja meru promenljivosti, odnosno nestabilnosti finansijskog tržišta, odnosno meru rizika, pogledati definiciju na *strani 64*. Dakle, u ekonomskoj literaturi volatilnost se definiše kao varijansa od obrta (stope prinosa) logaritma cene, što se poklapa sa navedenim opisom volatilnosti. Ova definicija volatilnosti odgovara Blek-Šolsovom modelu finansijskog tržišta, u kome se pretpostavlja da je volatilnost konstantna u određenom vremenskom periodu, [20]. Međutim, postoji uopšteniji koncept ovog pojma, koji podrazumeva da je i sama volatilnost funkcija dodatnih izvora slučajnosti. Takvi modeli tržišta se nazivaju modeli se *stohastičkom volatilnošću*.

Prema tome, u modelima finasijskih tržišta u kojima se proizvoljni merljivi ekonomski podaci opisuju, odnosno modeliraju semimartingalskim procesima, kao što je to prethodno opisan model, dopušta se da varijansa bude slučajna funkcija. Podsetimo se da semimartingalske procese opisujemo Itoovim stohastičkim diferencijalom oblika: $dS(t,\omega)=\alpha(t,\omega)dt+\beta(t,\omega)dB_t$, gde je B_t Braunovo kretanje.Dakle, u navedenim modelima stohastičke volatilnosti, volatilnost definišemo formulom: $V_t(t,\omega)=\beta^2(t,\omega)$, odnosno kao: $V_t = \beta_t^2$.Da budemo precizniji, volatilnost definisanu na ovaj način nazivaćemo i *trenutnom volatilnošću*.

Osnovne teoreme finansijskih tržišta u neprekidnom modelu i dalje važe ali su delimično izmenjene, što je delom i posledica činjenice da se cena aktiva u ovom modelu opisuje semimartingalskim procesima.

Teorema 5.3 *(I fundamentalna teorema)*. Ako u neprekidnom modelu finansijskog tržišta postoji ekvivalentna martingalska mera onda dati model nema arbitražu[56]. Obrnuta implikacija u neprekidnom modelu važiće samo pod dodatnim uslovima.

Teorema 5.4 *(II fundamentalna teorema)*. Neprekidan model tržišta je kompletan ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalska mera u kojoj je proces S_t/B_t martingal.

[56] Primetimo da, u slučaju neprekidnog modela tržišta, implikacija prve fundamentalne teoreme više ne važi u oba pravca, već samo u jednom.

6. Određivanje integrisane volatilnosti iz gustog skupa finansijskih podataka u prisustvu šuma

U ovom poglavlju bavićemo se analizom rada autora Sahalia, Zeng i Mikland (*Sahalia, Zhang and Mykland*) (2005) [1]. U navedenom radu objašnjavaju se postupci za računanje integrisane volatilnosti (IV) finansijskih podataka visokih učestanosti i predlaže se nov način ocenjivanja datog parametra. Navešćemo teorijske rezultate za svaku ocenu ponaosob i predložiti postupak za simulaciju i proveru navedenih teorijskih rezultata.

U analizi finansijskih podataka visokih učestanosti najveći problem predstavlja neparametarsko određivanje volatilnosti povratnog procesa cena. Uobičajena praksa u finansijama je da se procena volatilnosti izračunava iz sume gusto uzorkovanih kvadratnih obrta (stopa prinosa)[57] nekog procesa. Ovaj način ocene volatilnosti je opravdan, pod pretpostavkom da se radi o neprekidnom stohastičkom modelu u idealizovanom svetu. Međutim, u praktičnim primenama ovaj metod nailazi na realan problem"tržišne mikrostrukture". U radu [1] je pokazano da je ovakav ustaljen metod procene volatilnosti pogrešan, jer previđa grešku. Uobičajen postupak koji se koristi u praksi da bi se prevazišao ovaj problem jeste da se veliki deo raspoloživih (dostupnih) podataka odbaci. Odbacivanje se sprovodi tako što se uzorkovanje podataka vrši u manjim vremenskim intervalima.

Objasnimo ovaj problem na sledećem modelu. Neka je S_t proces cena proizvoljne aktive na tržištu i neka je X_t logaritamski proces cena te aktive, odnosno proces oblika:X_t=logS_t. Za početak, pretpostavimo da je X_t Itoov proces sa Braunovim kretanjem B_t, koeficijentom drifta μ_t i trenutnom varijansom $\sigma_t{}^2$, tj. posmatraćemo model sledećeg oblika:

$$dX_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dB_t\,, \tag{6.1}$$

Zanima nas da procenimo parametar integrisane (kumulativne) volatilnosti, u oznaci $\langle X,X\rangle_T$, iz skupa podataka koji predstavljaju cenu posmatrane aktive, koja je opisana modelom (6.1). Parametar integrisane volatilnosti se obično posmatra duž jednog vremenskog perioda i u tom slučaju se računa prema formuli: $\langle X,X\rangle_T = \int_0^T \sigma_t{}^2 dt$, ali može da se posmatra i duž više uzastopnih vremenskih perioda.

---

[57] Pojam obrta (stope prinosa) proizvoljnog procesa definisan je u *primeru 4.4*, *izrazom (4.18)*.

Primetimo da je navedena formula za integrisanu volatilnost isto što i izraz za neprekidnu kvadratnu varijaciju Itoovog procesa *(teorema 3.10; izraz (3.31))*. Prema tome, prirodan način da se izvrši ocena integrisane volatilnosti duž proizvoljnog vremenskog intervala $[0,T]$ je da se za ocenu (estimator) koristi sledeći izraz:

$$[X,X]_T := \sum_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 , \tag{6.2}$$

gde $X_{t\,i}$ predstavlja sve posmatrane vrednosti logaritamskog procesa cena na intervalu $[0,T]$. Navedena ocena integrisane volatilnosti se najčešće koristi u praksi i poznata je pod nazivom *"Realizovana volatilnost"*, odnosno *"Realizovana varijansa"*. Na osnovu teoreme o kvadratnoj varijaciji Itoovog procesa *(teorema 3.10)*, sledi da je aproksimacija (6.2) teorijski opravdana[58] ako je proces čija se integrisana volatilnost računa baš Itoov proces, jer je za njega poznato da važi sledeća konvergencija:

$$\lim \sum_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \overset{p}{=} \int_0^T \sigma_t^2 \, dt . \tag{6.3}$$

Međutim, u praksi nije moguće direktno primeniti idealizovani model Itoovog procesa (6.1) kao model za kretanje cena na tržištu, jer se na realnom tržištu javljaju razni problemi, koji su u teoriji zanemareni. Sve pojave koje se tiču načina rada i same organizacije tržišta zavedene su pod zajedničkim nazivom *tržišna mikrostruktura*. Tu se podrazumevaju pojave kao što su: razlika u kupovnoj i prodajnoj ceni *(bid ask spread)*, transakcijski troškovi, provizije, likvidnost, kao i razne druge realne pojave na tržištu. Da bi konvergencija (6.3) realizovane volatilnosti (RV) važila, posmatrani proces čiji se podaci uzorkuju mora da bude Itoov proces. S obzirom na to da na realnom tržištu navedeni uslovi nisu ispunjeni, može da se očekuje da u praksi dolazi do velikih odstupanja ocene RV. Objasnimo ovaj fenomen sa stanovišta teorije slučajnih procesa. Budući da u realnim uslovima posmatrani logaritam procesa cena nije semimartingal kao što smo pretpostavili u modelu (6.1), sledi i da ocena, odnosno estimator RV ne konvergira ka integrisanoj volatilnosti sa povećavanjem frekvencije uzorkovanja, kao u što je to slučaj u jednačini (6.3).

Empirijski je potvrđeno da ocena (RV) nije stabilna kada se uzorkovanje cena vrši češće, odnosno ukoliko se uzorkovanje vrši u kraćim vremenskim intervalima. U tom slučaju, mikrostrukturni problemi postaju sve izraženiji i utiču na to da i najfinije uzorkovani podaci postaju beskorisni. Pojava velikih odstupanja u proceni volatilnosti, kao i pojava nestabilnosti estimatora usled promene dužina intervala uzorkovanja, su posledice koje jedan stabilan estimator ne bi trebao da poseduje. Upravo ovakve pojave su razlog, u praksi zastupljenog običaja da uzorkovanje povratnog procesa X_t ne treba vršiti često. Ovakav postupak "proređenog uzorkovanja" se primenjuje u praksi bez obzira na to što se vrednosti pojedinih procesa mogu očitavati sa veoma visokom frekvencijom, koja u pojedinim slučajevima može da bude čak i nekoliko puta u sekundi. Dužina uzorkovanja u praksi može da bude proizvoljna. Na primer, za podatke koji opisuju kretanje deviznog kursa (*exchange rate data*), najčešće se uzorkovanje obavlja u proizvoljnom opsegu iz intervala od 5 do 30 min. Konkretno, ako se uzorkovanje polaznih podataka do sada vršilo jednom u svakoj sekundi, tada odlaganje opservacije na svakih 5 min umesto u svakoj sekundi, rezultuje odbacivanjem 299 podataka od svakih 300 podataka.

Ovakav empirijski način obrađivanja podataka je u praktičnom smislu efektan, jer bolje procenjuje parametar volatilnosti, ali zato ne ispunjava neke od osnovnih statističkih principa. U statistici je teško prihvatiti da odbacivanje podatka, pogotovo u tolikoj količini, može da bude optimalno rešenje problema, jer uzorkovanje na većim vremenskim intervalima više smanjuje uticaj mikrostrukturnog šuma, nego što ispravlja njegove loše efekte koji utiču na procenu volatilnosti.

---

[58] Prema *definiciji 8.8.a iz priloga A* sledi da limes π-kvadratne varijacije Itoovog procesa X postoji i da sa povećanjem frekvencije uzorkovanja posmatranih vrednosti procesa X (tj. sa povećenjem broja n) π-kvadratna varijacija konvergira ka integrisanoj volatilnosti. Što znači da se greška ocene "realizovana volatilnost" smanjuje sa povećanjem frekvencije uzorkovanja.

S obzirom da postojeća ocena ima velika odstupanja, u slučaju da uslovi na tržištu odstupaju od modela (6.1), a postupak koji se koristi u praksi ne ispunjava osnovne statističke principe, konstruisaćemo novi statistički aparat sa sledećim svojstvima:

- Da koristi sve moguće podatke dostupne na tržištu.
- Da ne zavisi od promene frekvencije uzorkovanja i da pri tome zadrži osobine koje jedna stabilna ocena (estimator) integrisane volatilnosti treba da poseduje.

Dakle, pretpostavićemo da su posledice koje tržišna mikrostruktura ima na posmatrane podatke, donekle iste kao i posledice koje ima aditivna statistička greška na iste te podatke, odnosno pretpostavićemo da je proces koji se posmatra sledećeg oblika:

$$Y_{t_i} = X_{t_i} + \varepsilon_{t_i} \,, \tag{6.4}$$

gde je X_t *neopservabilni, skriveni* Itoov logaritamski proces cena, koji je perturbovan nezavisnom komponentom šuma ε_{t_i}, a ε_{t_i} je član koji se pojavljuje zbog statističke greške.Napominjemo da je Y_{t_i} stvarni (realni) posmatrani proces, koji se analizira direktno na tržištu.

Prema radu [1] definisaćemo neophodne uvodne pojmove i objasniti postupak konstrukcije nove ocene (estimatora), koju ćemo dalje u tekstu nazivati ''najboljom'' ocenom. Pored najbolje ocene, ukratko ćemo analizirati još četiri ocene integrisane volatilnosti sa slabijim karakteristikama od najbolje. Programskom simulacijom ćemo potvrditi teorijske rezultate u radu [1].

6.1 Analiza ocene realizovane volatilnosti u prisustvu šuma (brza vremenska skala - BVS)

- Postavka problema (definicije i pretpostavke)
- Ocena realizovane volatilnosti
- Proređeno uzorkovanje
- Ukupna greške proređenog uzorkovanja
- Optimalna frekvencija proređenog uzorkovanja

6.1.1 Postavka problema (definicije i pretpostavke)

Neka je$Y$ stvarni logaritamski proces cena, koji se posmatra u trenucima $0=t_0,\ t_1,...,t_n=T$. Na osnovu toga, pretpostavićemo da su u datim vremenskim trenucima, stvarni proces Y i skriveni (neobservabilni) proces X [59], povezani jednačinom (6.4), dok je skriveni proces X dat jednačinom (6.1).

Lema 6.1 *(Pretpostavke za proces šuma).* Pretpostavimo da proces šuma ispunjava sledeće uslove:

(i) Oznaka $\varepsilon_{t\ i}$ predstavlja niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa identičnim raspodelama i sa očekivanjem i varijansom oblika: $E\varepsilon_{t\,i}=0$ i $\mathrm{Var}(\varepsilon_{t\,i})=E(\varepsilon^2)$.

(ii) Veličina ε je nezavisna od procesa X , što se obeležava oznakom: $\varepsilon \perp X$. (6.5)

(iii) Za proces šuma može da važi i dodatni uslov:

$$E(\mathcal{E}_{t_i}{}^4) = E(\mathcal{E}^4) < \infty \text{, za svako } i. \tag{6.6}$$

Uslove (i) i (ii) ćemo dalje u radu koristiti pod brojem (6.5), a uslov (iii) pod brojem (6.6).

Model (6.4) ne zahteva da ε_t postoji u svakom trenutku t zadatog intervala, već samo u trenucima t_i u kojima se proces posmatra.

Definicija 6.1 *(Mreža/Podela). Celokupna mreža (podela)* sadrži sve vremenske trenutke u kojima se data pojava posmatra i njih nazivamo *opservacijskim tačkama*. Mreža *(podela)* $\mathcal{G}$ opisana je skupom: $\mathcal{G}=\{t_1,...,\ t_n\}$, gde svaki vremenski trenutak t_i predstavlja i-tu tačku u celokupnoj mreži $\mathcal{G}$.

Definicija 6.2 *(Podmreža/Potpodela)*. Proizvoljna mreža $\mathcal{H}$ za koju važi relacija $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{G}$, naziva se *podmreža* (*potpodela*) date mreže $\mathcal{G}$. Uzastopni elementi podmreže (potpodele) definišu se na sledeći način: ako je vremenski trenutak $t_i \in \mathcal{H}$, tada sa $t_{i,-}$ označavamo *prethodni element*, dok sa $t_{i,+}$ označavamo *sledeći element* podmreže $\mathcal{H}$; dok trenutak t_i uvek označava i-tu tačku celokupne mreže $\mathcal{G}$.

Napomena *Ako je $\mathcal{H}=\mathcal{G}$, tada važi:$t_{i,-}= t_{i-1}$; $t_{i,+}=t_{i+1}$.Međutim kada je $\mathcal{H}$ prava podmreža mreže $\mathcal{G}$, odnosno kada je $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$, onda važe sledeće nejednakosti: $t_{i,-}<t_{i-1}$; $t_{i,+} >t_{i+1}$.*
Ako sa $|\mathcal{H}|$ označimo broj vremenskih inkremenata oblika $(t_i ,t_{i,+}]$, tako da su obe krajnje tačke intervala sadržane u $\mathcal{H}$. Specijalno, u slučaju kada se posmatra celokupna mreža važila bi jednakost:$|\mathcal{G}|=n$.Broj vremenskih inkremenata u datoj mreži računa se prema formuli: $|\mathcal{H}|=($ # tačaka u mreži $\mathcal{H})-1$.

.

[59] Napominjemo da su procesi X i Y predstavljeni u logaritamskoj skali.

Definicija 6.3 *(Posmatrana kvadratna varijacija). Posmatrana kvadratna varijacija* procesa Z (π-kvadratna varijacija) na proizvoljnoj mreži $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{G}$ (*definicija 8.8a; prilog A*), definiše se izrazom:

$$[Z,Z]_t^{\mathcal{H}} = \sum_{t_j,\, t_{j,+}\in\mathcal{H},\ t_{j,+}\le t} (Z_{t_{j,+}} - Z_{t_j})^2 .$$

Napomena *Kada nije eksplicitno navedena mreža sa kojom radimo, nego se ona podrazumeva iz konteksta, tada umesto oznake $[Z,Z]_t^{\mathcal{H}}$ možemo koristiti oznaku:$[Z,Z]_t$.Prema tome, na celokupnoj mreži $\mathcal{G}$, posmatrana kvadratna varijacija data je sledećom formulom:*

$$[Z,Z]_t^{(all)} = [Z,Z]_t^{\mathcal{G}} = \sum_{t_i,\, t_{i+1}\in G,\ t_{i+1}\le t} (\Delta Z_{t_i})^2,\ \Delta Z_{t_i} = Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} .$$

Kada $n\to\infty$,tada $\mathcal{G}_n$ predstavlja niz mreža oblika: $\mathcal{G}_n = \{t_{0,n}, t_{1,n},..., t_{n,n}\}$ i slično tumačenje važi za podmreže.
Napominjemo da smo oznaku ΔZ_{t_i} koristili u obliku:$\Delta Z_{t_i}=Z_{t_{i+1}}-Z_{t_i}$ (prema konvenciji iz teorije vremenskih serija), što se ne poklapa sa konvencijom iz teorije stohastičkog računa:$\Delta Z_{t_i}= Z_{t_i}-Z_{t_{i-1}}$.

Uslov 6.1 *(Asimptotske pretpostavke).*U budućim asimptotskim razmatranjima, uvek se pretpostavlja da broj opservacija na vremenskom intervalu $[0,T]$ teži beskonačnosti, kao i da maksimalno rastojanje između dve uzastopne vremenske opservacije teži nuli, odnosno važi:

$$\max_i \Delta t_i \to 0,\ \ kada\ n\to\infty . \tag{6.7}$$

Uslov 6.2 *(Pretpostavke o filtraciji).* Za svako p postoji neprekidni višedimenzionalni P-lokalni martingal oblika: $\chi=(\chi^{(1)},...,\chi^{(p)})$, takav da je $\mathcal{F}_t$ najmanje σ-polje koja sadrži: $\sigma(\chi^{(s)}, s\le t)$ i skup $\mathcal{N}$ koji sadrži sve NULL skupove u $\sigma(\chi^{(s)}, s\le T)$. Ovaj uslov označićemo brojem (6.8). Veličina χ možeda bude npr. kolekcija Braunovih kretanja.

6.1.2 Ocena realizovane volatilnosti (RV)

Naš osnovni cilj je određivanje ili približno određivanje integrisane volatilnosti skrivenog procesa X, iz skupa podataka koji su dobijeni opservacijom procesa cena u vremenskom periodu $[0,T]$. Do sa sada smo procenu integrisane volatilnosti obavljali pomoću ocene realizovane volatilnosti (RV), za koju se ispostavilo da pravi velika odstupanja. Prema tome, prvo bi trebalo da se utvrdi koliko dobro ili loše ocena (estimator) realizovane volatilnosti oblika: $[Y,Y]_t^{(all)}$ aproksimira integrisanu volatilnost skrivenog procesa X, oblika: $\langle X,X\rangle_t$, kao i da se proceni kolika je greška te ocene. Dakle, počećemo od ocene realizovane volatilnosti $[Y,Y]_T^{(all)}$, za koju se u radu [1] koriste i nazivi ''najgora'', odnosno ''peta'' ocena.
Napominjemo da prilikom izračunavanja ocene realizovane volatilnosti koristimo sve dostupne podatke sa tržišta.

Teorema 6.1 *(Uslovno očekivanje i varijansa ocene (estimatora) RV, u oznaci $[Y,Y]_T^{(all)}$).*

(i) Ako je ispunjen uslov (6.5), tada se za *uslovno očekivanje ocene $[Y,Y]_T^{(all)}$* dobija izraz:

$$E\left(\left[Y,Y\right]_T^{(all)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) = \left[X,X\right]_T^{(all)} + 2nE(\varepsilon^2) \tag{6.8}$$

(ii) Ako su ispunjeni uslovi (6.5) i (6.6), tada se *uslovna varijansa* dobija iz izraza:

$$Var\left(\left[Y,Y\right]_T^{(all)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) = 4nE(\varepsilon^4) + O_p(1) . \tag{6.9}$$

(iii) Ukoliko je ispunjen malo strože uslov od prethodnih, izraz za uslovnu varijansu dobija oblik:

$$\begin{aligned} &Var\left(\left[Y,Y\right]_T^{(all)} \mid X_t, t\in[0,T]\right) = \\ &= 4nE(\varepsilon^4) + \left(8\left[X,X\right]_T^{(all)}\cdot E(\varepsilon^2) - 2Var(\varepsilon^2)\right) + O_p(n^{-1/2}). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Dokaz:

Sa pretpostavkom da važi model (6.4), realizovanu volatilnost stvarnog posmatranog procesa $Y_{t\,i}$, računamo prema formuli:

$$\left[Y,Y\right]_T^{(all)} = \left[X,X\right]_T^{(all)} + 2\left[X,\varepsilon\right]_T^{(all)} + \left[\varepsilon,\varepsilon\right]_T^{(all)}.$$

Na osnovu uslova (6.5) zaključujemo da sve komponente šuma imaju istu varijansu, odnosno da važi sledeća jednakost: $Var(\varepsilon_{t\,i})=Var(\varepsilon)=E(\varepsilon^2)$. S obzirom na to da je $\varepsilon\perp X$ sledi da za kovarijansu važi: $E[X,\varepsilon]_T^{(all)}=0$. Prema tome, za uslovno očekivanje dobijamo:

$$\begin{aligned}E\left(\left[Y,Y\right]_T^{(all)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) &= E\left(\left[X,X\right]_T^{(all)} + \left[\varepsilon,\varepsilon\right]_T^{(all)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right)\\ &= \left[X,X\right]_T^{(all)} + E\left(\left[\varepsilon,\varepsilon\right]_T^{(all)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right).\end{aligned}$$

Ostaje nam još da izračunamo uslovno očekivanje slučajne promenljive $[\varepsilon,\varepsilon]_T^{(all)}$:

$$\begin{aligned}E\left(\left[\varepsilon,\varepsilon\right]_T^{(all)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) &\overset{\mathbf{1.}}{=} E\left(\sum(\varepsilon_{t_{i+1}}-\varepsilon_{t_i})^2\right) = \sum E(\varepsilon_{t_{i+1}}-\varepsilon_{t_i})^2\\ &= \sum E(\varepsilon_{t_{i+1}}^2+\varepsilon_{t_i}^2-2\varepsilon_{t_{i+1}}\varepsilon_{t_i})\\ &= 2\sum E(\varepsilon^2) = 2nE(\varepsilon^2), \quad gde\ je\ E(2\varepsilon_{t_{i+1}}\varepsilon_{t_i})\overset{\mathbf{2.}}{=}0,\end{aligned}$$

gde smo u *jednakosti 1.* koristili uslov $\varepsilon\perp X$,a u *jednakosti2.*osobinu nezavisnosti komponenata procesa šuma$\varepsilon_{t\,i}$. Prema tome, za uslovno očekivanje dobija se izraz:

$$E\left(\left[Y,Y\right]_T^{(all)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) = \left[X,X\right]_T^{(all)} + 2nE(\varepsilon^2),$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena *Za dovoljno veliko n, članovi $2nE\varepsilon^2$ i $4nE\varepsilon^4$ u jednačinama (6.8) i (6.9), koji potiču od procesa šuma na tržištu postaju sve dominantniji, zbog čega ocena realizovane volatilnosti $[Y,Y]_T^{(all)}$ više ne opisuje varijaciju skrivenog procesa $[X,X]_T^{(all)}$. Drugim rečima, na visokim učestanostima podataka polazna ocena postaje konzistentna (saglasna) ocena varijanse šuma i data je sledećim izrazom:*

$$\widehat{E\varepsilon^2} = (1/2n)\cdot[Y,Y]_T^{(all)}. \qquad (6.11)$$

Prema tome,iz jednačina (6.8) i (6.9) možemo da izvedemo zaključak da ocena realizovane volatilnosti $[Y,Y]_T^{(all)}$ u realnom i diskretnom svetu gde se efekti mikrostrukture tržišta ne mogu zanemariti, nije stabilna, odnosno pouzdana (reliable) ocena varijacije skrivenog procesa $[X,X]_T^{(all)}$. Iz jednačine (6.8) može se dodatno zaključiti da ocena $[Y,Y]_T^{(all)}$ ima pozitivno pomeranje (odstupanje) i amplituda datog odstupanja se linearno povećava sa povećanjem veličine uzorka (tj. sa povećanjem broja n).

Lema 6.2 *(Asimptotsko ponašanje ocene $[Y,Y]_T^{(all)}$).* U slučaju kada $n\to\infty$ ocena $[Y,Y]_T^{(all)}$ je asimptotski normalna, uslovno u odnosu na proces X, jer važi:

$$n^{-1/2}\left(\left[Y,Y\right]_T^{(all)} - 2nE(\varepsilon^2)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} 2\left(E\varepsilon^4\right)^{1/2}\cdot z_{šuma},$$

gde član $z_{šuma}$ predstavlja standardnu normalnu slučajnu promenljivu, dok naziv indeksa ukazuje na to da je slučajnost date promenljive direktna posledica šuma ε, odnosno direktna posledica odstupanja posmatranog procesa Y od skrivenog procesa X.

6.1.3 Proređeno uzorkovanje

U prethodnom odeljku zaključili smo da *realizovana volatilnost procenjuje pogrešnu veličinu* i da se sa češćim, odnosno finijim uzorkovanjem podataka ovaj problem samo pogoršava. Sa finijim uzorkovanjem sakupljenih podataka, razlike između uzastopnih vrednosti stvarnog procesa Y se smanjuju i time podležu većem uticaju amplitude mikrostrukturnog šuma, koja u navedenom postupku ostaje nepromenjena. To znači, da sa većom frekvencijom uzorkovanja posmatrane fluktuacije stvarnog procesa su mnogo više zaprljane mikrostrukturnim šumom i samim tim slabije procenjuju pravu varijaciju $\langle X,X\rangle_t$. Empirijska poruka koja proističe iz navedenog bila je zastupljena mnogo pre nego što je sprovedena formalna analiza datog fenomena i glasila je: *Da prilikom izračunavanja realizovane volatilnosti (RV) uzorkovanje ne treba vršiti sa visokom frekvencijom*. Zbog čega se u literaturi ustalilo mišljenje da postupak uzorkovanja treba da se obavlja *"proređeno"*, odnosno na manjim frekvencijama[60]. Interval uzorkovanja podataka Δ_{sparse}, može da uzima vrednosti iz opsega od [5,30] min.

Ukoliko se insistira na korišćenju metode proređenog uzorkovanja, pokazaćemo postupak kojim se određuje *optimalna frekvencija uzorkovanja* umesto njenog proizvoljnog odabira, kako se preporučuje u literaturi. Ocena RV kojoj odgovara novi interval uzorkovanja $\Delta_{sparse}=T/n_{sparse}$,obeležićemo oznakom: $[Y,Y]_T^{(sparse)}$ i zvaćemo je ocena (estimator) realizovane volatilnosti (RV) proređenog uzorkovanja.

Definicija 6.4 *(Proređeno uzorkovanje ili ocena RV na podmreži $\mathcal{H}$).* Postupak proređenog uzorkovanja jeste uzorkovanje na podmrežama celokupne mreže $\mathcal{G}$. Neka je data podmreža $\mathcal{H}$[61] i neka važi: $|\mathcal{H}|=n_{sparse}$. Tada se nova ocena RV, u oznaci: $[Y,Y]_T^{(sparse)}$, kojoj odgovara novi interval uzorkovanja oblika: $\Delta_{sparse}=T/n_{sparse}$, dobija iz sledeće formule:

$$\left[Y,Y\right]^{(sparse)} = \left[Y,Y\right]^{(\mathcal{H})} = \sum_{t_i,\, t_{i,+}\in\mathcal{H}} (Y_{t_{i,+}} - Y_{t_i})^2 \,. \tag{6.12}$$

Da bismo racionalno obrazložili postupak proređenog uzorkovanja predložićemo asimptotiku gde raspodela šuma ε može da varira sa n i n_{sparse},a da pri tome i dalje ostane NIR[62]. Pretpostavićemo još da su raspodele od ε, u oznaci $\mathcal{L}(\varepsilon)$, elementi skupa $\mathcal{D}$: $\mathcal{L}(\varepsilon)\in\mathcal{D}$. Pri čemu, skup $\mathcal{D}$ predstavlja skup svih raspodela takvih da važi da je: $E(\varepsilon)=0$ i $E(\varepsilon^2),E(\varepsilon^4)/E(\varepsilon^2)^2 < \infty$, odnosno da su elementi $E(\varepsilon^2),E(\varepsilon^4)/E(\varepsilon^2)^2$ ograničeni proizvoljnom konstantom.

Lema 6.3 *(Asimptotsko ponašanje ocene $[Y,Y]^{(sparse)}$).*Pretpostavimo da je X Itoov proces oblika (6.1), gde su koeficijenti $|\mu_t|$ i σ_t ograničeni odozgo konstantom, kao i da za svako n, važi da su procesi X i Y vezani modelom (6.4). Dalje, pretpostavimo da za svako dato n, postoji mreža $\mathcal{H}_n$ i da za svaku takvu mrežu važi da: $n_{sparse}\to\infty$, kada $n\to\infty$, kao i da važi uslov (6.7). Na kraju, pretpostavljamo da važe: uslov (6.5) i uslov: $\mathcal{L}(\varepsilon)\in\mathcal{D}$ [63].Tada je:

$$\begin{aligned}\left[Y,Y\right]_T^{(\mathcal{H})} &= \left[X,X\right]_T^{(\mathcal{H})} + 2n_{sparse}E(\varepsilon^2)\\ &+\left(4n_{sparse}E(\varepsilon^4) + 8\left[X,X\right]_T^{(\mathcal{H})} E(\varepsilon^2) - 2Var(\varepsilon^2)\right)^{1/2} z_{šuma}\\ &+ O_p(n_{sparse}^{-1/4}E(\varepsilon^2)^{1/2}),\end{aligned} \tag{6.13}$$

gde je veličina $z_{šuma}$ asimptotski standardna normalna slučajna promenljiva.

---

60 Uzorkokovanje koje se vrši na manjim frekvencijama od date početne frekvencije drugačije se naziva i *poduzorkovanje*.

61 Uopšteno govoreći, podmreža $\mathcal{H}$ ne mora bude data, već postoji postupak za optimizaciju frekvencije uzorkovanja, kojim se određuje optimalni broj elemenata podmreže, a samim tim se određuje i podmreža.

62 Oznaka *NIR* predstavlja niz identičnih slučajnih promenljivih sa identičnim raspodelama.

63 Kao što mreža $\mathcal{H}_n$ zavisi od n, tako i zakon raspodele $\mathcal{L}(\varepsilon)$ možda zavisi od n, gde je proces X fiksiran.

Napomena *Primetimo da red svih članova u izrazu (6.13) zavisi od veličina n_{sparse} i $E(\varepsilon^2)$i njihovog uzajamnog odnosa. Prema tome, kada je vrednost $E(\varepsilon^2)$relativno mala u odnosu na veličinu n_{sparse}, onda ocena $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})}$ ipak može da se koristi kao dobra zamena za $[X,X]_T^{(\mathcal{H})}$.U slučaju da to nije ispunjeno član, koji opisuje mikrostrukturni šum:$2n_{sparse}\, E(\varepsilon)^2$ postaje dominantan u izrazu (6.13).Takođe, može da se izvede zaključak da je za optimalnu vrednost n_{sparse} najbolje izabrati što manju vrednost. Važno je napomenuti da je ovakav postupak efikasan za smanjivanje uticaja tržišnog šuma, ako se diskretizaciona greška zanemari. Međutim, takav postupak previđa sledeću činjenicu: Da je sa većom vrednošću n_{sparse}, diskretizovana ocena $[X,X]_T^{(\mathcal{H})}$ bliža neprekidnoj integrisanoj volatilnosti $\langle X,X\rangle_T$, odnosno da je greška diskretizovane ocene manja za veće vrednosti n_{sparse}.*

6.1.4 Ukupna greška proređenog uzorkovanja

Naš krajnji cilj je procena integrisane volatilnosti$\langle X,X\rangle_T$, koja predstavlja neprekidnu veličinu. Postupak smo počeli tako što smo iz diskretnog skupa podataka procesa Y procenjivali diskretnu veličinu $[X,X]_T^{(\mathcal{H})}$ i to koristeći ocenu $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})}$. Sledeći korak sastoji se u proceni neprekidne veličine $\langle X,X\rangle_T$ diskretnom $[X,X]_T^{(\mathcal{H})}$, zbog čega se pojavljuje novi tip greske, koju nazivamo *diskretizacionom greškom*.

Kvantitativna vrednost *ukupne greške za ocenu* $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})}$, obuhvata grešku nastalu kao posledica mikrostrukturnog šuma i grešku nastalu diskretizacijom, odnosno dobija se iz sledeće razlike: $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})} - \langle X,X\rangle_T$. Prema tome, ukupnu grešku ocene odredićemo kombinovanjem *lema 6.3* i *6.4*, koje asimptotski opisuju navedene greške.

Lema 6.4 *(Asimptotsko ponašanje diskretizacione greške ocene $[Y,Y]^{(sparse)}$).* Diskretizaciona greška diskretne ocene $[X,X]_T^{(\mathcal{H})}$ javlja se prilikom njene estimacije neprekidnog parametra $\langle X,X\rangle_T$. Asimptotska vrednost date diskretizacione greške, kada $n_{sparse}\to\infty$, dobija se iz izraza:

$$\left(\frac{n_{sparse}}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[X,X\right]_T^{(\mathcal{H})} - \left\langle X,X\right\rangle_T\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\int_0^T 2H'(t)\sigma_t^4\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \times Z_{diskretna}, \tag{6.14}$$

gde član $z_{diskretna}$ predstavlja standardnu Gausovu slučajnu promenljivu, a naziv indeksa ukazuje na to da je slučajnost date promenljive direktna posledica diskretizacionog efekta prilikom procene neprekidnog parametra $\langle X,X\rangle_T$ diskretnom ocenom $[X,X]_T^{(\mathcal{H})}$. Veličinu $H(t)$ opisaćemo u sledećoj definiciji.

Definicija 6.5 *(Kvadratna varijacija vremena).*Veličina $H(t)$ asimptotski teži kvadratnoj varijaciji vremena i data je izrazom:

$$H(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{sparse}}{T} \sum_{t_i,\, t_{i,+}\in\mathcal{H},\, t_{i,+}\le t} (t_{i,+} - t_i)^2\,. \tag{6.15}$$

U slučaju ekvidistantnih opservacija važi: $\Delta t_0=\ldots=\Delta t_{n-1}=\Delta t = T/n_{sparse}$, odakle sledi: $H'(t)=1$.

Lema 6.5 *(Ukupna greška proređenog uzorkovanja).* Ako pretpostavimo da važi uslov (6.8), uslovi *leme 6.3*, kao i sledeća jednakost: $\max_{t_i,\, t_{i,+}\in\mathcal{H}} (t_{i,+}-t_i)=O(1/n_{sparse})$, tada može da se podrazumeva da je veličina $H(t)$ dobro definisana i prema tome izraz za ukupnu grešku dobija se iz formule:

$$\begin{aligned}\left[Y,Y\right]_T^{(\mathcal{H})} &= \left\langle X,X\right\rangle_T + 2n_{sparse}E(\varepsilon^2) + \Upsilon z_{total}\\ &\quad + O_p(n_{sparse}^{-1/4}E(\varepsilon^2)^{1/2}) + O_p(n_{sparse}^{-1/2}),\end{aligned} \tag{6.16}$$

koji je ispunjen u smislu stabilne konvergencije (*stable convergence*).

Veličina z_{total} je asimptotski standardna normalna slučajna promenljiva, a izraz za varijansu Υ je sledećeg oblika:

$$\Upsilon^2 = \underbrace{4n_{sparse}E(\varepsilon^4) + \left(8\left[X,X\right]_T^{(\mathcal{H})} E(\varepsilon^2) - 2Var(\varepsilon^2)\right)}_{\text{član nastao usled šuma}} + \underbrace{\frac{T}{n_{sparse}}\int_0^T 2H'(t)\sigma_t^4\,dt}_{\text{član nastao zbog diskretizacije}}. \tag{6.17}$$

Prema tome, konačni izraz za proređenu ocenu (estimator), u oznaci (6.18) iznosiće:

$$\left[Y,Y\right]_T^{(sparse)} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \left\langle X,X\right\rangle_T + \underbrace{2n_{sparse}E(\varepsilon^2)}_{\text{odstupanje izazvano šumom}} + \left[\overbrace{\underbrace{4n_{sparse}E(\varepsilon^4)}_{\text{član nastao usled šuma}} + \underbrace{\frac{2T}{n_{sparse}}\int_0^T \sigma_t^4\,dt}_{\text{član nastao zbog diskretizacije}}}^{\text{ukupna varijansa}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot z_{total}\,.$$

Napomena *Primetimo da slično kao što je bilo u izrazu (6.13),tako i u izrazu (6.16) red članova zavisi od dveju veličina n_{sparse} i $E(\varepsilon^2)$.Prema tome, kada je vrednost $E(\varepsilon^2)$ relativno mala, može da se koristi ocena proređenog uzorkovanja $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})}$ na podmreži $\mathcal{H}$, kako za procenu diskretne veličine$[X,X]_T^{(\mathcal{H})}$, tako i za procenu neprekidne integrisane volatilnosti$\langle X,X\rangle_T$.*
Dalje, u formuli (6.16) član $2n_{sparse}\,E\varepsilon^2$ predstavlja grešku, odnosno odstupanje ocene $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})}$od procenjivane vrednosti IV i primetimo da se dati član smanjuje sa smanjenjem broja opservacija, tj. sa smanjenjem $n_{sparse}\downarrow$. Ovaj zaključak je u skladu sa načelima empirijskog postupka proređenog uzorkovanja, odnosno poduzorkovanja, koji je veoma čest u praksi. Takođe navedeni zaključak daje objašnjenje zašto se u proceni veličine $\langle X,X\rangle_T$ koristi baš ocena proređenog uzorkovanja. Objašnjenje se sastoji u nameri da se kontroliše odstupanje ocene i to se postiže zamenom vrednosti n u formuli (6.8) vrednošću n_{sparse} i tako se dobija formula (6.16). Prilikom čega, se mora voditi računa da uzorkovanje ne bude suviše proređeno, tj. da n_{sparse} ne bude suviše malo. Na osnovu formule (6.17) sledi da se smanjivanjem vrednosti n_{sparse}, povećava diskretizaciona greška koja je proprcionalna sa $\sim n^{-1}_{sparse}$, a time se povećeva i varijansa Υ, odnosno varijansa polazne ocene $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})}$.
Primetimo još, da se glavni kompromis pravi između odstupanja $2n_{sparse}\,E\,\varepsilon^2$ i diskretizacionog člana varijanse, jer je efekat drugog člana varijanse koji je u sprezi sa šumom manjeg reda u odnosu na veličine n_{sparse} i $E\,(\varepsilon^2)$ koje poredimo.
Iz navedenog, zaključujemo da mora da se napravi kompromis između suviše čestog i suviše proređenog uzorkovanja, odnosno da se odredi optimalna vrednost frekvencije na kojoj treba vršiti uzorkovanje, što ćemo odrediti u sledećem poglavlju.

6.1.5 Optimalna frekvencija proređenog uzorkovanja

Zaključili smo da mora da postoji kompromis između suviše gustog i suviše proređenog uzorkovanja, odnosno da mora da postoji optimalna vrednost uzorkovanja n_{sparse}, za koju važi da su i diskretizaciona i greška usled mikrostruktunog šuma najmanje. Prema tome, ocena $[Y,Y]_T^{(\mathcal{H})}$ je najpreciznija kada se za frekvenciju uzorkovanja koristi baš optimalna frekvencija. S obzirom da je ocena optimalne frekvencije uzorkovanja treća po redu od ocena koje smo naveli, naglašavamo da je i treća po kvalitetu procene IV. Navedenu ocenu označićemo sa: $[Y,Y]^{(sparse,opt)}$. U nastavku rada objasnićemo postupak za određivanje optimalne frekvencije uzorkovanja.

Teorema 6.2 *(Optimalna frekvencija proređenog uzorkovanja).* Pretpostavimo da važi uslov (6.8), uslovi iz leme 6.3, kao i da važi sledeća jednakost:$\max_{t_i,\ t_{i,+}\in\mathcal{H}}(t_{i,+}-t_i)=O(1/n_{sparse})$.Tada, uz pretpostavku da je početna količina uzoraka velika, odnosno da važi: $n_{sparse}< n$, dobija se izraz za optimalnu frekvenciju uzorkovanja:

$$(i)\quad n^*_{sparse}=(E\varepsilon^2)^{-2/3}\left(\frac{T}{8}\int_0^T 2H'(t)\,\sigma_t^4\,dt\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(1+O_p(1)),\quad dok\ E\varepsilon^2\to 0. \tag{6.19}$$

(ii) U slučaju ekvidistantnih opservacija:$\Delta t_0=...=\Delta t_{n-1}=\Delta t=T/n_{sparse}$, za optimalnu frekvenciju se dobija sledeći izraz:

$$n^*_{sparse}=\left(\frac{T}{4(E\varepsilon^2)^2}\int_0^T\sigma_t^4\,dt\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{6.20}$$

Slučaj kada je stvarna količina uzoraka n manja od optimalne:n^*_{sparse} malo je verovatan,a posebno kada se radi sa akcijama i deonicama sa kojima se na tržištu trguje u velikim količinama. U datom slučaju se za optimalnu vrednost uzima:$n^*_{sparse}=n$.

Napomena *Na osnovu teoreme 6.2 i jednačine (6.19) može da se izvede formalan zaključak koji je oblika: "Dozvoljeno je da se postupak uzorkovanja vrši češće (na manjim frekvencijama), ako je vrednost šuma, odnosno odstupanja zanemarljivo mala".*

Napomena *Naglasimo da jednačina (6.19) može da se koristi i kao praktičan postupak za izračunavanje frekvencije n_{sparse} , jer se nepoznate veličine u datoj jednačini mogu jednostavno odrediti. Veličina $E(\varepsilon^2)$ može se proceniti kada se primeni formula (6.11) na celokupnoj mreži podataka $\mathcal{G}$, dok se integral: $\int_0^T 2H'(t)\sigma_t^4 dt$ može proceniti metodama koje nećemo navoditi u ovom radu.*

Prema tome, ako neko insistira da za procenu parametra IV koristi metodu proređenog uzorkovanja, onda može da je primeni na dva načina. Prvi način podrazumeva da se uzorkovanje obavlja na proizvoljno izabranoj manjoj frekvenciji i tada se koristi estimator $[Y,Y]^{(sparse)}$, dok drugi način podrazumeva da se koristi optimalna vrednost frekvenicije n_{sparse}, koja se utvrđuje postupkom optimizacije, što znači da se koristi estimator $[Y,Y]^{(sparse,opt)}$.

6.2 Poduzorkovanje i usrednjavanje duž višestrukih podmreža (spora vremenska skala - SVS)

- Notacija višestrukih mreža (definicije i pretpostavke)
- Greška zbirne ocene usled šuma mikrostrukture
- Greška zbirne ocene usled efekta diskretizacije
- Kombinacija dva izvora greške
- Optimalna frekvencija uzorkovanja na višestrukim mrežama

U prethodnom poglavlju potvrdili smo empirijski utvrđenu činjenicu da postupak proređenog uzorkovanja podataka može biti veoma koristan, što je u suprotnosti sa osnovnim principom statistike, koji nalaže da podatke ne treba odbacivati. Prema tome, trebalo bi da se konstruiše novi postupak za procenu integrisane volatilnosti koji bi iskoristio dobre osobine ocene (estimatora) proređenog uzorkovanja $[Y,Y]^{(sparse)}$, ali bi za razliku od nje koristio sve dostupne podatke iz polazne celokupne mreže: $\mathcal{G}=\{t_0,t_1,...,t_n\}$. Dalje, umesto da se proizvoljno ili optimalno izabere poduzorak u odnosu na koji bi se formirala ocena $[Y,Y]^{(sparse)}$, novi postupak zasniva se na tome da se odabere određen broj podmreža polazne mreže $\mathcal{G}$, a zatim da se nađe srednja vrednost ocena izvedenih iz novodobijenih podmreža. Navedenim postupkom se smanjuje varijacija date ocene. Na ovaj način konstruisali smo ocenu koja ispunjava sve navedene uslove: koristi sve opservacione podatke i poseduje sve korisne osobine poduzorkovanja. Novu ocenu nazivaćemo *zbirnom ocenom, odnosno zbirnim estimatorom*.

6.2.1 Notacija višestrukih mreža (definicije i pretpostavke)

Definicija 6.6 *(K-ta podmreža)*. Neka je na celokupnoj mreži $\mathcal{G}=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ izvršena particija na K disjunktnih podmreža, u oznaci: $\mathcal{G}^{(k)},k=1,..,K$, tako da važi sledeći uslovi:

$$\mathcal{G}=\bigcup_{k=1}^{K}\mathcal{G}^{(k)}\ ,\ \mathcal{G}^{(k)}\cap\mathcal{G}^{(l)}=\emptyset,\ k\neq l\ .$$

Tada, *k-tu podmrežu* definišemo kao skup oblika:

$$\mathcal{G}^{(k)}=\{t_{k-1},t_{k-1+K},t_{k-1+2K},\dots,t_{k-1+n_k K}\},$$

gde n_k predstavlja broj elemenata odgovarajuće podmreže $\mathcal{G}^{(k)}$, odnosno $n_k=|\mathcal{G}^{(k)}|$, $k=1,..,K$, dok opservacione tačke t_{k-1} i $t_{k-1+n_k K}$ [64] nazivamo redom *početnim* i *poslednjim* elementom podmreže $\mathcal{G}^{(k)}$.

Napomena *U definiciji 6.6 opisali smo najprirodniji način da se izabere k-ta po redu podmreža $\mathcal{G}^{(k)}$, koji se sastoji u tome, da se počev od trenutka t_{k-1} izabere svaka K-ta opservaciona tačka i tako sve do poslednjeg elementa podmreže $\mathcal{G}^{(k)}$. Ovakav način dodeljivanja opservacionih tačaka polazne mreže $\mathcal{G}$ njenim podmrežama $\mathcal{G}^{(k)}$nazivamo regularnom raspodelom (alokacijom) opsrevacionih tačaka mreže $\mathcal{G}$ njenim podmrežama. U uopštenom slučaju, vrednosti n_k ne moraju da budu jednake za različite vrednosti k, zbog čega se definiše njihova srednja vrednost:*

$$\tilde{n}=1/K\cdot\sum_{k=1}^{K}n_k=(n-K+1)/K\ .$$

[64] Poslednji element podmreže $\mathcal{G}^{(k)}$ je ujedno i najveći element te podmreže, koji je manji ili jednak poslednjem elementu celokupne mreže t_n.

Definicija 6.7 *(Ocena usrednjavanja ili zbirna ocena).* Na osnovu *definicije 6.4* ocena na uzorkovanim opservacionim tačkama Y_t, $t \in \mathcal{G}^{(k)}$ [65], u oznaci $[Y,Y]_T^{(k)}$, računa se prema formuli:

$$[Y,Y]_T^{(k)} = \sum_{t_j,\, t_{j,+} \in \mathcal{G}^{(k)}} (Y_{t_{j,+}} - Y_{t_j})^2 .$$

Nova ocena predstavlja srednju vrednost K ocena oblika: $[Y,Y]_T^{(k)}$, gde je k=1,..,K. Pri tome, svaka ocena $[Y,Y]_T^{(k)}$ zasebno se računa na odgovarajućoj k-toj podmreži, koja je prethodno dobijena postupkom regularne raspodele (alokacije) opservacionih tačaka celokupne mreže. Nova ocena definiše se sledećim izrazom:

$$\left[Y,Y\right]_T^{(avg)} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left[Y,Y\right]_T^{(sparse,k)} . \tag{6.21}$$

Lema 6.6 *(Asimptotske pretpostavke,uslovi kada $n\to\infty$).*Pretpostavimo da je vrednost T fiksirana i da koristimo samo opservacije iz intervala [0,T]. Shodno tome, u budućim asimptotskim razmatranjima kada broj opservacija na vremenskom intervalu [0,T] teži beskonačnosti ($n\to\infty$), pretpostavljaćemo da važe sledeći uslovi:

(i) $\max_i \Delta t_i \to 0$, odnosno $\max_i \Delta t_i = O(1/n)$. [66] (6.22)

(ii) $K/n \to 0$ (6.23)

(iii) Opservacione tačke su regularno raspodeljene (dodeljene) odgovarajućim podmrežama $\mathcal{G}^{(l)}$, odnosno važi:

$$\mathcal{G}^{(l)} = \{t_{l-1}, t_{l-1+K}, \ldots, t_{l-1+n_l K}\} . \tag{6.24}$$

6.2.2 Greška zbirne ocene usled šuma mikrostrukture: $[Y,Y]_T^{(avg)} - [X,X]_T^{(avg)}$

U procesu određivanje integrisane volatilnosti $\langle X,X\rangle_T$, odnosno kvadratne varijacije skrivenog procesa X, kao međukorak razmotrićemo koliko dobro zbirna ocena $[Y,Y]_T^{(avg)}$ aproksimira *zbirnu integrisanu volatilnost* datog skrivenog procesa X, koja se razmatra u diskretnoj vremenskoj skali i označava sa: $[X,X]_T^{(avg)}$. Prema tome, razmotrićemo grešku nastalu usled šuma mikrostrukture, ali isključujući efekat diskretizacije.

Teorema 6.3 *(Uslovno očekivanje i varijansa ocene $[Y,Y]_T^{(avg)}$).*

(i) Izraz za *uslovno očekivanje ocene* $[Y,Y]_T^{(avg)}$ dobija se iz kombinacije jednačina (6.8) i (6.21) i glasi:

$$E\left(\left[Y,Y\right]_T^{(avg)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) = \left[X,X\right]_T^{(avg)} + 2\tilde{n}E(\varepsilon^2) . \tag{6.25}$$

(ii) S obzirom da su komponente šuma $\{\varepsilon_t, t\in\mathcal{G}^{(k)}\}$ nezavisne[67] za različite vrednosti k, iz jednačine (6.9) dobija se *uslovna varijansa* ocene $[Y,Y]_T^{(avg)}$, koja glasi:

$$\begin{aligned} Var\left(\left[Y,Y\right]_T^{(avg)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) &= \frac{1}{K^2}\sum_{k=1}^{K} Var(\left[Y,Y\right]_T^{(k)} \mid X_t,\ t\in[0,T]) \\ &= 4\frac{\tilde{n}}{K}E(\varepsilon^4) + o_p(\frac{1}{K}). \end{aligned} \tag{6.26}$$

---

[65] Ovaj pojam je ekvivalentan realizovanoj volatilnosti (RV) na podmreži $\mathcal{G}^{(k)}$.

[66] Primetimo da je uslov (6.22) isto što i uslov (6.7).

[67] Iz pretpostavke da su podmreže $\mathcal{G}^{(k)}$ disjunktne za različite vrednosti k, sledi da se opservacijski trenuci u različitim podmrežama $t \in \mathcal{G}^{(k)}$ ne preklapaju, odakle sledi da su i komponente šuma iz različitih podmreža nezavisne.

(iii) Ako se u datu varijansu uračuna prvi sledeći član višeg reda, dobija se izraz:

$$Var\left(\left[Y,Y\right]_T^{(avg)} \mid X_t,\ t\in[0,T]\right) = 4\frac{\tilde{n}}{K}E(\varepsilon^4) + \frac{1}{K}\left(8\left[X,X\right]_T^{(avg)}\cdot E(\varepsilon^2) - 2Var(\varepsilon^2)\right) + O_p\left(\frac{1}{K}\right). \quad (6.27)$$

Napomena *U poređenju sa ocenom realizovane volatilnosti koja koristi celokupnu mrežu $\mathcal{G}$, zbirna ocena $[Y,Y]_T^{(avg)}$ donosi poboljšanje u vidu smanjenja asimptotskih vrednosti odstupanja i varijanse, što se vidi iz jednačina (6.25) i (6.26). Drugim rečima, kada pustimo da $n\to\infty$ odstupanje u jednačinama (6.25) i (6.26) je manje nego u jednačinama (6.8) i (6.9), jer važi nejednakost: $\tilde{n}<n$. Prema tome zbirna ocena $[Y,Y]_T^{(avg)}$je bolja od ocene RV.*

Teorema 6.4 *(Uslovno asimptotsko ponašanje ocene $[Y,Y]_T^{(avg)}$).* Pretpostavimo da je X Itoov proces oblika (6.1) i da su procesi X i Y povezani modelom (6.4). Dalje, pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (6.5) i (6.6), kao i da se za svaki indeks i, uzastopni vremenski trenuci t_i i t_{i+1}, ne nalaze u istoj podmreži. Uz dodatnu pretpostavku da važi uslov (6.23), kada $n\to\infty$, sledi izraz za uslovno asimptotsko ponašanje ocene $[Y,Y]_T^{(avg)}$:

$$\sqrt{\frac{K}{\tilde{n}}}\left([Y,Y]_T^{(avg)} - \left\langle X,X\right\rangle_T - 2\tilde{n}E(\varepsilon^2)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} 2\sqrt{E(\varepsilon^4)}\cdot z_{šuma}^{(avg)}, \quad (6.28)$$

gde se podrazumeva da je konvergencija u raspodeli uslovna u odnosu na proces X i važi da je slučajna veličina $z_{šuma}^{(avg)}$ standardna normalna slučajna promenljiva.

6.2.3 Greška zbirne ocene usled efekta diskretizacije: $[X,X]_T^{(avg)} - \langle X,X\rangle_t$

Sledeći korak u postupku određivanja neprekidne integrisane volatilnosti $\langle X,X\rangle_T$ se sastoji u tome da se razmotre posledice koje nastaju usled diskretizacije vremena. Drugim rečima, treba da se odredi odstupanje ocene $[X,X]_T^{(avg)}$ od integrisane volatilnosti $\langle X,X\rangle_T$ skrivenog procesa.Navedeni diskretizacioni efekat opisaćemo procesom D_T i on se računa na sledeći način:

$$\begin{aligned} D_t &= \left[X,X\right]_T^{(avg)} - \left\langle X,X\right\rangle_t \\ &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(\left[X,X\right]_t^{(k)} - \left\langle X,X\right\rangle_t\right), \end{aligned} \quad (6.29)$$

gde je veličina data formulom: $\left[X,X\right]_T^{(k)} = \sum_{t_i,\,t_{i,+}\in\mathcal{G}^{(k)},\ t_{i,+}\le t} (X_{t_{i,+}} - X_{t_i})^2$.

Dalje, za kvadratnu varijaciju procesa D_T, ako je D_T neprekidan u vremenu, koristićemo: $[D,D]_T$. Ovaj postupak daje najbolju aproksimaciju za varijansu procesa D_T.

Teorema 6.5 *(Kvadratna varijacija procesa D_T).* Neka je X Itoov proces oblika (6.1), gde su oba koeficijenta μ_t i σ_t skoro sigurno neprekidni i neka važi da je koeficijent σ_t ograničen kada je izvan nulte vrednosti. Dalje, ako pretpostavimo da važe asimptotski uslovi (6.22), (6.23), (6.24), tada aproksimaciju kvadratne varijacije procesa D_T dobijamo iz izraza:

$$[D,D]_T = \frac{TK}{n}\eta_n^2 + o_p\left(\frac{K}{n}\right), \quad (6.30)$$

gde je $\eta_n^2 = \sum_i h_i\,\sigma_{t_i}^4\,\Delta t_i$ i ovu veličinu nazivaćemo diskretizacionom varijansom.

U zasebnom slučaju, veličinu reda za proces D_T dobijamo iz sledećeg izraza: $D_T = O_p((K/n)^{1/2})$. (6.31)

Na osnovu navedenog izraza (6.31) može da se izračuna formula koja minimizuje varijanse kako efekta diskretizacije, tako i efekta nastalog zbog prisustva mikrostrukturnog šuma.

Teorema 6.6 *(Asimptotski zakon raspodele procesa D_T).*Pretpostavimo da važe uslovi iz *teoreme 6.4* i da promenljiva η_n konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj η, odnosno $\eta_n^2 \to \eta^2$ u verovantoći, pri čemu slučajna promenljiva η predstavlja diskretizacionu varijansu. Uz dodatnu pretpostavku da važe uslovi o filatraciji (6.7) dobijamo izraz:

$$D_T / (K/n)^{1/2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \eta \sqrt{T}\, z_{diskretno}, \tag{6.32}$$

gde je $z_{diskretno}$ standardna Gausova slučajna promenljiva, nezavisna je od procesa X.

Napomena *Drugim rečima, slučajna promenljiva $D_T /(K/n)^{1/2}$je asimptotski kombinovana normalna (mixed normal) Gausova slučajna promenljiva oblika $\mathcal{N}(0,\eta^2 T)$.*

6.2.4 Kombinacija dva izvora greške

Kombincijom članova od kojih jedan nastaje kao posledica diskretizacione greške, a drugi član zbog prisustva šuma opservacije, dobija se ukupna greška procene.

Teorema 6.7 *(Asimptotski zakon raspodele ukupne greške, nastale zbog prisustva šuma i zbog diskretizacije).* Na osnovu *teoreme 6.4* i *teoreme 6.5* dobija se sledeći izraz:

$$[Y,Y]_T^{(avg)} - \langle X, X \rangle_T - 2\tilde{n}E(\varepsilon^2) = \xi\, z_{total} + o_p(1), \tag{6.33}$$

gde je z_{total} asimptotski standardna Gausova slučajna promenljiva, nezavisna od procesa X.
Varijansu dobijamo iz sledećeg izraza:

$$\xi^2 = \underbrace{4\frac{\tilde{n}}{K}E(\varepsilon^4)}_{\text{član nastao usled šuma}} + \underbrace{T\frac{1}{\tilde{n}}\eta^2}_{\text{član nastao zbog diskretizacije}} . \tag{6.34}$$

Napomena *Posmatrajući jednačinu (6.33) možemo da primetimo da ocena $[Y,Y]_T^{(avg)}$i dalje sadrži grešku, odnosno sadrži odstupanje od procenjivane veličine $\langle X,X\rangle_T$, koje iznosi $2\tilde{n}E\varepsilon^2$.Barem, što se asimptotskog odstupanja tiče $[Y,Y]_T^{(avg)}$ je sigurno bolja ocena (estimator) nego $[Y,Y]_T^{(all)}$, jer važi sledeći uslov: $\tilde{n}<n$. Primetimo,da kada za parametar K uzmemo vrednost: $K=cn^{2/3}$, obe komponente u izrazu za varijansu ξ^2 (6.34) biće podjednako zastupljene u graničnoj vrednosti datog izraza, kada $n\to\infty$.U suprotnom jedna od njih će dominirati.*

6.2.5 Optimalna frekvencija uzorkovanja na višestrukim mrežama

Kao i u prethodnim postupcima i prilikom uzorkovanja na višestrukim mrežama, takođe se proverava da li je data *vrednost šuma zanemarljivo mala, jer samo u tom slučaju ima smisla tražiti optimalnu vrednost frekvencije poduzorkovanja* $\tilde{n}$. Datom optimalnom vrednošću frekvencije poduzrokovanja postiže se balans između odstupanja $2\tilde{n}E\varepsilon^2$ i varijanse ξ, u jednačini (6.33).

Teorema 6.8 *(Optimalna frekvencija uzorkovanja na višestrukim mrežama).* Ako su ispunjeni uslovi koji se podrazumevaju u modelu višestrukih mreža i ako je ispunjen uslov: $E\varepsilon^2 \to 0$, tada u slučaju ekvidistantnih opservacija dobijamo optimalnu frekvenciju uzorkovanja na višestrukum mrežama iz sledećeg izraza:

$$\tilde{n}^* = \left(\frac{T\eta^2}{8(E\varepsilon^2)^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{T}{6(E\varepsilon^2)^2} \int_0^T \sigma_t^4 \, dt \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{6.35}$$

Napomena *Prema tome, ukoliko za ocenu izaberemo zbirnu ocenu* $[Y,Y]_T^{(avg)}$*, tada ćemo njen najbolji efekat postići kada za frekvenciju poduzorkovanja izaberemo baš vrednost optimalne frekvencije* $\tilde{n}^*$ *i to sa ekvidistantnim vremenskim intervalima. Optimalnu frekvenciju dobijamo kada nadjemo vrednost* $\tilde{n}$ *pri kojoj je vrednost srednje kvadratne greške (MSE) minimalna, tj. optimalnu frekvenciju dobijamo kao rešenje jednačine:* $\partial MSE / \partial \tilde{n} = 0$*.Prema tome, moguće je prilikom estimacije koristiti svih* n *opservacija, ako se izabere odgovarajući broj podmreža:* $K^* \approx n / \tilde{n}^*$*.*

6.3 Najbolja ocena (poduzorkovanje, usrednjavanje i korekcija odstupanja)

- Najbolja ocena – objašnjenje
- Ukupna greška najbolje ocene (posledica efekata šuma i diskretizacije)
- Optimalna frekvencija uzorkovanja najbolje ocene

6.3.1 Najbolja ocena - objašnjenje

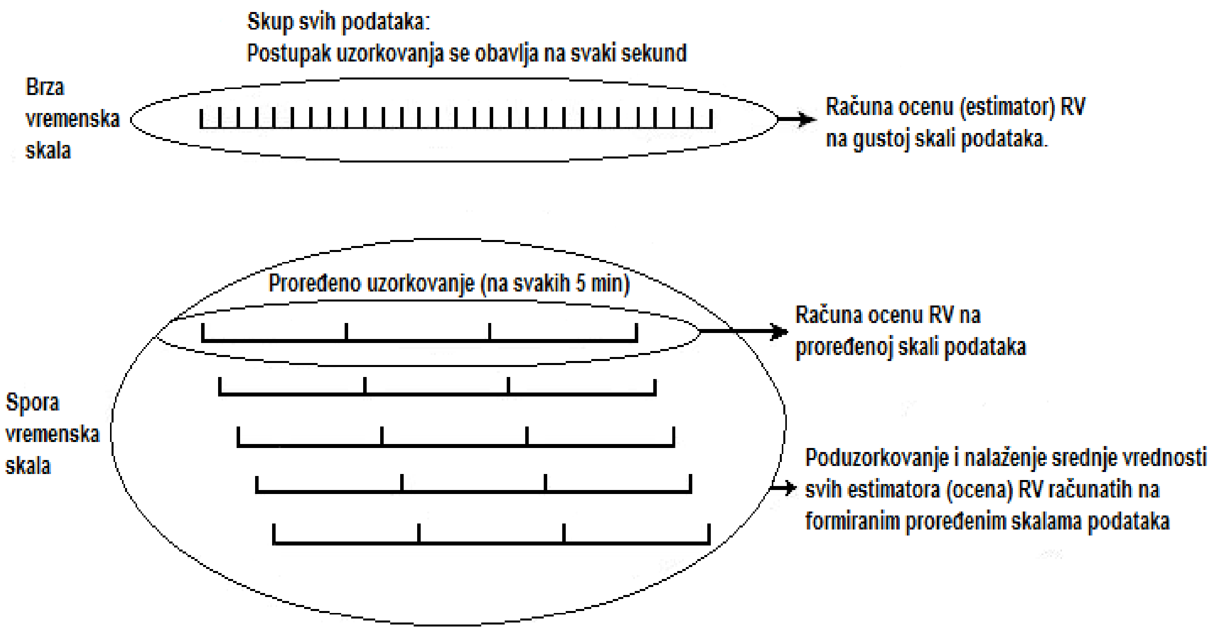
U prethodnom poglavlju, iz formule (6.33) zaključili smo da zbirna ocena (estimator) $[Y,Y]_T^{(avg)}$, koja procenjuje integrisanu volatilnost $\langle X,X\rangle$ i dalje sadrži odstupanje $2\tilde{n}E\varepsilon^2$. Dalje u radu, izvršićemo ispravke zbirne ocene tako što ćemo uraditi korekciju njenog odstupanja i na taj način dobiti novu poboljšanu ocenu, koja se naziva *zbirna ocena sa korekcijom (zbirni estimator sa korekcijom)*, u oznaci $\overline{\langle X,X\rangle}_T$. Budući da je novodobijena ocena po kvalitetu najbolja od svih pomenutih, nazivaćemo je i "*Prvom ili najboljom ocenom (estimatorom)*".

Na *slici 6.1.* prikazan je postupak konstrukcije zbirne ocene sa korekcijom, ref [2]. Prvi korak u korekciji odstupanja sastoji se u tome da se izračuna varijansa komponente šuma $E\varepsilon^2$, koja je definisana na celokupnoj mreži podataka (BVS)[68]. Ocenu varijanse šuma dobijamo iz ocene RV računate na BVS, pomoću formule (6.11):

$$\overline{E\varepsilon^2} = (1/2n)[Y,Y]_T^{(all)} \tag{6.35a}$$

Budući da je vrednost varijanse šuma procenjena, sledeći korak u korekciji odstupanja jeste da se izračuna odstupanje zbirne ocene, koje se dobija iz izraza:

$$2\tilde{n}\overline{E\varepsilon^2}\ .$$



slika 6.1. Zbirna ocena sa korekcijom (najbolji estimator).Slika pokazuje konstrukciju najbolje ocene (estimatora),ref [2].

[68] U jednom od prethodnih poglavlja računali smo vrednost estimatora $[Y,Y]_T^{(all)}$, koji operiše sa podacima na celokupnoj mreži podataka. Prema tome i varijansa šuma se računa na celokupnoj mreži podataka.

Lema 6.7 *(Zbirna ocena sa korekcijom /najbolja ocena).* Zbirna ocena sa korekcijom dobija se *kombinacijom dve vremenske skale BVS i SVS*. Skala BVS, odnosno *all* skala se sastoji iz svih opservacionih tačaka, dok je skala SVS, odnosno *avg* skala predstavnik svih podmreža dobijenih iz all skale. Zbirnu ocenu sa korekcijom dobijamo iz sledećeg izraza:

$$\overline{\langle X,X\rangle}_T = \underbrace{[Y,Y]_T^{(avg)}}_{\text{spora vremenska skala}} - \frac{\overline{n}}{n}\underbrace{[Y,Y]_T^{(all)}}_{\text{brza vremenska skala}} . \qquad (6.36)$$

Dokaz :

Nova zbirna ocena dobija se kada se izvrši korekcija odstupanja estimatora $[Y,Y]_T^{(avg)}$, tako što se greška koja se javlja zbog šuma, koju ocenjujemo formulom (6.35a) oduzme od običnog zbirnog estimatora:

$$[Y,Y]_T^{(avg)} - 2\overline{n}E\varepsilon^2 \approx [Y,Y]_T^{(avg)} - 2\overline{n}\,\overline{E\varepsilon^2} = [Y,Y]_T^{(avg)} - 2\overline{n}\,\frac{1}{2n}[Y,Y]_T^{(all)} .$$

6.3.2 Ukupna greška najbolje ocene (posledica efekata šuma i diskretizacije)

Kao i obična zbirna ocena, tako i zbirna ocena sa korekcijom (najbolja ocena/estimator) sadrži obe greške. Pri čemu grešku nastalu kao posledica šuma mikrostrukture dobijamo iz izraza: $\overline{\langle X,X\rangle}_T - [X,X]_T^{(avg)}$, dok diskretizacionu grešku dobijamo iz: $D_t=[X,X]_T^{(avg)}-\langle X,X\rangle_t$. Prema tome, ukupna greška nove ocene računa se kao zbir navedenih grešaka, odnosno ukupnu grešku dobijamo iz:

$$\overline{\langle X,X\rangle}_T - \langle X,X\rangle_T = \underbrace{\left(\overline{\langle X,X\rangle}_T - [X,X]_T^{(avg)}\right)}_{\text{greška usled šuma}} + \underbrace{\left([X,X]_T^{(avg)} - \langle X,X\rangle_t\right)}_{\text{diskretizaciona greška}} . \qquad (6.37)$$

Iz formule (6.37) za ukupnu grešku može se odrediti optimalni broj podmreža zbirne ocene, u oznaci K_{opt}, tako da ukupna greška bude minimalna. Dati postupak je objašnjen u *teoremi 6.9* pod brojem (iv).

Teorema 6.9 *(Asimptotsko ponašanje grešaka najbolje ocene).* Pod pretpostavkom da važe uslovi *teoreme 6.4*, za najbolju ocenu važe sledeće stavke:

(i) Asimptotski zakon raspodele za grešku nastalu zbog pojave šuma, dobija se iz formule:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{K}{\overline{n}}\right)^{1/2}\cdot\left(\overline{\langle X,X\rangle} - [X,X]_T^{(avg)}\right)\\ &=\left(\frac{K}{\overline{n}}\right)^{1/2}\cdot\left([Y,Y]_T^{(avg)} - [X,X]_T^{(avg)} - 2\overline{n}E(\varepsilon^2)\right) - 2\left(K\overline{n}\right)^{1/2}\cdot(\overline{E\varepsilon^2} - E\varepsilon^2) \qquad (6.38)\\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,8(E\varepsilon^2)^2),\end{aligned}$$

gde se podrazumeva da je konvergencija u raspodeli uslovna u odnosu na proces X.

(ii) Asimptotski zakon raspodele za diskretizacionu grešku ostaje isti kao i kod obične zbirne ocene. Prema tome, za diskretizacionu grešku dobijamo sledeći izraz:

$$D_T = O_p((K/n)^{1/2}) \approx O_p\left(\overline{n}^{-1/2}\right)$$ [69].

[69] S obzirom, da se vrednost optimalne frekvencije poduzorkovanja zbirnog estimatora, u oznaci $\tilde{n}$, dobija iz uslova: $\tilde{n}=n/(K-1)$,sledi da za veliko n, data vrednost može da se aproksimira izrazom: $\tilde{n}=n/K$, $n\to+\infty$.

(iii) Ako se kombinuju greške iz stavki *(i)* i *(ii)* i iskoristi formula (6.37), za ukupnu grešku najbolje ocene dobija se izraz:

$$\overline{\langle X,X\rangle}_T - \langle X,X\rangle_T = O_p\left(\frac{\bar{n}}{K}\right)^{1/2} + O_p\left(\bar{n}^{-1/2}\right). \qquad (6.39)$$

(iv) Optimalni broj podmreža, u oznaci K_{opt}, dobija se minimizaranjem ukupne greške, izraz (6.39)[70], odnosno izjednačavanjem članova sa desne strane u izrazu (6.39). Tada, za optimalnu vrednost konstante K dobijamo:

$$K_{opt} = O(n^{2/3}). \qquad (6.40)$$

U datom optimalnom slučaju, sledi da će desna strana jednačine (6.39) biti reda $O_p(n^{-1/6})$.

Teorema 6.10 *(Asimptotski zakon raspodele ukupne greške ako je $K_{opt}=cn^{2/3}$).* Pretpostavimo da je X Itoov proces oblika (6.1), zatim da su procesi X i Y vezani modelom (6.4) i da su ispunjeni uslovi *teoreme 6.5*. Pretpostavimo dalje da su ispunjeni uslovi (6.5), zatim da je $E\varepsilon^2<\infty$, kao i da smo za optimalnu vrednost koraka uzorkovanja uzeli vrednost: $K_{opt}=cn^{2/3}$.Tada važi:

$$\begin{aligned} n^{1/6}\cdot\left(\overline{\langle X,X\rangle}_T - \langle X,X\rangle_T\right) &\to \mathcal{N}(0,\,8c^{-2}(E\varepsilon^2)^2) + \eta\sqrt{T}\,\mathcal{N}(0,c) \\ &= \left(8c^{-2}(E\varepsilon^2)^2 + c\eta^2 T\right)^{1/2}\mathcal{N}(0,1). \end{aligned} \qquad (6.41)$$

Pri čemu je konvergencija stabilna u raspodeli.

Napomena *Na osnovu teoreme 6.9 zaključujemo da izborom optimalne vrednosti koraka uzorkovanja prema izrazu (6.40) maksimalno smanjujemo i ukupnu grešku najbolje ocene (6.39) i ukupnu grešku zbirne ocene. To postižemo međusobnim poništavanjem uticaja diskretizacione greške i greške nastale usled šuma, stavka (iv). Pri tome, napominjemo da data formula za optimalnu vrednost koraka uzorkovanja nije potpuno određena zbog konstante c, koja može da ima proizvoljnu vrednost. Prema tome, iz teoreme 6.10, možemo da zaključimo da asimptotska ukupna greška najbolje ocene (6.41), može još da se smanji i to korekcijom člana asimptotske varijanse:$(8c^{-2}(E\varepsilon^2)^2+c\eta^2T)^{1/2}$.Time smo potpuno odredili vrednost optimalnog koraka uzorkovanja K_{opt} najbolje ocene.*

6.3.3 Optimalni korak uzorkovanja najbolje ocene

Kada se za broj podmreža izabere baš optimalna vrednost $K_{opt}=cn^{2/3}$, ukupna greška najbolje ocene biće minimalna i njena raspodela tada dobija sledeći oblik:

$$\overline{\langle X,X\rangle}_T \overset{\mathcal{L}}{\approx} \langle X,X\rangle_T + \frac{1}{n^{1/6}}\cdot\underbrace{[\underbrace{\frac{8}{c^2}(E\varepsilon^2)^2}_{\text{član nastao usled šuma}} + \underbrace{c\frac{4T}{3}\int_0^T\sigma_t^4\,dt}_{\text{član nastao zbog diskretizacije}}]^{\frac{1}{2}}}_{\text{ukupna varijansa}}\cdot z_{total}. \qquad (6.42)$$

Prethodno smo napomenuli da odgovarajućim izborom konstante c, u datom izrazu (6.42) može još više da se smanji uticaj ukupne varijanse, kao i da se optimalni broj podmreža K_{opt} preciznije odredi. Datu konstantu označićemo sa c_{opt}. Prema tome, najbolja ocena pored toga što nema nikakva odstupanja zbog šuma ima i znatno bolju asimptotsku ukupnu varijansu.

[70] Ukupna greška se drugačije naziva asimptotska ukupna varijansa.

Teorema 6.11 *(Optimalna frekvencija uzorkovanja).*Optimalna vrednost konsante *c* dobija se minimiziranjem očekivane asimptotske varijanse iz izraza (6.41), odnosno iz izraza (6.42) i data je formulom:

$$c_{opt} = \left(\frac{16(E\varepsilon^2)^2}{T\eta^2} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.43}$$

U slučaju ekvidistantnih opservacija optimalnu konsantu *c* dobijamo iz izraza:

$$c_{opt} = \left(\frac{T}{12(E\varepsilon^2)^2} \int_0^T \sigma_t^4 \, dt \right)^{-1/3}. \tag{6.44}$$

Napomena *Optimalna vrednost c_{opt} može kompletno da se proceni na osnovu podataka iz prošlosti*[71] *i to koristeći ocenu šuma (6.35a) i ocenu varijanse η^2.Veličina η^2 može da se uzme da je nezavisna od broja podmreža K ukoliko je izvršena regularna raspodela (alokacija) opsrevacionih tačaka podmrežama, što znači da na osnovu podataka iz prošlosti može da se izračuna i konstanta c i broj podmreža K.*

Teorema 6.12 *(Uslovna varijansa ocene $\overline{\langle X,X \rangle}_T$ u odnosu na proces X).*

(i) Ako se za broj podmreža izabere vrednost $K=cn^{2/3}$, tada se uslovna varijansa najbolje ocene kada je proces X poznat, dobija iz sledeće formule:

$$\begin{aligned} Var\left(\overline{\langle X,X \rangle}_T \mid X_t,\, t \in [0,T]\right) &= n^{-1/3} c^{-2} (E\varepsilon^2)^2 \\ &+ n^{-2/3} c^{-1} \left(8\left[X,X\right]_T^{(avg)} \cdot E(\varepsilon^2) - 2Var(\varepsilon^2) \right) \\ &+ O_p(n^{-2/3}). \end{aligned} \tag{6.45}$$

(ii) Rezultati simulacije predlažu da u slučaju kada se radi sa malim brojem uzoraka mora da se uzme u obzir i korekcija. Tada se varijansa najbolje ocene najbolje ocenjuje sledećom formulom:

$$s^2 + n^{-2/3} c^{-1} \left(8\left[X,X\right]_T^{(avg)} \cdot E(\varepsilon^2) - 2Var(\varepsilon^2) \right). \tag{6.46}$$

Napominjemo da veličina $[X,X]_T^{(avg)}$ korekcionog člana u izrazu (6.46) može se proceniti veličinom $\overline{\langle X,X \rangle}_T$, dok se član $Var(\varepsilon^2)$ ocenjuje sledećom ocenom:

$$\overline{Var(\varepsilon^2)} = \frac{1}{2n} \sum_i (\Delta Y_{t_i})^4 - 4\overline{(E\varepsilon^2)}^2. \tag{6.47}$$

Napomena *Napominjemo da je najbolja ocena za razliku od prethodnih ocena pravilno centrirana, što znači da opisuje posmatranu veličinu bez ikakvih odstupanja.*

Napomena *Ako se pretpostavi da je šum prisutan na tržištu, tada je najbolja moguća asimptotska brzina konvergencije koja se može postići reda $O_p(n^{-1/4})$, dok asimptotska brzina konvergencije najbolje ocene iznosi $n^{-1/6}$, što se vidi iz izraza (6.42). Međutim i malo gora brzina konvergencije je bolja nego da ocena ima velika odstupanja. Zato se preporučuje da se koriste svi dostupni podaci na tržištu, jer ako ocena nema odstupanja onda nema ni ogreničenja koliko često treba da se vrši uzorkovanje. Prema tome, vrednost n može da bude proizvoljno veliki broj.*

[71] Gde se pod prošlošću podrazumevaju podaci u periodu pre početnog trenutka t_0=0.

7. Simulacija

Budući da smo u šestom poglavlju opisali pet različitih pristupa rešavanju problema uticaja mikrostrukturnog šuma na realizovanu volatilnost (RV), odnosno izložili smo pet različitih načina konstrukcije ocena (estimatora) integrisane volatilnosti, u ovom poglavlju bavićemo se realizacijom navedenih ocena kroz kompjuterske simulacije, kao i proverom njihovih rezultata. Radi poređenja rezultata izvršićemo simulaciju sa istim parametrima kao i u radu [1]. Na kraju ćemo izložiti rezultate datih simulacija i uporediti dobijene rezultate sa rezultatima koji su predviđeni navedenom asimptotskom teorijom.

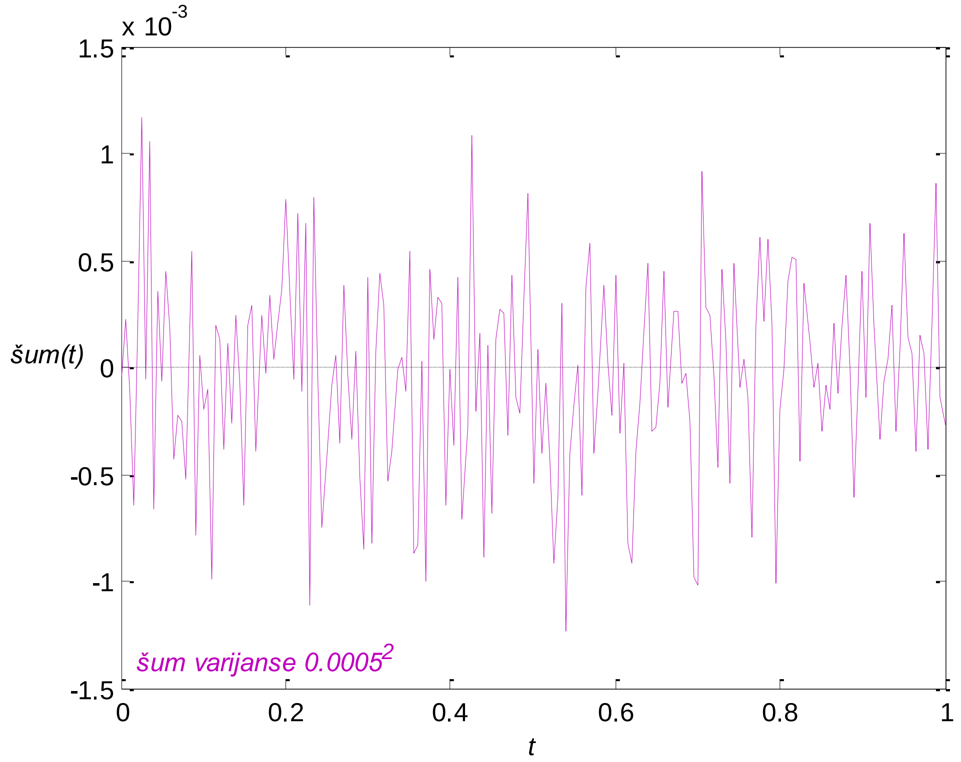
7.1 Postupak simulacije

Za generisanje podataka koje ćemo koristiti u simulaciji poslužićemo se Hestonovim stohastičkim modelom volatilnosti [8], koji glasi:

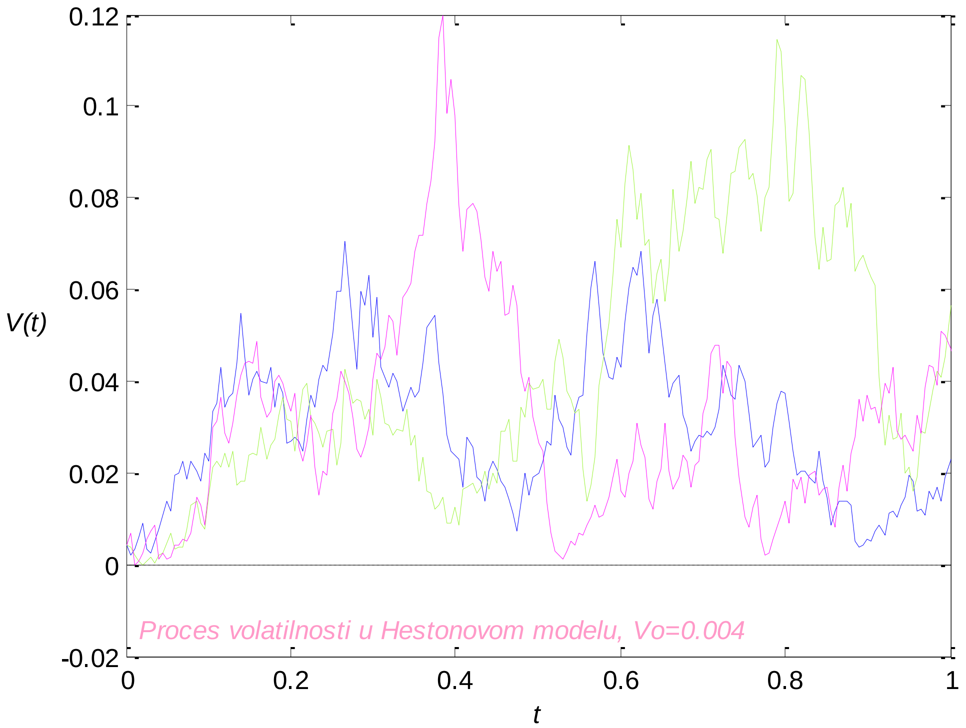
$$\begin{aligned} dX_t &= (\mu - v_t/2)\,dt + \sigma_t dB_t\,, \\ dv_t &= k(\alpha - v_t)dt + \gamma v_t^{1/2} dW_t\,, \\ dB_t dW_t &= \rho dt\,. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Procesi v_t i X_t redom predstavljaju procese volatilnosti i cene, pri čemu važi: $v_t = \sigma_t^2$, dok B_t i W_t predstavljaju korelisane procese Braunovog kretanja sa koeficijentom korelacije ρ. Pretpostavićemo, da su parametri modela μ, k, α, γ i ρ konstantni, kao i da je ispunjen Felerov uslov: $2k\alpha \geq \gamma^2$.

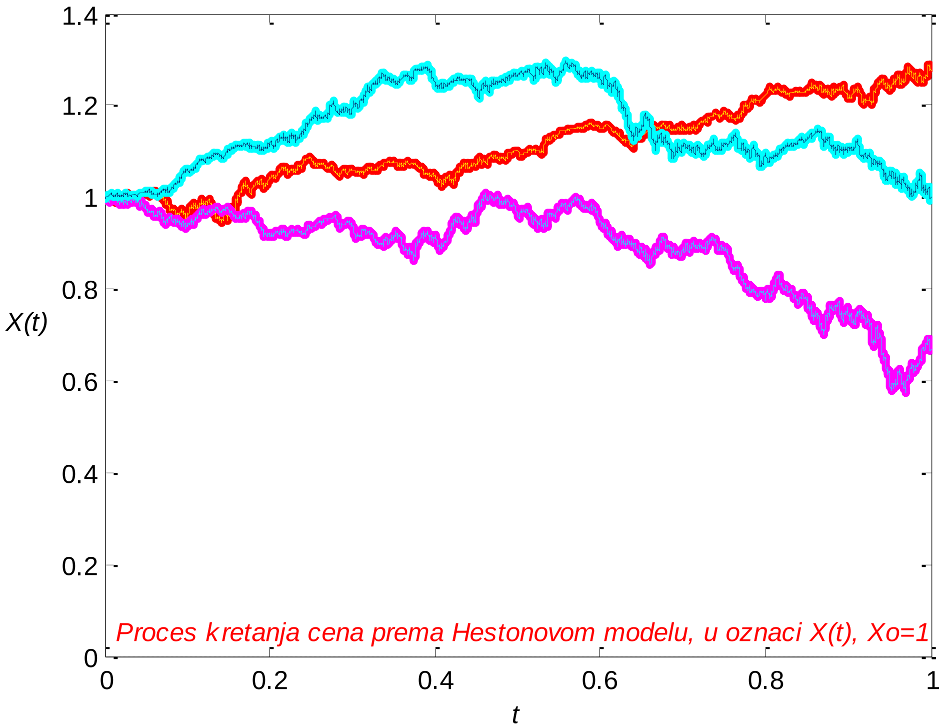
Za simulaciju Hestonove SDJ koristićemo Ojlerovu šemu u vremenskim razmacima od 1/4 sekunde, odnosno Δt=1/4 sec, dok ćemo početno uzorkovanje obaviti u vremenskim razmacima od jedne sekunde, Δt=1 sec. Prema tome vremenski interval na kojem se generiše Hestonov proces cena je četiri puta manji od intervala na kojem se obavlja najfinije uzorkovanje na berzi. Za skup vrednosti parametara date SDJ koristićemo njihove standardne vrednosti koje su uobičajene za akcije. Prema tome, koristićemo sledeći skup vrednosti parametara: μ= 0.05,k=5,α= 0.04,γ= 0.5 i ρ= –0.5.Dalje, za komponente mikrostrukturnog šuma ε pretpostavićemo da imaju Gausovu raspodelu sa malom vrednošću varijanse, odnosno da je standardna devijacija šuma $(E\varepsilon^2)^{1/2}$=0.0005, što iznosi 0.05% vrednosti cene posmatrane aktive. Na *slikama 7.1, 7.2, 7.3* prikazani su redom proces Gausovskog belog šuma, proces volatilnosti i proces cena u Hestonovom modelu (7.1).



Slika 7.1. Grafik trajektorije procesa šuma u zavisnosti od vremena.



Slika 7.2. Grafik trajektorije procesa volatilnosti Hestonovog modela u zavisnosti od vremena.



Slika 7.3. Grafik trajektorije procesa kretanja cena prema Hestonovom modelu kada se uključi šum tržišta.

Postupak simulacije sastoji se u generisanju određenog broja trajektorija (npr. M=100) Hestonovog procesa cena, koji će predstavljati tzv. skriveni proces. Na svakoj trajektoriji ocenjuje se parametar neprekidne integrisane volatilnosti $\langle X,X\rangle_T$ u periodu od jednog dana (T =1dan) i pri tome se podrazumeva da su vremenski parametri predstavljeni na godišnjem nivou: T=1/252.Takođe,se podrazumeva da se u toku dana slobodno trguje i to u vremenskom periodu od 6.5 h, kao i da godina ima 265 radnih dana. Ocenu integrisane volatilnosti računaćemo pomoću pet navedenih ocena: $[Y,Y]_T^{(all)}$, $[Y,Y]_T^{(sparse)}$, $[Y,Y]_T^{(sparse,\ opt)}$, $[Y,Y]_T^{(avg)}$, $\overline{\langle X,X\rangle}_T^{\,adj}$.

Dakle, postupak simulacije se sastoji u tome da se na osnovu generisane Hestonove trajektorije, koja predstavlja skriveni proces, odredi stvarni parametar integrisane volatilnosti koristeći se formulom (6.3). Dobijeni, stvarni parametar integrisane volatilnosti iskoristićemo za procenu odstupanja svih pet ocena (estimatora) integrisane volatilnosti. Budući da se generiše M=100 Hestonovih trajektorija, dobiće se po 100 vrednosti odstupanja i to za svaku ocenu posebno. Zatim se izračunava očekivano odstupanje tih ocena. U *tabelama 7.1.* i *7.2.* prikazano je navedeno očekivano odstupanje za svaku ocenu posebno.Očekivano odstupanje navedenih ocena, odnosno estimatora računa se prema sledećoj formuli:

$$E[ocena-\langle X,X\rangle_T].$$

Relativna vrednost odstupanja se odnosi na procentualni iznos odstupanja, i dobija se iz sledeće formule:

$$\frac{ocena-\langle X,X\rangle_T}{\langle X,X\rangle_T}.$$

Napominjemo da su u ovom radu predložena malo izmenjena rešenja za prvu, drugu i treću ocenu u odnosu na rad [1] i to tako da se ne koriste ponuđene formule za izračunavanje optimalne vrednosti n i K (*formule 6.20, 6.35, 6.44*), već da se navedene optimalne vrednosti određuju programski.

Prema tome, rezime postupka za izračunavanje ocena, odnosno estimatora u ovom radu je sledeći. Petu i četvrtu ocenu (estimator) računamo isto kao što je predloženo u radu [1]. Peta ocena računa se kao ocena RV na uzorkovanoj vremenskoj skali koja se sastoji iz 23 400 podataka, odnosno na skali koju smo u radu nazivali i celokupna vremenska skala (BVS). Za računanje četvrte ocene koristićemo postupak proređenog uzorkovanja sa frekvencijom uzorkovanja od 5 min, odnosno uzorkovanje ćemo obavljati na svakih 5 min. Treća ocena, kao što je već napomenuto, koristi postupak proređenog uzorkovanja sa optimalnom frekvencijom, koja se određuje odgovarajućim programom. Prva i druga ocena se računaju postupkom poduzorkovanja celokupne vremenske skale, a zatim usrednjavanjem ocena dobijenih iz datih podmreža i to prema *formulama 6.21, 6.36*, s tim što se od prve ocene dodatno oduzima ocenjena varijansa šuma. Takođe se i za ove dve ocene, optimalne vrednosti koraka K_{opt} određuju programom koji predlažemo u ovom radu. Svi navedeni programi izloženi su u *prilogu B*.

U ovom radu predložena su dva načina optimizacije. Prvi način je elementarna programska provera vrednosti prve, druge i treće ocene za sve logične vrednosti parametra n, odnosno parametra K. Nakon navedene provere nalazi se minimalna vrednost odstupanja za svaku od tri ocene, što je ujedno i njihova optimalna vrednost. Rezultati koji se dobijaju ovim načinom prikazani su u *tabeli 7.1.*, gde se jasno vidi poboljšanje kvaliteta počev od pete ocene i zaključujući sa prvom. S obzirom na to da se na ovaj način proveravaju vrednosti ocena za sve moguće vrednosti parametra n i K, zaključujemo da je ova metoda i najtačnija i najpouzdanija. Naravno, postoji mana ovakvog načina pronalaženja minimuma, a to je da izuzetno dugo traje. Ovo nam dodatno usporava program, budući da i sam postupak izračunavanja očekivane vrednosti odstupanja dugo traje. Zato nudimo drugo rešenje koje predstavlja heuristiku gornjeg problema i samim tim znatno pospešuje brzinu rada ponuđenog programa. Rezultati dobijeni ovim načinom prikazani su u *tabeli 7.2.* i možemo primetiti da su oni odlični za prvu ocenu, dok za drugu i treću ocenu nisu zadovoljavajući. Razlog tome jeste što su vrednosti odstupanja prve i druge ocene relativno bliske, kako prilikom korišćenja prvog, prilično pouzdanog programa za optimizaciju, tako i u rezultatima dobijenim u radu [1]. Samim tim, korišćenjem predložene heuristike se razlike u rezultatima za prvu i drugu ocenu još više smanjuju, pa se ne može jasno odrediti koja je od tih ocena bolja. Prema tome, iz navedenih rezultata ne može sa sigurnošću zaključiti šta je bolje koristiti, drugu ili treću ocenu. U ovom radu, zato predlažemo da se navedena heuristika koristi isključivo pri izračunavanju prve ocene, odnosno najbolje ocene.

7.2 Rezultati simulacije

U *tabelama 7.1.* i *7.2.* prikazani su rezultati simulacije za svih pet ocena integrisane volatilnosti. S tim što su u prvoj tabeli prikazani rezultati za prvi opisani način optimizacije, dok su u drugoj tabeli prikazani rezultati za drugi opisani način optimizacije. Ovde napominjemo još jednu dobru osobinu programa koji je, u ovom radu predložen za izračunavanje optimalne vrednosti parametara n i K. To je da se i prvi i drugi način realizuju istim programom, ali za različite vrednosti parametara u tom programu. Navedeni parametri su u programu obeleženi oznakama *X, X2, X3, D* i ispod svake tabele ispisane su vrednosti parametara za koje su dobijeni rezultati u tabeli.

Uz svaku veličinu u koloni stoji naznaka "za mali uzorak", koja se odnosi na prosečnu vrednost date veličine duž svih M generisanih trajektorija, odnosno navedeni naziv se odnosi na malu količinu uzorka koju izdvajamo.

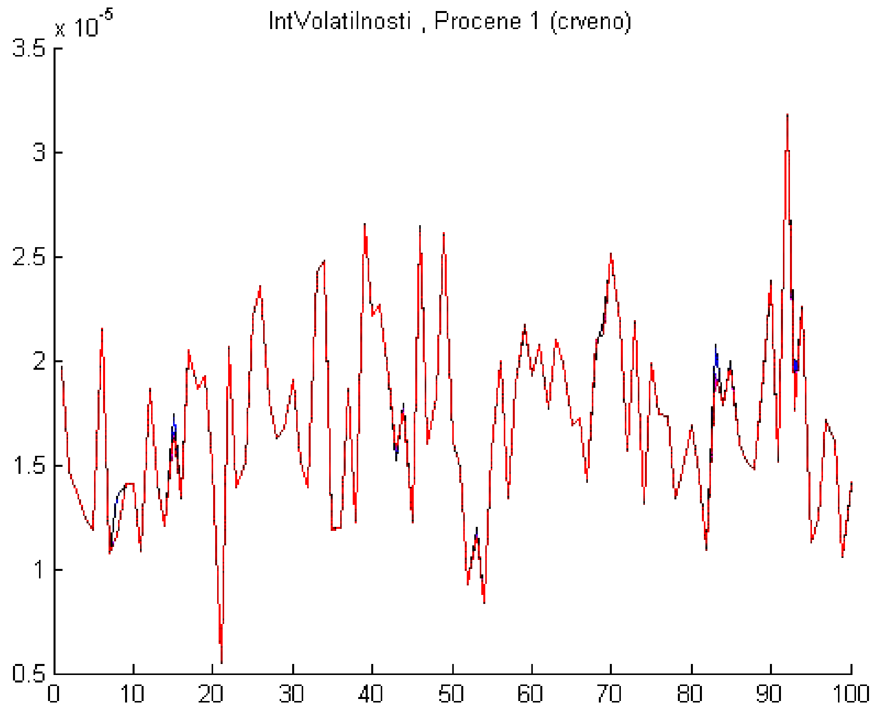
	Peti estimator $[Y,Y]_T^{(\boldsymbol{all})}$	*Četvrti estimator* $[Y,Y]_T^{(sparse)}$	*Treći estimator* $[Y,Y]_T^{(sparse,opt)}$	*Drugi estimator* $[Y,Y]_T^{(\boldsymbol{avg})}$	*Najbolji estimator* $\overline{\langle X,X\rangle}_T^{(adj)}$
Odstupanje (za mali uzorak)	1.1709×10^{-2}	3.9281×10^{-5}	1.1619×10^{-6}	5.0851×10^{-7}	8.3913×10^{-8}
Varijansa (za mali uzorak)	1.3123×10^{-4}	1.0406×10^{-5}	1.8023×10^{-6}	1.5985×10^{-6}	2.7555×10^{-7}
Relativno odstupanje (za mali uzorak)	738.35	2.4504	3.2469×10^{-2}	3.3243×10^{-2}	-3.5613×10^{-3}

Tabela 7.1. Rezultati simulacije za svih pet ocena, kada se koristi prvi predloženi način za optimizaciju parametara n i K; Korišćeni parametri u programu: K=100;X=2:7800; X2=2:7800; X3=10:11700; D=floor(N. / X3).

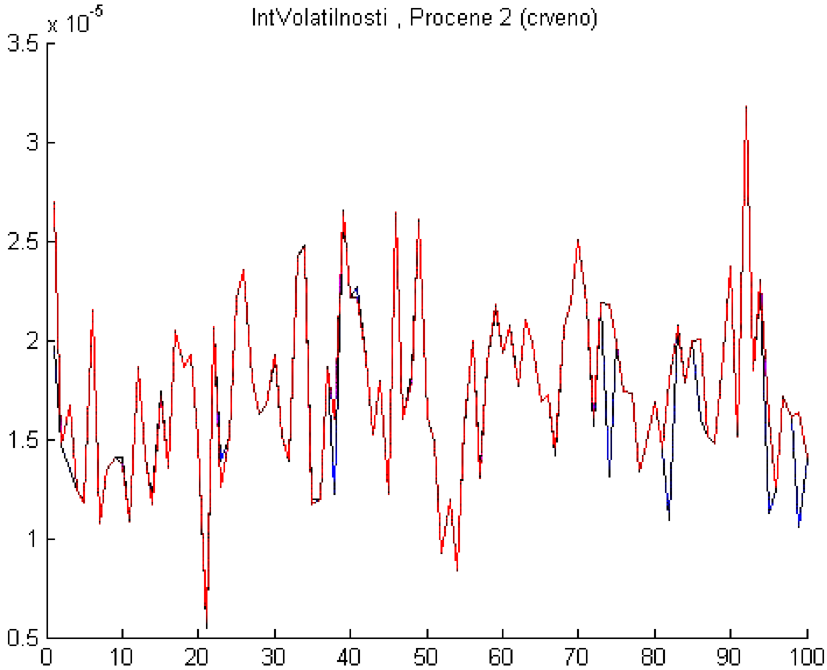
	Peti estimator $[Y,Y]_T^{(\boldsymbol{all})}$	*Četvrti estimator* $[Y,Y]_T^{(sparse)}$	*Treći estimator* $[Y,Y]_T^{(sparse,opt)}$	*Drugi estimator* $[Y,Y]_T^{(\boldsymbol{avg})}$	*Najbolji estimator* $\overline{\langle X,X\rangle}_T^{(adj)}$
Odstupanje (za mali uzorak)	1.1705×10^{-2}	3.5580×10^{-5}	7.0307×10^{-7}	1.1836×10^{-6}	5.3117×10^{-8}
Varijansa (za mali uzorak)	1.2676×10^{-4}	9.2826×10^{-6}	8.4088×10^{-7}	2.4089×10^{-6}	1.4911×10^{-7}
Relativno odstupanje (za mali uzorak)	709.47	2.1943	9.3347×10^{-3}	5.3349×10^{-2}	-1.0108×10^{-3}

Tabela 7.2. Rezultati simulacije za svih pet ocena, kada se koristi drugi način za optimizaciju parametara n i K; Korišćeni parametri u programu: K=100; S=Steps(N),X=S(2:end-2); X2=X; D=X.

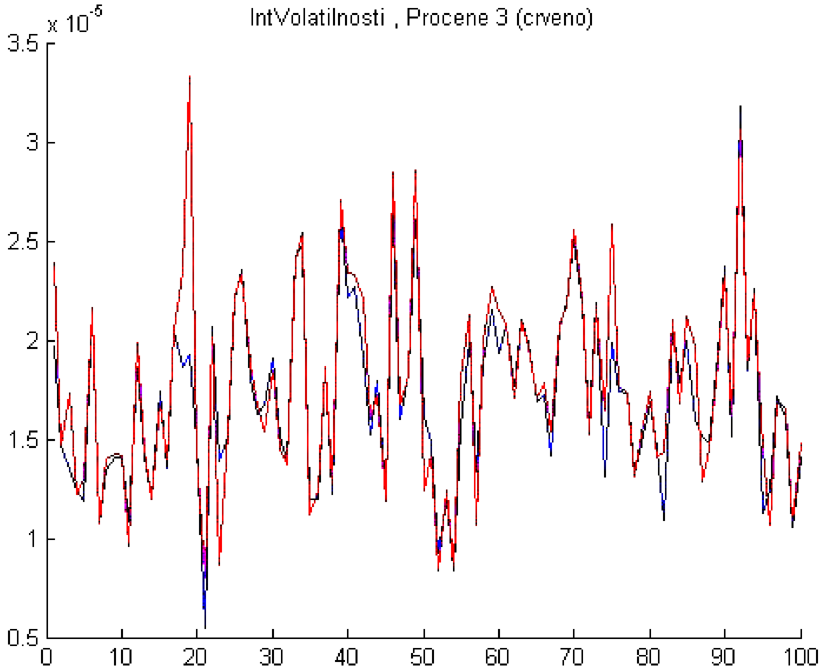
U nastavku izdvajamo slike *7.4., 7.5., 7.6., 7.7* i *7.8.* Navedene slike prikazaju koliko dobro date ocene procenjuju integrisanu volatilnost (IV) duž svih M=100 generisanih putanja. Na svakoj slici posebno, crvenom bojom prikazane su vrednosti odgovarajuće ocene, dok su plavom bojom prikazane vrednosti stvarne IV. Na osnovu ovih grafika mogu vizuelno da se uporede stvarne vrednosti IV i njihove ocene, koje ih procenjuju na svim putanjama. Možemo primetiti kako opada kvalitet procene počev od prve i zaključno sa petom ocenom, s tim što se odstupanje četvrte i pete ocene od stvarne vrednosti IV direktno uočava na grafiku. Na *grafiku 7.8*, možemo primetiti da peta ocena uopšte ne procenjuje stvarnu vrednost IV, kao što je to i izvedeno u *poglavlju 6*.



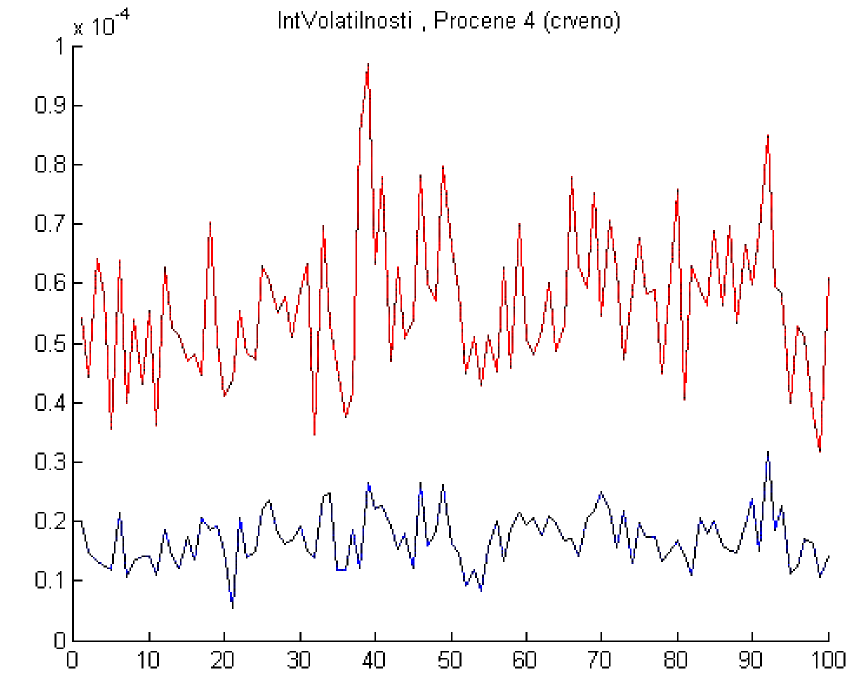
Slika 7.4. Odstupanje prve ocene od IV. Grafik prikazuje odstupanje prve ocene od stvarne vrednosti IV na svih M=100 generisanih Hestonovih putanja. Na y-osi, crvenom bojom prikazane su vrednosti prve ocene,dok su plavom bojom prikazane stvarne vrednosti IV.Primetimo da se vrednosti skoro poklapaju.



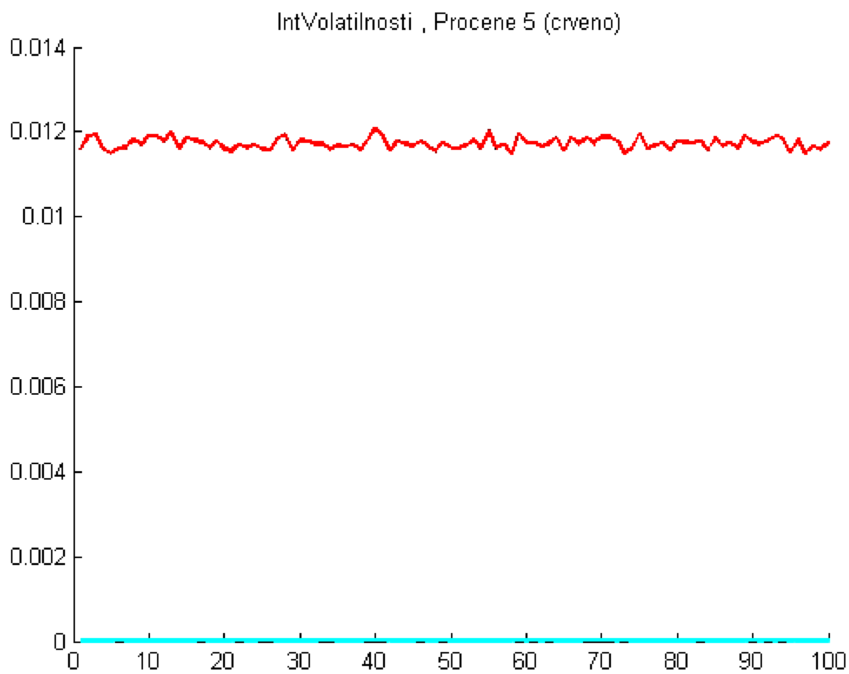
Slika 7.5. Odstupanje druge ocene od IV. Grafik prikazuje odstupanje druge ocene IV od stvarne vrednosti IV na svih M=100 generisanih Hestonovih putanja. Na y-osi, crvenom bojom prikazane su vrednosti druge ocene,a plavom bojom prikazane su stvarne vrednosti IV.Primetimo da se vrednosti manje poklapaju.



Slika 7.6. Odstupanje treće ocene od IV. Grafik prikazuje odstupanje treće ocene od stvarne vrednosti IV na svih M=100 generisanih Hestonovih putanja. Primetimo da se vrednosti vidno manje poklapaju nego kod druge i prve ocene. Što znači da prva i druga ocena bolje procenjuju IV kada je prisutan šum.

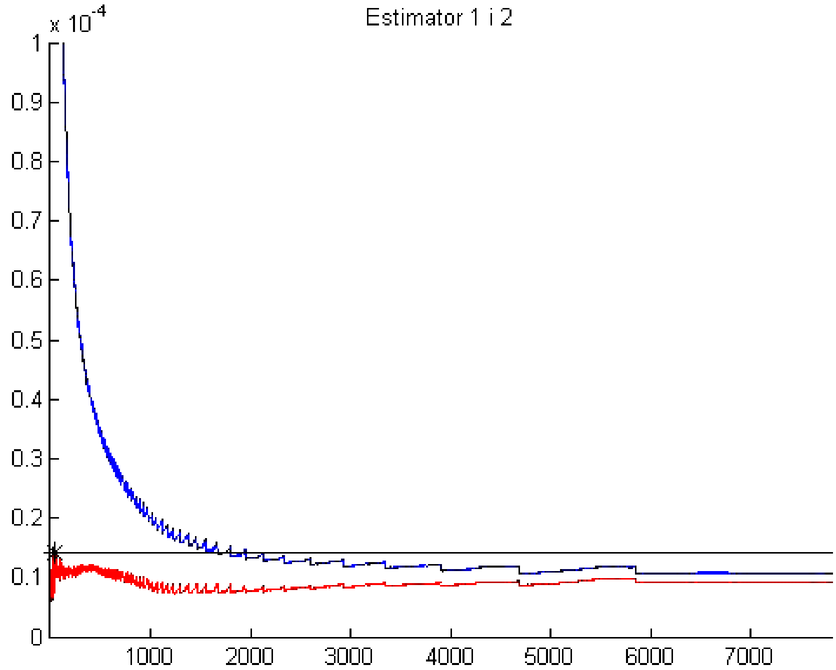


Slika 7.7. Odstupanje četvrte ocene od IV. Grafik prikazuje odstupanje četvrte ocene od stvarne vrednosti IV na svih M=100 generisanih Hestonovih putanja. Primetimo da se vrednosti ne poklapaju uopšte.



Slika 7.8. Odstupanje pete ocene od IV. Grafik prikazuje odstupanje pete ocene od stvarne vrednosti IV na M=100 Hestonovih putanja. Primetimo da peta ocena najgore procenjuje IV u odnosu na sve navedene ocene.

Na sledećoj slici prikazane su prva i druga ocena, tako da su obe reda veličine 10^{-4}.



Slika 7.9. Poređenje prve i druge ocene. Na ovoj slici prikazani su Grafici prve i druge ocene, pri čemu je prva ocena prikazana crvenom bojom, a druga plavom bojom. Crna zvedica predstavlja stvarnu vrednost IV. Može se primetiti sa grafika da je prva ocena stabilnija od druge.

7.3 Zaključak

Što se praktičnog dela i primene tiče, ovaj rad predočava doprinos ideje, izložene u radu [1] da se u standardan model za kretanje cena na tržištu uključi aditivni statistički šum, odnosno mikrostrukturni šum tržišta. Ukoliko se navedeni šum ne uključi u model, u radu [1] je pokazano da standardna ocena integrisane volatilnosti, tzv. realizovana volatilnost (RV) prilikom procene podataka sa visokom frekvencijom više procenjuje amplitudu šuma od stvarne integrisane volatilnosti, videti *sliku 7.8.* U radu je takođe pokazano i kako kvantitativno izmeriti vrednost mikrostrukturnog šuma (pomoću ocene $[Y,Y]_T^{(all)}$) i kako tu vrednost kasnije primeniti u daljim procenama.

Napomenuli smo u šestom poglavlju da je prilikom rada sa podacima visoke frekvencije, u praksi već ustaljena metoda proređenog uzorkovanja, odnosno odbacivanja velikog broja dostupnih podataka. U radu smo pokazali da je opravdano i da ima statističkog smisla koristiti takvu ocenu parametra, iako uobičajeni statistički principi ne nalažu odbacivanje podataka. Prilikom toga naglašavamo da u slučaju kada je amplituda šuma zanemarljiva u odnosu na broj poduzoraka, na osnovu leme 6.3 ima smisla koristiti navedenu metodu proređenog uzorkovanja, slika *7.7.* U tom slučaju, u radu se predlaže i kako optimizovati frekvenciju uzorkovanja, ukoliko se za ocenu integrisane volatilnosti izabere navedeni postupak, pogledati sliku *7.6.* Iz datih slika može se primetiti da ocena sa optimizovanom frekvencijom uzorkovanja bolja od ocene sa proizvoljnom.

Iako je u radu [1] pokazano da je statistički opravdano koristiti metod proređenog uzorkovanja za ocenu integrisane volatilnosti, ovde ipak predlažemo pouzdaniji metod raspodele dostupnih podataka ili opservacija na višestruke podmreže, tzv. zbirnu ocenu (zbirni estimator), *slika 7.5.* Takođe je utvrđeno da se najbolji rezultati dobijaju kombinovanjem klasične realizovane volatilnosti (brza vremenska skala - BVS) i nove zbirne ocene (spora vremenska skala - SVS), ali tako da se eliminiše odstupanje zbirne ocene. Prema tome,"najbolja ocena" nema odstupanje za razliku od prethodnih ocena, što može da se vidi i na *slici 7.4.* Imajući u vidu sve činjenice, važna poruka koja proizilazi iz ovog rada je sledeća:

Bez obzira koji model izaberemo za skriveni proces i bez obzira na tip podataka koje koristimo prilikom procene, uvek je bolje da se za ocenu integrisane volatilnosti koristi metod višestrukih podmreža, odnosno zbirni estimator nego metod proređenog uzorkovanja.

U ovom radu sažeta su najpoznatija dosadašnja saznanja i osnovne ideje vodilje efikasnog modeliranja finansijskog tržišta, koje nas upućuju od osnovnog pojma slučajnog procesa do složene konstrukcije tržišta. Ovaj rad predstavlja spoj teorijskog i praktičnog, jer na kraju predočava složenost postupaka korišćenih u praksi za predviđanje kretanja cena finansijskih instrumenata. Takođe, predlaže drugačiji način optimizacije ocena integrisane volatilnosti u odnosu na rad [1], kao i heuristiku koja znatno ubrzava određivanje optimalnih vrednosti parametara koji su neophodni za izračunavanje navedenih ocena.

8. Prilog A: Matematičke dopune

U ovom poglavlju ukratko ćemo navesti i delom objasniti osnovne matematičke pojmove, koji su neophodni za bolje razumevanje ovog rada, a nisu direktno vezani za temu slučajnih procesa, stohastičkih integrala, stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i finansijske matematike i njene primene u direktnim izračunavanjima određenih parametara u praksi. Prema tome, onaj ko je zainteresovan za detaljnije izučavanje ove teme, može da pogleda redom sledeće reference: [13] i [16] kao uvod u teoriju verovatnoće i njeno aksiomatsko zasnivanje; zatim [11] i [22] kao uvod u teoriju slučajnih procesa; reference [17] i [21] kao uvod u teoriju mere, ali sa osvrtom na prostor verovatnoće; reference [9], [15] i [18] za detaljniji matematički opis slučajnih procesa; i na kraju reference [19] i [20], koje se odnose na primenu teorije slučajnih procesa u finansijskoj matematici.

8.1 Pojmovi iz verovatnoće

Definicija 8.1 *(Merljiv prostor).* Neka je S proizvoljan neprazan skup i neka je $\mathcal{F}$ σ-polje (algebra) formirano iz podskupova skupa S. Uređeni par $(S,\mathcal{F})$ naziva se *merljivim prostorom,* dok se njegovi elementi nazivaju *merljivim skupovima*. Ukoliko je skup S jednak prostoru ishoda slučajnog eksperimenta: $S=\Omega$, onda se uređeni par $(\Omega,\mathcal{F})$ naziva *merljivim prostorom slučajnih događaja*.

Teorema 8.1 *(Borel-Kantelijeva lema).*

(i) Ako je $\{A_n\}$ proizvoljan niz događaja u nekom prostoru i ako važi nejednakost: $\sum_{n=0}^{\infty}P\{A_n\}<+\infty$, tada važi sledeći izraz:

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{A_n\}) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k) = 0\,.$$

Drugim rečima, ako je suma verovatnoća niza događaja $\{A_n\}$ konačna, tada je verovatnoća da će se desiti beskonačno mnogo takvih događaja $\{A_n\}$ jednaka nuli.

(ii) Ako je $\{A_n\}$ proizvoljan niz nezavisnih događaja i ako važi: $\sum_{n=0}^{\infty}P\{A_n\}=+\infty$, tada važi jednakost:

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{A_n\}) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k) = 1\,.$$

Teorema 8.2 *(Događaj generisan slučajnom promenljivom).* Neka je X slučajna promenljiva definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, tada važi da je familija $\sigma(X)=\{X^{-1}(B)\colon B\in\mathcal{B}\}$ σ–polje, koje nazivamo *σ–polje generisano slučajnom promenljivom* X i za njega važi: $\sigma(X)\subset\mathcal{F}$.

Definicija 8.2 *($\mathcal{G}$–merljivost).* Neka je X slučajna promenljiva definisana na nepraznom prostoru Ω i neka je $\mathcal{G}$ proizvoljno σ-polje podskupova Ω. Ako je svaki skup iz σ-polja generisanog slučajnom promenljivom X takođe i u σ-polju $\mathcal{G}$, odnosno ako važi $\sigma(X)\subset\mathcal{G}$, tada kažemo da je *slučajna promenljiva* X, *$\mathcal{G}$-merljiva.*

Primer 8.1

Kao primer merljive veličine navodimo proces koji opisuje trenutnu vrednost portfolia $\Delta(t)$ i koji se menja u vremenu. Porfolio je trenutna imovinska vrednost kojom investitor raspolaže na berzi. Portfolio zavisi od kretanja cena akcija, obveznica i robe na berzi, jer u odnosu na te cene investitor odlučuje kako će dalje ulagati sredstva. Matematički rečeno portfolio je $\mathcal{F}_t$-merljiv proces, tj. portfolio zavisi jedino od informacije koja je dostupna investitoru u datom trenutku t.

Napomena *Za $\mathcal{G}$-merljivu slučajnu promenljivu X, informacija u σ-polju $\mathcal{G}$ je dovoljna da se utvrdi vrednost promenljive X. Za $\mathcal{G}$-merljivu slučajnu promenljivu X i Borel-merljivu funkciju f važi da je $f(W)$ takođe $\mathcal{G}$-merljiva funkcija.Za $\mathcal{G}$-merljive slučajne promenljive X i Y i Borel-merljivu funkciju f važi da je $f(X,Y)$ takođe $\mathcal{G}$-merljiva funkcija. Odavde sledi da su i funkcije $X+Y$ i $X\cdot Y$ $\mathcal{G}$-merljive funkcije.*

8.2 Kvadratna varijacija i kovarijacija realne funkcije

Da bi se objasnio pojam kvadratne varijacije neophodno je navesti nekoliko osnovnih definicija. Konačan, uređen skup vremenskih trenutaka: $\{0=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=t\}$ naziva se *particija intervala* $[0,t]$ i označava se sa π. Najveće rastojanje između svih mogućih uzastopnih vremenskih trenutaka, koji su elementi particije π, naziva se *norma podele* i označava se sa $\|\pi\|=\max_{1\le i\le n}(t_i-t_{i-1})$, pogledati referencu [9].

Definicija 8.3 *(Varijacija funkcije).*Ako je g funkcija realne promenljive, tada *varijaciju funkcije g duž intervala* $[a,b]$ definišemo izrazom:

$$V_g([a,b])=\lim_{\|\pi\|_n\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|g(t_i^n)-g(t_{i-1}^n)\right| \tag{8.1}$$

Pri čemu se limes uzima duž niza particija, gde za svako fiksirano n, niz $\{a=t_0^n<t_1^n<\ldots<t_n^n=b\}$ predstavlja particiju intervala $[0,t]$ sa normom podele $\|\pi\|_n=\max_{1\le i\le n}(t_i^n-t_{i-1}^n)$.

Definicija 8.4 *(Funkcija ograničene varijacije).* Ako važi da je granična vrednost (8.1) konačna, odnosno ako važi: $V_g([a,b])<+\infty$ za svako t, tada funkciju g nazivamo *funkcijom ograničene varijacije na intervalu* $[a,b]$.

Napomena *Ako je g funkcija promenljive $t\ge 0$, tada je i varijacija funkcije g takođe funkcija promenljive t, odnosno važi: $V_g([0,t])=V_g(t)$. Pri tome, važi da je $V_g(t)$ rastuća funkcija po promenljivoj t.*
Ako je funkcija f ograničene varijacije onda je ona diferencijabilna skoro svuda.

Definicija 8.5 *(Kvadratna varijacija funkcije).* Ako je g funkcija realne promenljive, tada se *kvadratna varijacija funkcije g duž intervala* $[0,t]$ definiše kao granična vrednost (ako postoji) sledećeg izraza:

$$[g](t) = \lim_{\|\pi\|_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} (g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n))^2 , \tag{8.2}$$

gde se limes uzima duž particija $\{t_i^n\}$ sa normom podele: $\|\pi\|_n = \max_{1\le i\le n}(t_i^n - t_{i-1}^n)$[72].

Definicija 8.6 *(Kvadratna kovarijacija funkcije). Kvadratna kovarijacija ili samo kovarijacija funkcija f i g na intervalu* $[0,t]$ definiše se kao granična vrednost (ako postoji) sledećeg izraza:

$$[f,g](t) = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)) \cdot (g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n)) , \tag{8.3}$$

gde se limes uzima duž particija $\{t_i^n\}$ intervala $[0,t]$ i $\|\pi\|_n = \max_{1\le i\le n}(t_{i+1}^n - t_i^n)$.

Teorema 8.3

(i) Ako je g neprekidna funkcija ograničene varijacije tada je njena kvadratna varijacija jednaka nuli.

(ii) Ako je f neprekidna funkcija, a g funkcija ograničene varijacije, tada je njihova kovarijacija jednaka nuli: $[f,g](t) = 0$.

8.3 Kvadratna varijacija i kovarijacija slučajnog procesa

Definicija 8.7 *(π-kvadratna varijacija procesa).* Za proizvoljnu particiju $\pi=\{t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n\}$ na intervalu $[0,t]\subset[0,T]$ i za proizvoljan proces X_t koji je definisan na datom intervalu $[0,T]$, definišemo *π-kvadratnu varijaciju procesa X_t* kao slučajnu promenljivu oblika:

$$Q_\pi(X_t) = \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 .$$

Definicija 8.8 *(Kvadratna varijacija procesa).* Kvadratna varijacija procesa X_t definiše se sledećim izrazom:

$$[X]_t = [X,X]_t = \mathrm{P}\lim_{\|\pi\|_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 . \tag{8.4}$$

gde za svako fiksirano n, niz $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ predstavlja particiju intervala $[0,t]$.Konvergencija je u verovatnoći i uzima se duž datih particija, za koje važi da norma podele teži nuli: $\|\pi\|_n = \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$, $n\to\infty$, videti referencu [9].

Definicija 8.8a *(Kvadratna varijacija procesa).* Ako postoji proces V_t, takav da π-kvadratna varijacija $Q_{\pi n}(X_t)$ konvergira u verovatnoći prema tom procesu, pri čemu data konvergencija važi za svaki niz particija $\{\pi\}_n$ na interavlu $[0,T]$, za koje važi uslov: $\|\pi\|\to 0$, kada $n\to\infty$, tada proces V_t nazivamo *kvadratnom varijacijom* procesa X_t i računamo je kao:

$$[X]_t = \lim_{\|\pi\|_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 . \tag{8.5}$$

Napomena *Defnicije 8.8 i 8.8a su ekvivalentne.*

[72] Napominjemo da se u stohastičkom računu dati limes uzima duž onih particija, čija se norma podele smanjuje $\|\pi\|_n \to 0$, a ne duž svih mogućih particija.

Definicija 8.9 *(Kvadratna kovarijacija procesa). Kvadratna kovarijacija ili samo kovarijacija* definiše se kao granična vrednost opadajućeg niza particija na intervalu [0,T] i oblika je:

$$[X,Y]_t = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) . \tag{8.6}$$

8.4 L^p-prostori funkcija

Detaljno izloženu analogiju između pojmova iz teorije mere i pojmova iz teorije verovatnoće i slučajnih procesa možete naći u referencama [21], [22]. Neka je (S,Σ,μ) merljiv prostor, gde su S proizvoljan skup, Σ proizvoljno σ-polje i μ pozitivna mera.

Definicija 8.10 *(L^p-prostori funkcija).*Neka je f proizvoljna merljiva funkcija na prostoru (S,Σ,μ) i neka važi uslov $1\leq p<\infty$. Ako je ispunjen uslov: $\int_S |f|^p \, d\mu <+\infty$, tada kažemo da je funkcija f *p-integrabilna funkcija* i važi da je:$f \in L^p(S,\Sigma,\mu)$. Skup svih p-integrabilnih funkcija$L^p(S,\Sigma,\mu)$ je *normiran linearan vektorski prostor*, sa normom [73]:

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} . \tag{8.7}$$

Za $p=2$ dobijamo poseban slučaj prostora $L^2(S,\Sigma,\mu)$, koji predstavlja *normiran linearan vektorski prostor sa normom (Hilbertov prostor),* pri čemu je norma oblika:

$$\|f\|_2 = \left(\int f(x)^2 \, d\mu(x) \right)^{1/2} .$$

Definicija 8.11 *(L^∞-prostori funkcija).* Neka je f proizvoljna merljiva funkcija na prostoru (S,Σ,μ) i neka je $p=\infty$. Ako je $\| f \|_\infty < \infty$, tada kažemo da je funkcija f *beskonačno-integrabilna funkcija*, odnosno važi: $f \in L^\infty(S,\Sigma,\mu)$. Skup svih beskonačno-integrabilnih funkcija $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ *je normiran linearan vektorski prostor* sa normom:

$$\|f\|_\infty := \inf\{m \in R : \mu(\{|f| > m\}) = 0\} . \tag{8.8}$$

uz konvenciju da je inf∅=∞.

Napomena *Prisetimo se da je kompleksna merljiva funkcija f esencijalno ograničena na skupu S, ako je i funkcija |f| esencijalno ograničena odozgo na S. Skup svih takvih funkcija označavamo sa $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$. Prema tome, beskonačna norma je esencijalni supremum funkcije |f|, odnosno važi: $\|f\|_\infty$=supess|f|. Očigledno je da sledeća nejednakost važi skoro svuda na S: $|f| \leq \|f\|_\infty$.*

73 Napomenimo da na prostoru $L^p(S,\Sigma,\mu)$ oznaku $\|\cdot\|$ ne možemo da zovemo normom, jer ne zadovoljava treće svojstvo funkcije norme. Ovaj problem se zaobilazi tako što se uvodi relacija ekvivalencije u dati skup $f_1 \sim f_2$ akko $f_1(x) = f_2(x)$ skoro svuda.Novodobijeni prostor čiji su elementi klase ekvivalencije,tzv.količnički skup je sada normiran vektorski prostor i važi: $\mathbb{L}^p(S,\Sigma,\mu) := L^p(S,\Sigma,\mu)/\sim$.

8.5 L^p- prostori slučajnih promenljivih

Definicija 8.12 *(L^p- prostori slučajnih promenljivih).* Neka je X proizvoljna slučajna promenljiva na prostoru $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i neka je $1\leq p<\infty$. Ako važi da je $E|X|^p<\infty$, tada kažemo da je slučajna promenljiva X *p-integrabilna*, odnosno važi: $X\in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$. Skup svih p-integrabilnih slučajnih promenljivih $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ je *normiran linearan vektorski prostor* sa normom:

$$\|X\|_p=\left(E|X|^p\right)^{1/p}.$$

Definicija 8.13 *(L^2-prostori slučajnih procesa).* Neka je $f(\omega,t)$: $\Omega\times[0,T]\to R$ slučajan proces definisan na prostoru $(\Omega\times[0,T],\mathcal{F}\times\mathcal{B}([0,T]),P\otimes t)$. Oznaka t predstavlja Lebegovu meru na skupu $[0,T]$, dok oznaka $P\otimes t$ predstavlja meru na Dekartovom proizvodu prostora $\Omega\times[0,T]$ i važi $d(P\otimes t)=dp\times dt$.
Proces $X_t=f(\omega,t)$ je kvadratno integrabilan, odnosno $X_t\in L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{F}\times\mathcal{B}([0,T]),P\otimes t)$, ako ima konačnu normu oblika:

$$\int\limits_{\Omega\times[0,T]} f^2(\omega,t)\left(dP\times dt\right)<+\infty \Rightarrow E\left[\int_0^T f^2(\omega,t)\,dt\right]<+\infty. \tag{8.9}$$

Prostor $L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{F}\times\mathcal{B}([0,T]),P\otimes t)$, predstavlja skup svih integrabilnih slučajnih procesa i on je *normiran linearan vektorski prostor.*

Napomena *Na osnovu Koši-Švarcove nejednakost: $E\|X\cdot Y\|\leq\|X\|_2\cdot\|Y\|_2$, sledi da je dovoljno da su procesi X i Y p-integrabilni procesi, odnosno da važi: $X,Y\in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$, da bi njihov proizvod bio integrabilan, tj. da bi očekivanje njihovog proizvoda bilo konačno.*

8.6 Osobina kompletnosti L^p - prostora

Definicija 8.14 *(Košijev niz).* Niz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ u normiranom prostoru $(S,\|\cdot\|)$ je *Košijev niz*, ako elementi niza ispunjavaju sledeći uslov: $\lim\|X_n-X_m\|_2=0$, $n,m\to\infty$ [74].

Definicija 8.15 *(Kompletnost).* Metrički prostor se naziva *kompletnim* ukoliko u njemu svaki Košijev niz konvergira ka elementu datog prostora.

Definicija 8.16 *(Gust skup).* Skup A je svuda gust u skupu B, ako se u svakoj okolini proizvoljne tačke iz B nalazi bar jedna tačka iz A. Drugim rečima, za podskup A metričkog prostora B kažemo da je *svuda gust* u prostoru B, ako za svaki element $x\in B$ postoji niz $\{x_n\}\in A$, takav da je: $\lim\|x_n-x\|_B=0$, $n\to\infty$.

Teorema 8.4 *(Kompletnost L^p prostora funkcija).* Neka je $p\in[1,\infty]$, tada važi da su prostori $L^p(S,\Sigma,\mu)$ i $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ Banahovi prostori, što znači da su ujedno i kompletni i normirani.

Napomena *Specijalno, za $p=2$vektorski prostor $L^2(S,\Sigma,\mu)$ dobija strukturu Hilbertovog prostora sa skalarnim proizvodom, koji je definisan izrazom: $\langle f,g\rangle=\int_S f\cdot g\,d\mu$.*

[74] Košijev niz može da se definiše i na prostoru koji poseduje samo metriku d.

Teorema 8.5 *(Kompletnost L^p prostora slučajnih promenljivih).* Neka je ispunjen uslov $p\in[1,\infty]$. Prostor $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ je kompletan u sledećem smislu. Neka je $\{x_n\}$ Košijev niz u prostoru L^p, odnosno važi sledeći uslov: lim $\|X_n - X_m\|_p=0$, $n,m\to\infty$, tada postoji granična vrednost datog niza $X\in L^p$, takva da važi: lim $\|X_n - X\|_p=0$, kada $n\to\infty$. Granična vrednost X je jedinstvena u smislu da ako postoji granična vrednost $X'\in L^p$, tada za nju važi: $\|X - X'\|_p=0$.

Napomena *Specijalno,za $p=2$ vektorski prostor $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ dobija strukturu Hilbertovog prostora sa skalarnim proizvodom, koji je definisan izrazom: $\langle X,Y\rangle:=E(X\cdot Y)$.*

8.7 Ortogonalnost funkcija

Definicija 8.17 *(Ortonormiran skup).*Prebrojiv skup funkcija $\{\phi_n\}\in L^2[0,1]$, $0\leq n<\infty$ je *ortonormiran skup*, ako važi: $\langle\phi_n,\phi_n\rangle=\|\phi_n\|_2=1$ i $\langle\phi_n,\phi_m\rangle=0$, za sve $m\neq n$.

Neka je $H_n=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i :\alpha\in R^n\}$ konačan skup svih linearnih kombinacija proizvoljnog skupa$\{\phi_n\}$[75], koji ne mora da bude ortonormiran.Tada za proizvoljnu funkciju f iz prostora $L^2[0,1]$ važi sledeće tvrđenje:

$$\hat{f}_n=\sum_{i=1}^{n}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i\ .$$

Definicija 8.18 *(KONB).*Za ortonormiran skup $\{\phi_n\}$ kažemo da je *kompletna ortonormirana baza*, ako skup svih njenih linearnih kombinacija H_n formira gust skup u prostoru $L^2[0,1]$. Ekvivalentno, skup$\{\phi_n\}$ je *KONB*, ako za proizvoljnu funkciju $f\in L^2[0,1]$, važi sledeće tvrđenje:

Ako je $f\perp\phi_i$, za svako i, tada je $f=0$.

Navodimo dve važne osobine kompletnih ortonormiranih skupova:

(i) Za proizvoljnu funkciju $f\in L^2[0,1]$ važi sledeće tvrđenje:

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f-\sum_{n=0}^{N}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n\right\|_2=0\,, \tag{8.11}$$

Drugim rečima, proizvoljna funkcija $f\in L^2[0,1]$ može se predstaviti u sledećem obliku:

$$f=\sum_{n=0}^{N}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n\ . \tag{8.12}$$

(ii) Za KONB važi *Parsevalov identitet*:

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\langle g,\phi_n\rangle\,. \tag{8.13}$$

Primetimo da pomoću Parsevalovog identiteta skalarni proizvod možemo da predstavimo na dva načina.

Lema 8.1 *(Granična vrednost neprekidnih funkcija).* Neka je funkcija f_n: $[0,1]\to R$, $n=1,2,..$neprekidna funkcija i pretpostavimo da f_n uniformno (ravnomerno) konvergira prema funkciji f, odnosno za dato $\varepsilon>0$ postoji broj N, takav da za svako $n\geq N$, važi: $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$, za proizvoljno $t\in[0,1]$. Tada je *f neprekidna funkcija*.

Napomena *Napominjemo da navedene definicije u poglavlju 8.6 ostaju ispravne kada umesto intervala [0,1] izaberemo proizvoljan interval **I**.*

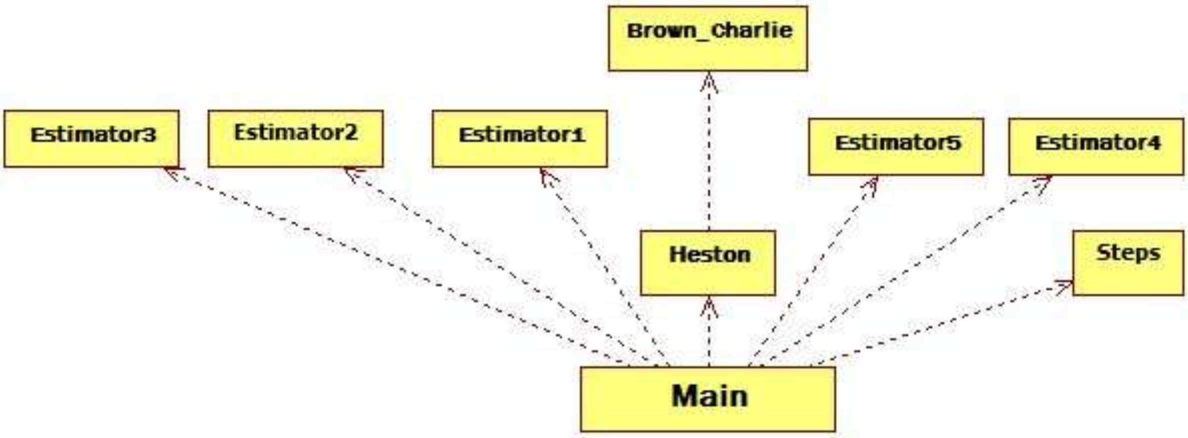
[75] H_n je linearni podprostor obuhvaćen bazom$\{\phi_n\}$.

9. Prilog B: Programi u Matlab-u

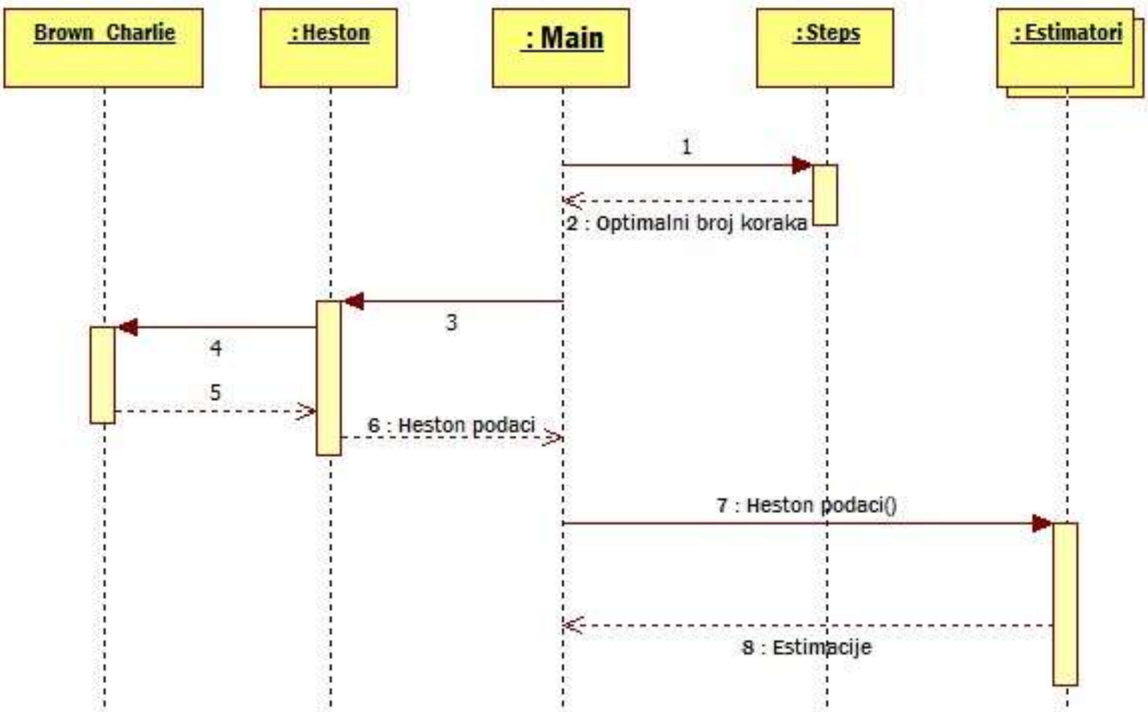
U ovom poglavlju prikazaćemo i ukratko objasniti program koji je napisan u Matlab-u i koji se u ovom radu koristi za simulaciju Hestonovog procesa cena, zatim za izračunavanje ocena integrisane volatilnosti, kao i za iscrtavanje grafika opisanih u poglavlju sedam. Pogledati ref. [6] za bolje snalaženje u okruženju programa Matlab, kao i ref. [7] za detaljnije objašnjenje različitih tehnika simulacije slučajnih procesa u Matlabu. Program se sastoji iz više delova. Centralni je Main program, koji se poziva od strane korisnika, dok su ostali delovi zasebne funkcije. Od funkcija najvažnija je Heston, koja se poziva iz Main programa i služi za generisanje jedne Hestonove putanje, odnosno procesa cena X_t i njemu odgovarajućeg procesa Y_t, na koji se dodaje efekat šuma. Dalje, funkcije sa imenom Estimatori računaju odgovarajuće vrednosti ocena integrisane volatilnosti, koje su najoptimalnije. Za kraj, ostaju takođe neophodne funkcije Steps i Brown_Charlie, pri čemu se Steps funkcija koristi kao heuristika za prvi i drugi estimatora, dok se funkcija Brown_Charlie koristi za generisanje Braunovog kretanja.

Simulacija se pokreće pozivom programa Main, koji izračunava rezultate opisane u sedmom poglavlju za M=100 trajektorija. Napominjemo da program Main prvo poziva funkciju Heston, a zatim prosleđuje podatke o njenoj trenutnoj trajektoriji ostalim estimatorskim funkcijama, koje na zadatoj trajektoriji računaju ocene integrisane volatilnosti. Kasnije tokom programa se određuju srednje vrednosti odstupanja navedenih estimatora od integrisane volatilnosti.

Na *slikama 9.1. i 9.2.* prikazani su redom dijagram strukture programa i dijagram uzajamne povezanosti pojedinih delova programa, na kome se, takođe mogu videti i tokovi informacija između navedenih delova glavnog programa.



Slika 9.1. Dijagram strukture programa i njihove uzajamne povezanosti.



Slika 9.2. Prikaz nivoa povezanosti i toka podataka između funkcija i glavnog programa.

```
%% PROGRAM MAIN

%% inicijalizacija
clc;
close all;
clear all;

%% konstante
T = 1/252;
N = 23400;

%% inicijalizacija petlje
K = 100;

if K<=20
    doPlots = 1;
else
    doPlots = 0;
end

Procene_5 = zeros(1, K);
Procene_4 = zeros(1, K);
Procene_3 = zeros(1, K);
Procene_2 = zeros(1, K);
Procene_1 = zeros(1, K);
IntVolatilnosti = zeros(1, K);

%tabela 7.1.
%X = 2:7800;
%X2 = 2:7800;
%X3 = 10:11700;
%D = floor(N./X3);

%tabela 7.2.
S = Steps(N);
X = S(2:end-2); %X = S(30:end-2);
X2 = X;
D = X;

%% petlja
for i=1:K
    disp(i);
    [Ycena_t, Xt, IntVolatilnosti(i), eta_kvadrat] = Heston(T, N);

    Procene_5(i) = Estimator_5(Ycena_t);
    Procene_4(i) = Estimator_4(Ycena_t);

    [Procene_3(i) data] = Estimator_3(Ycena_t, IntVolatilnosti(i), D);
    if doPlots ~= 0
        figure(3), hold on, title('Estimator 3');
        plot(D, abs(data-IntVolatilnosti(i)));
    end

    [Procene_2(i) data2] = Estimator_2(Ycena_t, IntVolatilnosti(i), X2);
    if doPlots ~= 0
        figure(2), hold on, title('Estimator 2');
```

```
        plot(X2, abs(data2-IntVolatilnosti(i)));
    end

  [Procene_1(i) data1 index1] = Estimator_1(Ycena_t, IntVolatilnosti(i), X,
   Procene_5(i));
    if doPlots ~= 0
        figure(1), hold on, title('Estimator 1');
        plot(X, abs(data1-IntVolatilnosti(i)));
    end
    %if doPlots ~= 0
    %    figure(5), hold on, title('Estimator 1 i 2');
    %    axis([min(X),max(X),0,10^(-4)]);hold on;
    %    plot(X, data1,'-r');hold on;
    %    plot(X, data2);
    %end
end

figure(4), hold on, title('Estimator 1 i 2');
axis([min(X),max(X),0,10^(-4)]);hold on;
plot(X, data1,'-r');hold on;
plot(X2, data2);hold on;
plot(X,IntVolatilnosti(i),'-k');hold on;
plot(index1,IntVolatilnosti(i),'*k','markersize',10);

%% rezultati
Greske_5 = abs(Procene_5-IntVolatilnosti);
Rezultati(5) = mean(Greske_5);
Devijacije(5) = std(Greske_5);
Rel_Rezultati(5) = mean((Procene_5-IntVolatilnosti)./IntVolatilnosti);
(Procene_5(i)-IntVolatilnosti(i))./IntVolatilnosti(i)

Greske_4 = abs(Procene_4-IntVolatilnosti);
Rezultati(4) = mean(Greske_4);
Devijacije(4) = std(Greske_4);
Rel_Rezultati(4) = mean((Procene_4-IntVolatilnosti)./IntVolatilnosti);

Greske_3 = abs(Procene_3-IntVolatilnosti);
Rezultati(3) = mean(Greske_3);
Devijacije(3) = std(Greske_3);
Rel_Rezultati(3) = mean((Procene_3-IntVolatilnosti)./IntVolatilnosti);

Greske_2 = abs(Procene_2-IntVolatilnosti);
Rezultati(2) = mean(Greske_2);
Devijacije(2) = std(Greske_2);
Rel_Rezultati(2) = mean((Procene_2-IntVolatilnosti)./IntVolatilnosti);

Greske_1 = abs(Procene_1-IntVolatilnosti);
Rezultati(1) = mean(Greske_1);
Devijacije(1) = std(Greske_1);
Rel_Rezultati(1) = mean((Procene_1-IntVolatilnosti)./IntVolatilnosti);

%% plots
figure(50), title('IntVolatilnosti , Procene 5 (crveno)'), hold on;
plot(IntVolatilnosti);
plot(Procene_5, 'r');
```

```
figure(40), title('IntVolatilnosti , Procene 4 (crveno)'), hold on;
plot(IntVolatilnosti);
plot(Procene_4, 'r');

figure(30), title('IntVolatilnosti , Procene 3 (crveno)'), hold on;
plot(IntVolatilnosti);
plot(Procene_3, 'r');

figure(20), title('IntVolatilnosti , Procene 2 (crveno)'), hold on;
plot(IntVolatilnosti);
plot(Procene_2, 'r');

figure(10), title('IntVolatilnosti , Procene 1 (crveno)'), hold on;
plot(IntVolatilnosti);
plot(Procene_1, 'r');

%% cleanup
clear Procene_1;
clear Procene_2;
clear Procene_3;
clear Procene_4;
clear Procene_5;

clear Greske_1;
clear Greske_2;
clear Greske_3;
clear Greske_4;
clear Greske_5;

clear Ycena_t;
clear IntVolatilnosti;
clear eta_kvadrat;

clear i;
clear data;
clear D;
clear S;
clear K;
clear N;
clear T;
clear X;
clear Xt;
clear doPlots;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% Heston

function [Ycena_t, Xcena_t, Integrisana_volat_T,eta_kvadrat] = Heston(T, M)

alfa = 0.04; k = 5; gama = 0.5; Rho = -0.5;
mi   = 0.05;

%==========================================================
%DELTA_t = T / M;
FAKTOR = 4;
N = M * FAKTOR;
delta_t = T / N;
t = [delta_t:delta_t:T];

%==========================================================
Brown_inc = zeros(1,N-1);
% Formiramo Braunovo kretanje Bt pomocu funkcije ''Brown_charlie''
Bt = Brown_Charlie(T,N-1);
%plot(Bt);

% Formiramo niz Braunovih inkremenata duz generisane putanje Bt
Brown_inc(1:(N-1)) = Bt(2:N) - Bt(1:(N-1));

%==========================================================
%   Formiramo niz Wt_inc koji je nezavisan od Brown_inc   %
%==========================================================
% Zt - je standardna Gausova sl.pr.
Zt = randn(1,N-1);

% Generisanje Braunovog kretanja Wt, koje je nezavisno od Bt
Wt_inc = sqrt(1-Rho^2)* [Zt*sqrt(delta_t)] + Rho*Brown_inc;

%==========================================================
%   Generisanje suma:     Epsilon_t ~ N( 0,E[epsilon^2] )
%==========================================================

var_epsilon = 0.0005^2;

% Formiranje belog shuma i izlazne promenljive koja ga opisuje
Epsilon_t = sqrt(var_epsilon) * randn(1,N);

%==========================================================
%   Formiranje procesa Volatilnosti Vt
%==========================================================

% Alokacija promenljive Vt koja ima N vrednosti
% Inicijalizacija pocetne vrednosti procesa volatilnosti (0.01 ; 0.4)
Vt    = zeros(1,N);
Vnula = 0.004;
Vt(1) = Vnula;

count = 0;
for j = 2:N
    % Jednacina volatilnosti iz Hestonovog modela
    Vt(j) = Vt(j-1);
    Vt(j) = Vt(j) + k*(alfa - Vt(j-1))*delta_t;
```

```
    Vt(j) = Vt(j) + gama*sqrt(Vt(j-1))*Wt_inc(j-1);

    if (Vt(j)<0)
        count = count + 1;
    end
end;

if (count>0)
    disp('ABORT ABORT');
    disp(count);
end

%==========================================================
%   Formiranje procesa cena Xt na intervalu [0,T], T<1
%==========================================================

Xt = zeros(1,N);
Yt = zeros(1,N);
Xnula = 1;
Xt(1) = Xnula;
Yt(1) = Xt(1)+Epsilon_t(1);

for j = 2:N
    Xt(j) = Xt(j-1) + (mi - Vt(j-1)/2)*delta_t + sqrt(Vt(j-1))*Brown_inc(j-
1);
    Yt(j) = Xt(j)+Epsilon_t(j);
end;

% Izlazna promenljiva koja opisuje posmatrani proces cena Ycena_t
 Ycena_t = downsample(Yt, FAKTOR);
 Xcena_t = downsample(Xt, FAKTOR);

%==========================================================
%   INTEGRISANA VOLATILNOST <X,X>_T     %%
%==========================================================
%     Izracunavanje vrednosti integrisane volatilnosti
% za zadati proces Xt i odgovarajuci proces volatilnosti Vt
%==========================================================
%   Integrisanu volatilnost procesa Xt racunamo prema formuli:
%      <X,X>_T = INTEGRAL_0_T [(sigma_t)^2 *dt]
%              = INTEGRAL_0_T [Vt*dt]
%              = SUMA_0_T [Vti*(t(i+1)-ti)]
%              = SUMA_0_T [Vti*(t(i+1)-ti)]
%              = delta_t * SUMA_0_T [ Vti ]

% Izracunavanje integrisane volatilnosti <X,X>_T na intervalu delta_t
Integrisana_volat_T = delta_t * sum(Vt);


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% Brown_Charlie

function x = Brown_Charlie(T,N)
x = [0; cumsum(randn(N,1))]/sqrt(N);
x = x * sqrt(T);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% STEPS

% STEPS vraca elementalne korake podmreza
% optimizacija bazirana na cinjenici da zaokruzivanje stvara ponavljanja
function [ x ] = Steps(N)
x = [1];
for i = N:-1:1
    f = floor(N/i);
    if f ~= x(end)
        x(end+1) = f;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Estimator_5

function [V_estimator] = Estimator_5(Ycena_t)
V_estimator = sum(  [ diff(Ycena_t) ].^2  );

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Estimator_4

function [IV_estimator] = Estimator_4(Ycena_t)
% Vrem.skala t_sparse uzima svaki 300-ti podatak.
% Proces Ycena_t_sparse se sastoji iz svake 300-te vrednosti
% polaznog procesa Ycena_t_all pocev od indeksa 1.

Ycena_t_sparse = downsample(Ycena_t, 300);
IV_estimator = sum(  diff(Ycena_t_sparse) .^2  );

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Estimator_3

function [III_estimator data] = Estimator_3(Ycena_t, IntVolatilnost, S)
data = [];
for step = S
    temp = downsample(Ycena_t, step);
    data(end+1) = sum(  (diff(temp) ).^2  );
end
[m index] = min(abs(data-IntVolatilnost));
III_estimator = data(index);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% Estimator_2

function [II_estimator data] = Estimator_2(Ycena_t, IntVolatilnost, S)
N = length(Ycena_t);
data = [];
for step = S
    x = step;
    y = floor(N/x);
    temp = reshape(Ycena_t(1:x*y), x, y)';
    data(end+1) = mean(sum((diff(temp) ).^2));
end
[m index] = min(abs(data-IntVolatilnost));
II_estimator = data(index);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Estimator_1

function [I_estimator data index] = Estimator_1(Ycena_t, IntVolatilnost, S,
V_estimator)
N = length(Ycena_t);
data = [];
for step = S
   x = step;
   y = floor(N/x);
   temp = reshape(Ycena_t(1:x*y), x, y)';
   data(end+1) = mean(sum((diff(temp) ).^2)) - (y/N)*V_estimator;
end
[m index] = min(abs(data-IntVolatilnost));
I_estimator = data(index);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Literatura

[1] Yacine AïT-Sahalia, Per A. Mykland, Lan Zhang, *A tale of two time scales: Determing Integrated Volatility with Noisy High-Frequency Data*, Journal of the American Statistical Association 100 (2005), 1394-1411.

[2] Yacine AïT-Sahalia, Per A. Mykland, Lan Zhang, *Ultra High Frequency Volatility Estimation with Dependent Microstructure Noise*, This Version: May 11. 2005.

[3] Tomas Björk, ''Arbitrage Theory in Continuous Time'', Oxford University Press, 2004.

[4] Mark H. A. Davis, ''Construction of Brownian Motion'', Lecture notes, 2004.

[5] Lawrence C. Evans, '' An Introduction to Stochastic Differential Equations ''.

[6] Amos Gilat, ''Uvod u Matlab 7 sa primerima – prevod drugog izdanja'', John Wiley & Sons, Inc, 2004.

[7] Desmond J. Higham, *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM Review 43 (2001), 525-546.

[8] Steven L. Heston, *A clossed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currancy Options*, The Review of Financial Studies 6 (1993), 327-343.

[9] Fima Klebaner, ''Introduction to Stochastic Calculus with Applications'', Imperial College Press, 2004.

[10] Steven P. Lalley, ''Lecture 6 - The Itô Integral'', Mathematical Finance 345 course, 2001. http://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/390/index.html

[11] Jovan Mališić, ''Slučajni procesi - teorija i primene'', IRO Građevinska knjiga Beograd, 1989.

[12] Marek Musiela, Marek Rutkowski, ''Martingale Methods in Financial Modelling'', Springer, Second Edition, 2008.

[13] Milan Merkle, ''Verovatnoća i statistika'', Akademska misao Beograd, 2002.

[14] Peter Mörters, Yuval Peres, ''Brownian Motion'', Draft version, 2008.

[15] Peter Medvegyev, ''Stochastic integreation theory'', Oxford University Press, 2007.

[16] Pavle Mladenović, ''Verovatnoća i statistika'', Matematički fakultet Beograd, 2005.

[17] David Pollard, ''A User's Guide to Measure Theoretic Probability'', Cambridge University Press, 2002.

[18] J.Michael Steele, ''Stochastic Calculus and Financial Applications'', Springer, 2003.

[19] Steven E. Shreeve, ''Stochastic Calculus for Finance I – The Binomial Asset Pricing Model'', Springer, 2004.

[20] Steven E. Shreeve, ''Stochastic Calculus for Finance II – Continuous-Time Models'', Springer, 2004.

[21] P.C.J. (Peter) Spreij, ''Measure theoretic probability'', Lecture notes, 2008. http://staff.science.uva.nl/~spreij/onderwijs/master/mtp.pdf

[22] P.C.J. (Peter) Spreij, ''Background notes to course Stochastic Processes'', Lecture notes, 2009. http://www.math.leidenuniv.nl/~spieksma/colleges/sp-master/BN1.pdf

[23] Wikipedia 2009, http://en.wikipedia.org/wiki/Financial_markets.