

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

**HESTON-OV MODEL I OCENJIVANJE**  
**IMPLICIRANE VOLATILNOSTI**

MASTER RAD

Mentor:

Prof. dr. Milan Merkle

Kandidat:

Dipl. inž. Boris Aleksić

Beograd, septembar 2011.

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2. Matematička i finansijska objašnjenja</b>	<b>5</b>
2.1. Objašnjenja određenih finansijskih pojmova	5
2.2. Opcije	6
2.3. Neke važnije teoreme i definicije	7
<b>3. Black-Scholes (BS) model</b>	<b>14</b>
3.1. Postavka BS modela	14
3.2. Izvođenje i implikacije BS modela	14
3.2.1. Replicirajući portfolio i parcijalna diferencijalna jednačina BS modela	14
3.2.2. Izvođenje BS formule za cenu evropske call opcije	16
3.2.3. Određivanje cene evropske put opcije	20
<b>4. Implicirana volatilnost</b>	<b>21</b>
4.1. Pojam implicirane volatilnosti	21
4.2. Opcije bazirane na stranoj valuti ( <i>Foreign currency options, FOREX options</i> )	22
4.3. Opcije na akcije ( <i>Equity options</i> )	23
4.4. Finansijski instrumenti bazirani na impliciranoj volatilnosti	24
<b>5. Modeli stohastičke volatilnosti. Heston-ov model</b>	<b>25</b>
5.1. Modeli stohastičke volatilnosti	25
5.2. Postavka Heston-ovog modela	25
5.3. Izvođenje Heston-ovog rešenja za cenu evropske call opcije	27
5.3.1. Replicirajući portfolio i parcijalna diferencijalna j-na Heston-ovog modela	27
5.3.2. Rešenje Heston-ove parcijalne diferencijalne j-ne za cenu evropske call opcije	28
5.3.3. Heston-ova karakteristična funkcija	31
5.3.4. Heston-ovo kvazi-analitičko rešenje za cenu evropske call opcije	34
<b>6. Opis i rezultati simulacije</b>	<b>36</b>
6.1. Šema transformisane volatilnosti	36
6.1.1. Metod momenata (" <i>Moment-matching</i> ")	40

6.2. Šema simulacije za <i>Heston</i> -ovu aproksimaciju	41
6.3. Kalibracija parametara	42
6.4. Rezultati simulacije za cenu evropske <i>call</i> opcije	43
6.5. Simulacija implicirane volatilnosti	46
<b>7. Zaključak</b>	<b>48</b>
<b>Literatura</b>	<b>49</b>

## 1. Uvod

Slom finansijskih tržišta 2007. i 2008. godine doveo je do osveščavanja prosečnog čoveka o tome šta zaista reč "finansije" znači i koliki uticaj ima na svakodnevni život. Može se reći da je finansijska nauka jedna od najmlađih nauka koje danas postoje, i nauka u čije se istraživanje sve više i više ulaže. Naspram uvreženog mišljenja da su finansijski stručnjaci pomalo arogantni i samoživi milioneri koji samo hoće da izvuku što više para od koga god mogu, pravi finansijski stručnjaci su ljudi sa dobrim razumevanjem matematike i programiranja, a finansijska nauka je egzaktna nauka koja pokušava da tačno pronikne u uzročno-posledične veze koje se javljaju na finansijskim tržištima. Danas se finansije mogu definisati na veliki broj načina i obuhvataju veliki broj oblasti. Iako postoji razgraničenje između toga šta obuhvataju finansije, a šta ekonomija, te dve nauke su neraskidivo povezane i jedna se ne može posmatrati bez druge. Jedan od važnijih rezultata za finansijsku nauku bila je pojava stohastičkog računa. To je umnogome doprinelo lakšem opisu raznih veličina čija se stohastička priroda sada mogla opisati jednačinama i procesima. Čak se može reći da su mnogi noviji rezultati u stohastičkom računu posledica ulaganja sredstava u istraživanje finansijske nauke koja se, slobodno rečeno, zasniva na tom istom stohastičkom računu. Nije stoga ni čudo što su neki od najboljih finansijskih stručnjaka današnjice ljudi čija su primarna interesovanja bila matematika, elektrotehnika, fizika, računarstvo... Danas, kada je ekonomska kriza još uvek u toku, može se reći da se finansijska nauka razvija brže nego ikad.

Jedan od najvažnijih rezultata u finansijskoj nauci do današnjeg dana je rad *Fischer-a Black-a* i *Myron-a Scholes-a* (videti [BS]) objavljen 1973. godine. U pomenutom radu su dvojica autora prvi uspeli da dobiju zatvoreno analitičko rešenje za cenu opcije i potpuno promenili način vrednovanja svih finansijskih instrumenata. Iako je njihov model bio zasnovan na određenom broju nerealnih pretpostavki, ipak je predstavljao važan rezultat koji je kulminirao Nobelovom nagradom za ekonomiju. Bez nekih od tih pretpostavki se jednostavno nije moglo, dok su druge brzo oslabljene. Jedna od pretpostavki koja je brzo ostala bez oslonca je bila ona o konstantnoj volatilnosti, što je dovelo do pojave modela stohastičke volatilnosti. Pokazalo se da ovi modeli mnogo bolje opisuju stanje na tržištu od jednostavne *Black-Scholes* formule, pa su uskoro ušli u široku upotrebu. Profesor *Steven Heston* sa *Yale* univerziteta je 1993. objavio rad u kome je predložio model stohastičke volatilnosti za koji je uspeo da izvede kvazi-analitičko rešenje. Ovaj model se pokazao veoma adekvatnim i danas predstavlja najčešće korišćeni model stohastičke volatilnosti.

## **2. Matematička i finansijska objašnjenja**

### **2.1. Objašnjenja određenih finansijskih pojmova**

Finansijski instrument - Predstavlja bilo kakvu hartiju od vrednosti (keš, akcije, obveznice, opcije ...) ili robu (nafta, zlato, benzin, nakit, slike ...) kojom se može trgovati. Osnovna podela finansijskih instrumenata je na osnovne i izvedene. Osnovni finansijski instrumenti su oni čija funkcija isplate ne zavisi ni od jednog drugog finansijskog instrumenta. Primeri osnovnih finansijskih instrumenata su akcije, obveznice, zlato, srebro, nafta ... Za razliku od osnovnih, izvedeni finansijski instrumenti imaju funkciju isplate koja zavisi od jednog ili više drugih finansijskih instrumenata koji mogu biti ili osnovni ili opet izvedeni. Primer izvedenih finansijskih instrumenata su opcije (funkcija isplate koja zavisi od osnovnog finansijskog instrumenta, obično akcije), benzin (tržišna vrednost je funkcija tržišne cene osnovne sirovine za preradu, nafte) itd.

Portfolio - U finansijskom smislu predstavlja ponderisan skup finansijskih instrumenata koje drži pojedinačni investitor ili finansijska institucija (banka, kompanija ...). Ponderi predstavljaju broj jedinica svakog pojedinačnog finansijskog instrumenta u portfoliju, dok je vrednost portfolia zbir ponderisanih vrednosti svih finansijskih instrumenata.

Prinos ("*Rate of return*") - Predstavlja meru profita, odnosno gubitka, određenog finansijskog instrumenta ili robe u određenom intervalu vremena. Prinos se obračunava na dva načina: prosti prinos  $(V_t - V_0)/V_0$  i složeni (logaritamski) prinos  $\ln(V_t/V_0)$ , gde  $V_t$  predstavlja vrednost instrumenta u trenutku  $t$ , a  $V_0$  vrednost instrumenta u početnom trenutku.

Arbitraža ("*Arbitrage*") - Predstavlja praksu zarade na razlici cena istog finansijskog instrumenta ili robe na različitim tržištima, ili pak kod različitih prodavaca. Nastaje kao posledica disbalansa cena, i za posledicu ima smanjenje tog disbalansa dok se ne dođe do ravnoteže. Arbitraža se može definisati i kao postojanje pozitivne verovatnoće za dobitak bez ulaganja i ona nema negativne novčane tokove. Postoji čak i poseban naziv za investitore koji se bave pronalaženjem mogućnosti za arbitražu na tržištu, i oni se zovu arbitražerima.

"*Short-selling*" - Tzv. prodaja na kredit je praksa na finansijskim tržištima da se proda određeni broj finansijskih instrumenata pozajmljenih od treće strane za određenu kompenzaciju, pod uslovom da se u nekom određenom roku ti isti instrumenti vrate prvobitnom vlasniku. Ovo se radi u očekivanju adekvatne promene vrednosti određenih finansijskih instrumenata i predstavlja kontroverznu metodu zarade oko koje se i danas vodi dosta polemike, i koja je za određene institucije čak i zabranjena.

"*In-the-money*", "*at-the-money*", "*out-of-the-money*" - Svaka opcija ima svoju unutrašnju vrednost koja predstavlja vrednost opcije ako se izvrši odmah. Prema tome, opcije možemo definisati prema unutrašnjoj vrednosti, i to: *in-the-money* opcije imaju pozitivnu unutrašnju vrednost, odnosno njihovim trenutnim izvršenjem ćemo zaraditi; *at-the-money* opcije imaju unutrašnju vrednost nula ili blizu nule; a *out-of-the-money* opcije imaju negativnu unutrašnju vrednost, što znači da, ukoliko postoji ta mogućnost, opciju nije optimalno trenutno izvršiti. Svaka opcija, u svakom određenom trenutku spada u jednu od ove tri kategorije. Međutim, pošto opcija sa vremenom menja vrednost, tako menja i kategoriju kojoj pripada. Na

primer, duboko *out-of-the-money* opcija sada, može za godinu ili dve da vredi mnogo, ukoliko dođe do adekvatne promene osnovnog finansijskog instrumenta, što znači da će u tom slučaju ona biti *in-the-money*, odnosno imaće pozitivnu unutrašnju vrednost.

## 2.2. Opcije

Opcije su najjednostavniji izvedeni finansijski instrumenti, i ujedno i instrumenti koji su najviše proučavani, pa samim tim je veliki broj važnih rezultata izveden u poslednjih nekoliko dekada. Opcije predstavljaju pravo, ali ne i obavezu, da se kupi/proda određen broj osnovnih finansijskih instrumenata po tačno utvrđenoj ceni  $K$  (cena izvršenja) u tačno određenom vremenskom intervalu  $T$  (vreme izvršenja, vreme dospeća). Evropske opcije omogućavaju izvršenje samo na kraju ovog perioda, dok tzv. američke opcije omogućavaju izvršenje u bilo kom trenutku perioda trajanja opcije. Ovde je bitno napomenuti da američku *call* opciju skoro nikad nije optimalno izvršiti pre kraja intervala (iz dva razloga: opcija u većini slučajeva vremenom postaje vrednija, i u slučaju negativnog kretanja cene gubi se samo iznos plaćen za opciju), pa se u praksi, pri vrednovanju američkih *call* opcija, uzima da imaju istu funkciju isplate kao i evropske, odnosno, da opcije treba da vrede isto, ako su sve druge stvari jednake (*ceteris paribus*). Za razliku od evropske, američku *put* opciju je nekad bolje izvršiti pre vremena dospeća, dok je nekada bolje čekati.

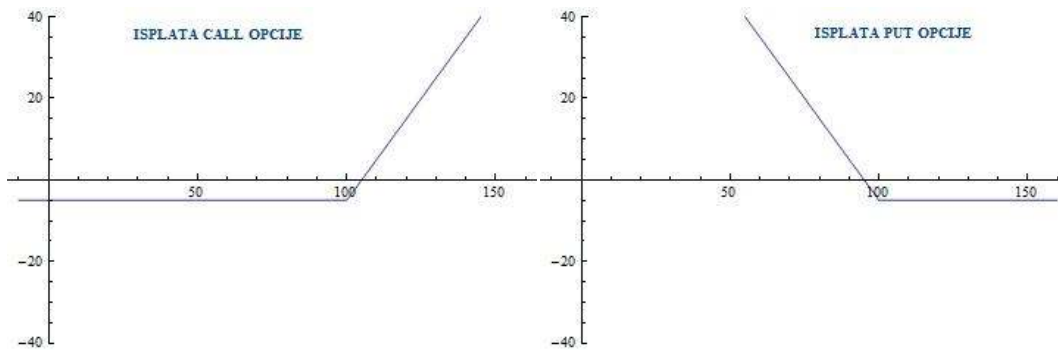
Evropske *call* opcije omogućavaju da se kupi određen broj osnovnih finansijskih instrumenata, a njihova funkcija isplate je

$$V^c(S_T) = \begin{cases} S_T - K, & S_T \geq K \\ 0, & S_T < K \end{cases} = (S_T - K)_+ \quad (1)$$

S druge strane, evropske *put* opcije nude mogućnost prodaje određenih instrumenata, pa je funkcija isplate

$$V^p(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T > K \\ K - S_T, & S_T \leq K \end{cases} = (K - S_T)_+ \quad (2)$$

gde  $S_T$  predstavlja cenu osnovnog finansijskog instrumenta (obično cena akcije određene korporacije) na kraju intervala vremena, a  $K$  cenu izvršenja. Grafici isplate dva različita tipa evropskih opcija su prikazani ispod.



Dva tipa evropske opcije sa cenom opcije 5 i  $K = 100$

Ovo su takozvane "plain vanilla" opcije, odnosno najjednostavnije opcije koje postoje. Egzotične opcije predstavljaju vrlo široku kategoriju opcija koje imaju kompleksniju funkciju isplate u odnosu na "plain vanilla" opcije.

### 2.3. Neke važnije teoreme i definicije

Slučajni (stohastički) proces predstavlja familiju slučajnih promenljivih  $\{X_t, t \in [0, T]\}$ , gde je  $0 \leq T \leq \infty$ . Za razliku od determinističkog procesa koji nam daje samo jednu trajektoriju evolucije procesa kroz vreme, slučajni proces nosi nesigurnost u pogledu evolucije procesa, pa se za različite trajektorije procesa dobijaju određene verovatnoće realizacije. Za potrebe ovog master rada ćemo pretpostaviti da imamo prostor verovatnoće  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , gde je  $\Omega$  skup svih elementarnih događaja,  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -polje generisano posmatranim stohastičkim procesom  $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ , a  $P$  mera verovatnoće  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ .

Takođe, definišaćemo sa  $C[0, T]$  skup svih neprekidnih funkcija na pomenutom intervalu.

**Definicija 1.** (Markovski procesi i verovatnoće prelaza)

Slučajni proces  $\{X_t, t \in T\}$  naziva se Markovskim procesom ako za svako  $n \in \mathbb{N}$  i za svaki niz tačaka iz  $T$ ,  $s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$  važi

$$P(X_t \in B | X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_n}) = P(X_t \in B | X_{s_n}) \quad (3)$$

za svaki Borelov skup  $B$ .

Markovske procese možemo definisati kao procese gde je samo sadašnja vrednost promenljive bitna za predviđanje budućnosti, odnosno da ako se zna sadašnja vrednost, tada poznavanje prethodne istorije procesa nije potrebno. Za opisivanje Markovskih procesa dovoljno je poznavanje uslovnih raspodela  $P(X_t \in B | X_s)$  za  $s < t \leq T$  i početne raspodele  $P(X_{t_0} \in B)$  pomoću kojih se mogu naći konačnodimenzione raspodele

$$\begin{aligned}
& P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \\
& P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)P(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2) \dots \\
& P(X_n = x_n|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \\
& P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)P(X_3 = x_3|X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (4)
\end{aligned}$$

Najjednostavniji Markovski procesi su oni u diskretnom vremenu, koji mogu uzimati samo konačno mnogo različitih vrednosti, i oni se nazivaju Markovskim lancima. Ovi procesi se obično koriste za opisivanje ponašanja sistema. Naime, slučajni proces  $\{X_k\}$  je Markovski lanac ako je, za diskretne trenutke  $t_0, t_1, \dots, T$ , ispunjen sledeći uslov

$$P(X_{k+1} = i|X_0, X_1, \dots, X_k) = P(X_{k+1} = i|X_k) \quad (5)$$

gde je  $i = 1, 2, \dots, n$  stanje procesa u pomenutom trenutku. Za opisivanje Markovskog lanca je tada dovoljno znati početnu raspodelu  $P_0(i) = P(X_0 = i)$  i takozvane verovatnoće prelaza iz stanja  $i$  i u vremenu  $t_k$  u stanje  $j$  u vremenu  $t_l$

$$p_{ij}(t_k, t_l) = P(X_l = j|X_k = i) \quad (6)$$

za  $i, j = 1, 2, \dots, n$  i za svako  $k < l$ . Matrica prelaza  $\Pi = \|p_{ij}\|$  nam daje verovatnoće za svaki mogući prelaz iz jednog stanja sistema u drugo između dva trenutka  $t_k$  i  $t_l$ , tako da je  $k < l$ . Analogno se pokazuje da sve ovo važi i u neprekidnom slučaju.

**Definicija 2.** (*Brown-ovo kretanje*)

Neka je  $B_t, 0 \leq t \leq T$  stohastički proces na prostoru verovatnoće  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , takav da važi:

- (i)  $B_0 = 0$ ;
- (ii) Za svaku particiju vremena  $\{t_1, \dots, t_n\}$ , gde je  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$ , priraštaji

$$B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

su nezavisni;

- (iii) Za svako  $s, t$  takvo da važi  $0 \leq s \leq t \leq T$ , slučajna promenljiva  $B_t - B_s$  ima  $\mathcal{N}(0, t - s)$  raspodelu;

- (iv) Za skoro svako  $\omega \in \Omega$ , trajektorija (putanja)  $t \rightarrow B_t(\omega)$  je neprekidna funkcija na  $[0, T]$ ;

Tada se  $B_t$  zove standardno *Brown-ovo kretanje* (ili *Wiener-ov proces*) na  $[0, T]$  (*Brown-ovo kretanje* predstavlja jedan primer Markovskog procesa).

Ako familija  $\{\mathcal{F}_t: 0 \leq t < \infty\}$   $\sigma$ -polja od  $\mathcal{F}$  ima sledeću osobinu ( $\forall s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ), onda se filtracijom zove familija  $\{\mathcal{F}_t\}$ , odnosno  $\sigma\{X_s, s \leq t\}$ . Ako slučajna promenljiva zadovoljava uslov  $\{w: X(w) \leq x\} \in \mathcal{F}$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ , reći ćemo da je ona merljiva u odnosu na  $\mathcal{F}$ . Ako je sada slučajna promenljiva  $\{X_t: 0 \leq t < \infty\}$  takva da je svako  $X_t$  merljivo u odnosu na  $\mathcal{F}_t$ , onda kažemo da je  $X_t$  adaptirano na filtraciju  $\mathcal{F}$ .



**Definicija 3.** (Martingal)

Stohastički proces  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  na prostoru verovatnoće  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je martingal u odnosu na filtraciju  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  definisanu na istom prostoru verovatnoće ako važi

1.  $\{M_t\}$  je adaptirano na filtraciju  $\{\mathcal{F}_t\}$
2.  $(\forall t)(E[|M_t|] < \infty)$
3.  $(\forall 0 \leq s \leq t < \infty)(E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s)$

Ovde ćemo pomenuti da *Brown*-ovo kretanje predstavlja martingal u odnosu na sopstvenu filtraciju.

*Brown*-ovo kretanje nije diferencijabilno ni u jednoj tački, što dovodi do pojave stohastičkog računa. Radi daljeg izlaganja, definišaćemo *Itô-Doebelin*-ov integral (skraćeno *Itô*-ov integral) kao

$$\int_0^T f(w, t) dB_t$$

koji ne predstavlja integral u uobičajenom smislu, jer diferencijal *Brown*-ovog kretanja, kao što je pomenuto, ne postoji. Naime, ovaj integral, predstavlja osnovu *Itô*-vog računa koji omogućava opisivanje stohastičkih procesa (kao što je *Brown*-ovo kretanje) i stoga nema uobičajeni smisao običnog *Riemann*-ovog integrala. Osim na nekoliko mesta, u ovom radu neće biti korišćen *Itô*-ov integral, pa zainteresovani čitalac može naći više detalja u [Steele].

**Definicija 4.** (1-dimenzionalni *Itô*-ov proces)

Ako je  $B_t$  *Brown*-ovo kretanje na našem prostoru verovatnoće  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tada je *Itô*-ov proces  $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  na istom prostoru verovatnoće definisan na sledeći način:

$$X_t = X_0 + \int_0^T \mu(X_s, s) ds + \int_0^T \sigma(X_s, s) dB_s \quad (7)$$

ili

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t \quad (8)$$

gde su  $\mu(X_s, s)$  i  $\sigma(X_s, s)$  adaptirani procesi u odnosi na filtraciju  $\mathcal{F}_s$ , pri čemu sledeći uslovi važe skoro sigurno

$$P \left[ \int_0^T |\mu(X_s, s) ds| < \infty \right] = 1, P \left[ \int_0^T (\sigma(X_s, s))^2 ds < \infty \right] = 1. \quad (9)$$

Formula (8) predstavlja stohastičku diferencijalnu jednačinu (*SDE*) za *Itô*-ov proces definisan u (7). Prvi član sa desne strane jednačine (8) predstavlja drift, a drugi član difuziju (slučajni deo procesa, šum).

Za više detalja videti [Steele].

Parametar drifta  $\mu$  se može oceniti primenom metode maksimalne verodostojnosti, dok parametar difuzije teorijski možemo oceniti iz sledeće relacije za particiju vremena  $\{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = T\}$

$$\int_0^T \sigma^2 dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 \quad (10)$$

pri čemu se pod limesom podrazumeva konvergencija u verovatnoći. Prema tome, ako je volatilitnost konstantna, onda se poznavanjem trajektorije može naći ocena za volatilitnost na sledeći način

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^T |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 \quad (11)$$

Tačnije, bilo koji mali deo trajektorije će nam dati vrednost volatilitnosti (ovo je tzv. osobina singularnosti). Međutim, teorija i praksa se u ovom slučaju ne poklapaju. Naime, mi nemamo čak ni najmanji deo trajektorije, već samo uzorak, pa problem ocenjivanja volatilitnosti ostaje nerešiv.

**Teorema 1.** (Jedinstvenost i postojanje rešenja)

Ako postoji konstanta  $K$  takva da za svako  $x, y \in \mathbb{R}$  i  $0 \leq t \leq T$ , koeficijenti stohastičke diferencijalne jednačine (8) zadovoljavaju *Lipschitz*-ov uslov

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2, \quad (12)$$

i uslov prostornog rasta

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad (13)$$

uz  $X_0 = x_0$ , onda postoji neprekidan proces  $X_t$  adaptiran na filtraciju  $\mathcal{F}_t$  koji zadovoljava jednačinu (8) i za koji važi

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E(X_t^2) < \infty \quad (14)$$

Za dokaz videti [Steele].

Sledeće teorema (*Itô*-ova formula) predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata u stohastičkom računu i ona predstavlja ekvivalent pravila diferenciranja složenih funkcija ("*chain rule*") u običnom računu. Takođe se veoma često i uspešno koristi i za rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina.

**Teorema 2.** (*Itô*-ova formula)

Neka su  $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  i  $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$  stohastički procesi dati stohastičkim diferencijalnim jednačinama

$$dX_t = \mu_1(X_t, t)dt + \sigma_1(X_t, t)dB_t^1 \quad (15)$$

$$dY_t = \mu_2(Y_t, t)dt + \sigma_2(Y_t, t)dB_t^2 \quad (16)$$

i neka  $g(t, x, y) \in C^{1,2,2}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^2)$ . Tada je

$$Z_t = g(t, X_t, Y_t) \quad (17)$$

Itô-ov proces i važi

$$dZ_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t, Y_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t, Y_t)dX_t + \frac{\partial g}{\partial y}(t, X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t)dX_t \cdot dX_t + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t)dX_t \cdot dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t)dY_t \cdot dY_t \quad (18)$$

gde se primenjuje sledeće pravilo ("box calculus")

$\times$	$dt$	$dB_t^1$	$dB_t^2$
$dt$	0	0	0
$dB_t^1$	0	$dt$	0
$dB_t^2$	0	0	$dt$

Za dokaz videti [Steele].

**Definicija 5.** (Geometrijsko *Brown*-ovo kretanje - *GBM*)

Proces geometrijskog *Brown*-ovog kretanja je definisan pomoću stohastičke diferencijalne jednačine

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (19)$$

uz  $S_0 = s_0$ , gde, u finansijskim primenama,  $S_t$  predstavlja cenu akcije u trenutku  $t$ ,  $\mu$  konstantan parametar drifta (očekivana stopa prinosa u kratkom intervalu vremena), a  $\sigma$  konstantnu volatilnost. Parametar drifta pomnožen cenom akcije se uzima jer očekivani prinos koji zahtevaju investitori treba da bude nezavisan od cena akcije. Takođe, razumna pretpostavka je da je varijabilnost procentualnog prinosa u kratkom vremenskom intervalu ista bez obzira na cenu akcije.

Rešenje stohastičke diferencijalne jednačine za geometrijsko *Brown*-ovo kretanje uz početni uslov  $S_0 = s_0$  se može jednostavno dobiti (videti [Steele]) kao

$$S_t = s_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\} \quad (20)$$

Odavde možemo primetiti da slučajna promenljiva  $S_t$  ima log-normalnu raspodelu, tj.

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \sim \mathcal{N} \left( \ln(s_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) \quad (21)$$

odnosno da logaritamski prinos ima normalnu raspodelu

$$Y_t = \ln \left( \frac{S_t}{s_0} \right) \sim \mathcal{N} \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) \quad (22)$$

Ovde je bitno pomenuti da cene akcije predstavljaju Markovske procese.

Za izvođenje *Black-Scholes* formule će nam trebati još jedan rezultat. Naime, kao sredstvo za dobijanje *BS*-ove formule iskoristićemo prelazak u svet koji je indiferentan prema riziku, odnosno, svet u kome investitori biraju finansijske instrumente samo prema prinosima koje ostvaruju nezavisno od veličine rizika koji nose. Uvođenjem nove mere verovatnoće  $Q$  umesto naše standardne mere  $P$  (mera u realnom svetu), možemo postići da diskontovani proces cena akcije bude martingal. Ovo znači da će u našem novom - imaginarnom - svetu, prinos svih finansijskih instrumenata biti isti. Mera  $Q$  se zove bezrizična martingalska mera ("*risk-neutral martingale measure*") i dobija se pomoću teoreme Girsanova. Vrednost svakog finansijskog instrumenta u svetu indiferentnom prema riziku biće martingal, što znači da će sadašnja vrednost finansijskog instrumenta biti jednaka budućoj očekivanoj vrednosti diskontovanoj po bezrizičnoj kamatnoj stopi. Da bismo ovo postigli, pomoću teoreme Girsanova ćemo transformisati proces geometrijskog *Brown*-ovog kretanja, što je prikazano malo dalje u tekstu. U suštini, mi tražimo sredstvo pomoću koga proces geometrijskog *Brown*-ovog kretanja neće sadržati promenljive koje zavise od preferencija za rizik individualnih investitora, i to postizemo prelaskom na pomenutu meru  $Q$  koja će detaljnije biti objašnjena u sledećem poglavlju.

**Teorema 3.** (Teorema Girsanova)

Neka je  $X_t$  *Itô*-ov proces definisan relacijom (7). Ako je veličina

$$\theta(X_s, s) = \frac{\mu(X_s, s) - r(X_s, s)}{\sigma(X_s, s)} \quad (23)$$

ograničena, tada možemo definisati novu meru verovatnoće  $Q$  na  $C[0, T]$  sa

$$Q(A) = E^P(1_A M_T) \quad (24)$$

gde je

$$M_T = \exp\left(-\int_0^T \theta(X_s, s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(X_s, s) ds\right) \quad (25)$$

$P$ -martingal (martingal u odnosu na meru verovatnoće  $P$ ) tako da je proces

$$B_t^Q = B_t^P + \int_0^t \theta(X_s, s) ds \quad (26)$$

$Q$ -*Brown*-ovo kretanje, odnosno *Brown*-ovo kretanje u odnosu na novu meru verovatnoće  $Q$ . Za dokaz videti [Steele].

Sledeća teorema, inače veoma značajna u teoriji verovatnoće, će nam biti jedan od prvih rezultata potrebnih za *Heston*-ov model. Pre toga ćemo uvesti jednu definiciju koja je značajna za razumevanje *Radon-Nikodym* teoreme. Ovde će biti predstavljen samo jedan specijalan slučaj *Radon-Nikodym* teoreme za promenu mere kod procesa. Za generalni rezultat videti [Klebaner].

**Definicija 6.**

Kaže se da je mera  $Q$  apsolutno neprekidna u odnosu na meru  $P$  ( $Q \ll P$ ), ako je  $Q(A) = 0$  kad god je  $P(A) = 0$ .  $P$  i  $Q$  su ekvivalentne mere verovatnoće ( $P \sim Q$ ) ako važi  $Q \ll P$  i  $P \ll Q$ .

Prethodna definicija nam kaže, da ako je mera  $Q$  apsolutno neprekidna u odnosu na meru  $P$ , postoji ne manje događaja sa verovatnoćom nula pod merom  $Q$  nego pod merom  $P$ , odnosno da broj mogućih događaja (događaji sa pozitivnom verovatnoćom) nije manji pod merom  $P$  nego pod merom  $Q$ . Ako su mere ekvivalentne, događaji koji imaju verovatnoću nula pod jednom merom imaće i pod drugom, dok će

događaji sa pozitivnom verovatnoćom pod jednom merom imati pozitivnu, ali ne neophodno i istu verovatnoću pod drugom merom.

**Teorema 4.** (Teorema Radon-Nikodym-a)

Neka je  $\Lambda(t)$  pozitivan martingal u odnosu na prostor verovatnoće  $P$  takav da važi  $E^P(\Lambda(T)) = 1$ . Ako je  $Q$  nova mera verovatnoće definisana relacijom  $Q(A) = \int_A \Lambda(T) dP$  (odnosno  $\frac{dQ}{dP} = \Lambda(T)$ ), onda je  $Q$  apsolutno neprekidna u odnosu na  $P$  i za  $Q$ -integrabilnu slučajnu promenljivu  $X$  važi

$$E^Q(X) = E^P(\Lambda(T)X) \quad (27)$$

$$E^Q(X|\mathcal{F}_t) = E^P\left(\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}X|\mathcal{F}_t\right) \quad (28)$$

Ako je još i  $X$  merljivo u odnosu na  $\mathcal{F}_t$ , onda za svako  $s \leq t$  važi

$$E^Q(X|\mathcal{F}_s) = E^P\left(\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(s)}X|\mathcal{F}_s\right) \quad (29)$$

Za dokaz videti [Klebaner].

**Definicija 7.** (Karakteristična funkcija)

Karakteristična funkcija  $\varphi_X$  slučajne promenljive  $X$ , odnosno njene raspodele, definiše se sa

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] \quad (30)$$

Ako  $X$  ima neprekidnu raspodelu sa funkcijom gustine verovatnoće  $f$ , tada je

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (31)$$

Za potrebe ovog rada ćemo pomenuti još dve stvari (detaljnije objašnjenje videti u [Merkle]). Prvo, karakteristična funkcija uvek postoji jedinstveno je određena svojom raspodelom. I drugo, definisaćemo teoremu o inverziji koja kaže da ako su  $a$  i  $b$  tačke neprekidnosti funkcije raspodele  $F$ , tada je

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt \quad (32)$$

Može se pokazati da je (detaljnije objašnjenje videti u [Gil-Pelaez])

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} \varphi(-t) - e^{-itx} \varphi(t)}{it} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-itx} \overline{\varphi(t)} - e^{-itx} \varphi(t)}{it} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[ \frac{e^{-itx} \varphi(t)}{it} \right] dt \quad (33)$$

Odnosno

$$F^c(x) = P(X \geq x) = 1 - F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[ \frac{e^{-itx} \varphi(t)}{it} \right] dt \quad (34)$$

## **3. Black-Scholes (BS) model**

### **3.1. Postavka BS modela**

*Fischer Black* i *Myron Scholes* su 1973. godine u svom radu "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" izveli jedan od najvažnijih rezultata u finasijskoj nauci do sada. Naime, oni su predstavili matematički model finasijskog tržišta za određivanje cena opcija. Ovaj rezultat je doveo do velikog buma u trgovanju opcijama i drugim izvedenim finasijskim instrumentima, kao i otvaranju novih berzi ("*Chicago Board Options Exchange*") i samom razvoju finansija kao jedne od najmlađih nauka. *Scholes* je 1997. godine za ovaj rezultat dobio Nobelovu nagradu, kao i *Robert C. Merton* (prvi koji je dao detaljno matematičko objašnjenje i doprineo popularizaciji rezultata), ali je *Fischer Black* ostao bez zaslužene nagrade zbog smrti 1995. godine.

*Black-Scholes*-ov model prati eksplicitno sledeće pretpostavke:

- potpuno odsustvo arbitraže - nemoguće je imati pozitivnu verovatnoću za dobitak, ako nešto nije uloženo;
- postoji samo jedna kamatna stopa, koja je bezrizična, i po kojoj se mogu pozajmljivati (u oba smera) neograničene količine novca, ona je konstantna i ista za sva vremena izvršenja;
- moguće je kupiti i prodati bilo koji procenat bilo kog finasijskog instrumenta (uključujući "*short selling*");
- finasijsko tržište je potpuno bez trenja - idealno - ne postoje nikakvi dodatni troškovi prilikom trgovine;
- cena akcije prati geometrijsko *Brown*-ovo kretanje sa konstantnim driftom i volatilnošću i ima lognormalnu raspodelu;
- akcije ne plaćaju dividende;
- opcije su evropske;

Neke od ovih pretpostavki mogu biti oslabljene. Na primer, dividende se jednostavno mogu ubaciti u model (videti [Hull]), ali pošto njihovo zanemarivanje ne dovodi do gubitka opštosti, smatraćemo da se radi o akcijama kompanija koje ne plaćaju dividende (na primer, do nedavno, kompanija *Microsoft* uopšte nije isplaćivala dividende svojim akcionarima). Takođe,  $\mu$  i  $\sigma$  mogu biti poznate funkcije vremena pri čemu model generalno ostaje isti (videti [Hull]).

### **3.2. Izvođenje i implikacije BS modela**

#### **3.2.1. Replicirajući portfolio i parcijalna diferencijalna jednačina BS modela**

Cela ideja *BS* modela je bila da se napravi portfolio koji savršeno prati funkciju isplate izvedenog finasijskog instrumenta (opcije). Taj portfolio, koji ćemo obeležavati sa  $\Pi_t$ , će za slučaj evropske *call* opcije imati dva novčana toka - cenu opcije u sadašnjem trenutku i isplatu opcije na kraju intervala vremena u slučaju povoljnog kretanja osnovnog finasijskog instrumenta. Ovaj portfolio će nam omogućiti da na kraju i dobijemo cenu evropske *call* opcije u *BS* modelu  $C(t, S_t)$  za bilo koji trenutak  $t$ .

BS model polazi od dva procesa

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (35)$$

koji predstavlja kretanje cena akcije putem *GBM*-a, i bezrizičnog determinističkog procesa (proces za obveznice) sa eksponencijalnim rastom

$$d\beta_t = r\beta_t dt \quad (36)$$

gde  $\beta_t$  predstavlja cenu obveznice u trenutku  $t$ , a  $r$  bezrizičnu kontinualno obračunatu kamatnu stopu. Sada pravimo portfolio

$$C(t, S_t) = C_t(S_t) = \Pi_t = a_t S_t + b_t \beta_t \quad (37)$$

gde  $a_t$  predstavlja broj akcija koje držimo u našem portfoliju  $\Pi_t$  u svakom trenutku  $t$ , a  $b_t$  broj obveznica. Razlog zbog koga ovaj portfolio može biti napravljen je taj što su i cena akcije i cena izvedenog finansijskog instrumenta (evropske *call* opcije) podložni samo jednom uzroku nesigurnosti: promenama cena akcije.

Da bi portfolio savršeno replicirao isplatu evropske *call* opcije, potrebno je da nema novčanih tokova, u bilo kom smeru, od kupovine opcije pa do njene terminalne isplate. To znači da portfolio mora biti "samofinansirajući", odnosno da svaka promena vrednosti portfolia mora biti jednaka adekvatnoj promeni vrednosti akcije i obveznice. Prema tome, pošto naša *call* opcija ima samo jednu terminalnu isplatu (na kraju života opcije) mora da važi tzv. "samofinansirajući" uslov:

$$d\Pi_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t \quad (38)$$

Zamenom imamo

$$d\Pi_t = a_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + b_t(r\beta_t dt) = (\mu a_t S_t + r b_t \beta_t) dt + \sigma a_t S_t dB_t \quad (39)$$

Uzimajući da je Markovski proces  $\Pi_t = f(t, S_t)$  i primenjujući *Itô*-ovu formulu, dobijamo

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= f_t(t, S_t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) dS_t \cdot dS_t + f_x(t, S_t) dS_t = \\ &= \left[ f_t(t, S_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 + f_x(t, S_t) \mu S_t \right] dt + f_x(t, S_t) \sigma S_t dB_t \end{aligned} \quad (40)$$

Kada uporedimo jednakosti (39) i (40) vidimo da je

$$a_t = f_x(t, S_t) \quad (41)$$

$$\mu S_t f_x(t, S_t) + r b_t \beta_t = f_t(t, S_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 + f_x(t, S_t) \mu S_t \quad (42)$$

Iz druge jednakosti se dobija

$$b_t = \frac{1}{r\beta_t} \left[ f_t(t, S_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right] \quad (43)$$

Sada zamenom dobijamo

$$\Pi_t = f(t, S_t) = a_t S_t + b_t \beta_t = f_x(t, S_t) S_t + \frac{1}{r} \left[ f_t(t, S_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right] \quad (44)$$

U prethodnim relacijama je radi lakšeg snalaženja uzeto da je  $x = S_t$ .

Sada preuređivanjem dobijamo *Black-Scholes*-ovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$f_t(t, S_t) = -\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f_{xx}(t, S_t) - r S_t f_x(t, S_t) + r f(t, S_t) \quad (45)$$

sa graničnim uslovom

$$C_t(0) = f(t, 0) = 0 \quad (46)$$

i terminalnim uslovom datim jednačinom (48) dalje u tekstu.

Dok god su pretpostavke *BS* modela zadovoljene, ova jednačina će opisivati evoluciju cene evropske *call* opcije kroz vreme. Ova jednačina ima mnogo rešenja, u zavisnosti od definicije izvedenog finansijskog instrumenta u odnosu na, pored vremena, osnovni uzrok promene: cenu akcije.

Rešenje parcijalne diferencijalne jednačine (45) se nalazi upotrebom sledeće teoreme.

**Teorema 5.** (*Feynman-Kac* teorema za *BS*-ovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu)

Rešenje jednačine (45), uz početni uslov  $f(T, x) = C_T$  je

$$f(t, x) = e^{-r(T-t)} E^Q(C_T | \mathcal{F}_t) \quad (47)$$

gde je  $Q$  mera verovatnoće definisana relacijom (24).

Za dokaz videti [Klebaner].

U [Hull] se može pogledati izvođenje iste parcijalne diferencijalne jednačine (45) ali putem drugačije definisanog portfolia kojim reprodukujemo *call* opciju. Naime, na vrlo sličan način se izvodi i parcijalna diferencijalna jednačina za *Heston*-ov model koja je data dalje u tekstu.

### **3.2.2. Izvođenje *BS* formule za cenu evropske *call* opcije**

Terminalna isplata za evropsku *call* opciju je

$$C_T = (S_T - K)_+ \quad (48)$$

Diskontovani proces cena akcije glasi



$$D_t = e^{-rt} S_t = e^{(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t} \quad (49)$$

Primenom Itô-ove formule imamo

$$dD_t = (\mu - r)D_t dt + \sigma D_t dB_t \quad (50)$$

Ako sada uvedemo meru  $Q$  definisanu relacijom (24) za koju je

$$Q(A) = E^P \left( 1_A * e^{-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t} \right) \quad (51)$$

gde je

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma} = \text{const} \quad (52)$$

onda *Brown*-ovo kretanje pod merom  $Q$  možemo definisati kao

$$dB_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t \quad (53)$$

ili u malo drugačijem obliku

$$B_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t \quad (54)$$

Zamenjujući u jednačinu (50) dobijamo

$$dD_t = (\mu - r)D_t dt + \sigma D_t dB_t = (\mu - r)D_t dt + \sigma D_t dB_t^Q - (\mu - r)D_t dt = \sigma D_t dB_t^Q \quad (55)$$

Vidimo da je sada diskontovani proces cena akcije martingal u odnosu na meru verovatnoće  $Q$ . U ostatku izvođenja *BS* formule ćemo pretpostaviti da su sve veličine definisane u odnosu na ovu novu meru verovatnoće, pa ćemo u daljem izvođenju označiti  $B_t^Q$  sa  $B_t$ .

Proces cena akcije je sada

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (56)$$

Rešenje ove jednačine u opštem slučaju je

$$S_T = S_t \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + \sigma (B_T - B_t) \right\} = S_t \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + \sigma Z \sqrt{T - t} \right\} \quad (57)$$

gde je  $Z = \frac{B_T - B_t}{\sqrt{T - t}}$  standardna normalna slučajna promenljiva  $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$  pa naša formula glasi

$$C_t = e^{-r(T-t)}E(C_T|\mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)}E_t(C_T) = e^{-r(T-t)}E_t(S_T - K)_+ = e^{-r(T-t)}E_t\left(S_t \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma Z\sqrt{T-t}\right\} - K\right)_+ \quad (58)$$

Primetimo da je veličina pod očekivanjem veća od nule za  $S_T \geq K \Leftrightarrow Z \geq R$ , gde je

$$R = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (59)$$

Dalje imamo

$$C_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R^\infty \left( S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma z\sqrt{T-t}} - K \right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \int_R^\infty e^{\sigma z\sqrt{T-t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (60)$$

Sada imamo transformaciju

$$e^{\sigma z\sqrt{T-t}} e^{-\frac{z^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2\sigma z\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t))} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} = e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \quad (61)$$

Zamenjujući dobijamo

$$C_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t \int_R^\infty e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T-t})^2} dz - e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = S_t \left( 1 - N(R - \sigma\sqrt{T-t}) \right) - K e^{-r(T-t)} \left( 1 - N(R) \right) \quad (62)$$

Na kraju dobijamo formulu

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (63)$$

gde je

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (64)$$

Na sličan način se može izvesti rešenje za cenu evropske *call* opcije u *BS* modelu kada je osnovni finansijski instrument akcija koja plaća dividende. Međutim, uvođenje dividendi u model, iako predstavlja jednostavan postupak, ne dovodi do gubitka opštosti rešenja (63).

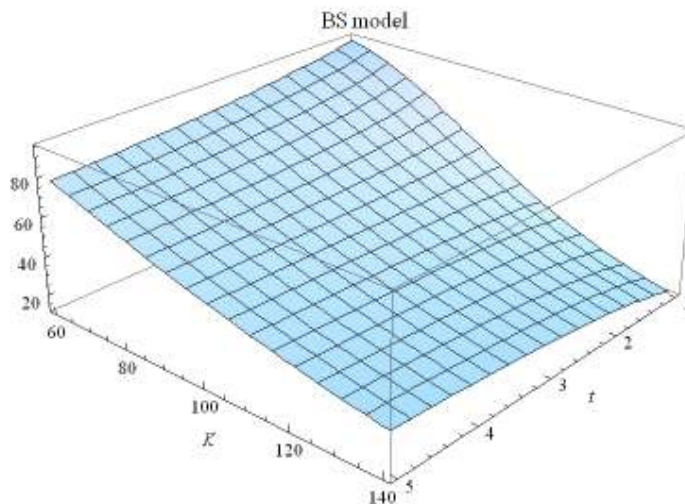
Cena evropske *call* opcije zavisi od

- vremena do dospeća  $T - t$
- trenutne vrednosti osnovnog finansijskog instrumenta  $S_t$
- cene izvršenja  $K$
- bezrizične kamatne stope  $r$
- volatilnosti  $\sigma$
- dividendi

U sledećoj tabeli je predstavljen efekat koji ima svaki od šest pojedinačnih faktora na cenu opcije

	Evropska <i>call</i> opcija	Evropska <i>put</i> opcija	Američka <i>call</i> opcija	Američka <i>put</i> opcija
<b>Trenutna cena akcije</b>	+	-	+	-
<b>Cena izvršenja</b>	-	+	-	+
<b>Vreme dospeća</b>	?	?	+	+
<b>Volatilnost</b>	+	+	+	+
<b>Bezrizična kamatna stopa</b>	+	-	+	-
<b>Vrednost budućih dividendi</b>	-	+	-	+

+ znači da cena opcije raste sa rastom faktora, - znači da cena opcije opada sa rastom faktora,  
? znači da je relacija neodređena



Cena *call* opcije sa parametrima  $S_0 = 100, \sigma = 0.3, r = 0.05$

Bitno je primetiti da je bezrizična mera samo veštačko oruđe za rešavanje *BS* parcijalne diferencijalne jednačine. Rešenja dobijena iz ove jednačine su validna u svim prostorima verovatnoće, a ne samo u prostoru  $Q$ . U stvari, pri prelasku iz bezrizičnog u realan svet, očekivana stopa rasta cena akcije i diskontna kamatna stopa se menjaju. Kako se ispostavlja, ove dve pojave uvek tačno neutrališu jedna drugu.

*BS* model se u nekim slučajevima ne slaže sa realnošću, ali je široko rasprostranjen kao korisna aproksimacija za osiguranje od negativnih kretanja cene osnovnog finansijskog instrumenta ("*delta*-

*hedging*"). Međutim, potrebno je dobro razumeti njegove nedostatke, kao i činjenicu da postoji još mnogo drugih vrsta rizika. Ograničenja *BS* modela su:

- potcenjivanje ekstremnih događaja koji u stvarnosti imaju veću verovatnoću i čija raspodela nije log-normalna, može se hedžovati pomoću "*out-of-the-money*" opcija;
- trgovanje uvek ima svoj trošak, što povlači rizik likvidnosti koji se teško hedžuje;
- volatilitet nije konstantna i postoji "*volatility smile*" (objašnjen dalje u tekstu), rešenje ovog problema pružaju modeli stohastičke volatiliteta koji su se javili kao posledica finansijske krize prouzrokovane lošim modelima za volatilitet;
- kamatna stopa nije konstantna ili poznata tokom vremena, postoje modeli koji ovo rešavaju (na primer, model *Vasicek*-a);
- kontinualno vreme i kontinualna trgovina u realnosti nije moguća, ali predstavlja relativno mali problem u odnosu na ostala ograničenja;

### **3.2.3. Određivanje vrednosti evropske *put* opcije**

Jedna veoma bitna posledica odsustva arbitraže je takozvani *put-call* paritet koji opisuje relaciju između cena *call* i *put* opcije sa istim vremenom izvršenja i cenom izvršenja, kao i sa istim osnovnim finansijskim instrumentom. Ovaj paritet važi i za *BS*-ov model i ima sledeću formu

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = S_t + P_t \quad (65)$$

gde su  $C_t$  i  $P_t$  cene *call* i *put* opcije, respektivno.

Ako u relaciji (65) ne stoji znak jednakosti, postoji mogućnost za arbitražu. Na primer, ako stoji znak  $<$ , znači da možemo iskoristiti mogućnost za arbitražu kupovinom *call* opcije i  $K$  obveznica, a prodajom *put* opcije i akcije  $S_t$ , i obrnuto. Međutim, prilike za arbitražu brzo nestaju jer sve više investitora ulaže u jeftiniji portfolio, a prodaje ili prodaje na kredit skuplji portfolio, dižući cenu jeftinijem, a smanjujući cenu skupljem portfolio. Ovo traje dok se ne izjednače vrednosti portfolia čime se postiže paritet.

Relacija (65) ima minimalne uslove, i kao takva ne podleže pretpostavkama *BS* modela, niti bilo kog drugog finansijskog modela. *Put-call* paritet ima dosta primena, ali je nama bitna ona u kojoj se kaže da u odsustvu dividendi i transakcionih troškova, implicirana volatilitet za *call* i *put* opciju mora biti ista pod uslovom da se radi o opcijama sa istom cenom i vremenom izvršenja.

## 4. Implicirana volatilnost

### 4.1. Pojam implicirane volatilnosti

Volatilnost  $\sigma$  akcije je mera neizvesnosti oko prinosa koje akcija pruža. Akcije obično imaju volatilnost u rasponu 15% – 60% na godišnjem nivou. Volatilnost se može izračunati za bilo koji period  $T$  kao  $\sigma_T = \sigma\sqrt{T}$ , gde  $\sigma$  predstavlja volatilnost u jediničnom intervalu vremena. Na primer, ako je godišnja volatilnost 15%, onda je dnevna volatilnost  $\sigma_D = \frac{0.15}{\sqrt{252}} \approx 0.01$  (obično se uzima da godišnje postoje 252 dana za trgovanje), odnosno 1%. Iz ovoga vidimo da veličina  $\sigma^2$  ima dimenziju 1/vreme.

Volatilnost cene akcije u formuli (63) za *BS* model je jedini parametar u toj jednačini koji se ne može direktno naći sa tržišta. Međutim, ono što se takođe može posmatrati sa tržišta jesu cene opcija i drugih finansijskih instrumenata. Naime, može se pokazati da će za vreme dospeća  $T$  i cenu izvršenja  $K$  pri kamatnoj stopi  $r$ , za svaku vrednost cene opcije  $C_t$  *BS* formula (63) dati jedinstveno rešenje za volatilnost

$$\sigma_{IMP} = \sigma_{BS}(C_t, S_t, K, r, T - t) \quad (66)$$

koja se tada zove implicirana volatilnost. Implicirana volatilnost u stvari, predstavlja volatilnost koju implicira tržište putem cena opcija i drugih parametara. Implicirana volatilnost se može definisati i kao volatilnost koja, za određeni model vrednovanja finansijskih instrumenata, daje teorijsku vrednost za opciju jednaku trenutnoj vrednosti te opcije na tržištu.

Implicirana volatilnost se dakle dobija primenom inverzne *BS* formule. Nažalost, pomenuta formula se ne može rešiti analitički, ali postoji nekoliko numeričkih procedura pomoću kojih možemo doći do rešenja (npr. *Newton*-ova metoda, metoda sečice...). Naime, *Heston*-ovim modelom se, za date parametre, može naći cena opcije, pa se onda nekom od numeričkih metoda rešava jednačina

$$C_{Heston} - C_{BS}(\sigma_{IMP}) = 0 \quad (67)$$

gde je  $\sigma_{IMP}$  nepoznata veličina koja se traži.

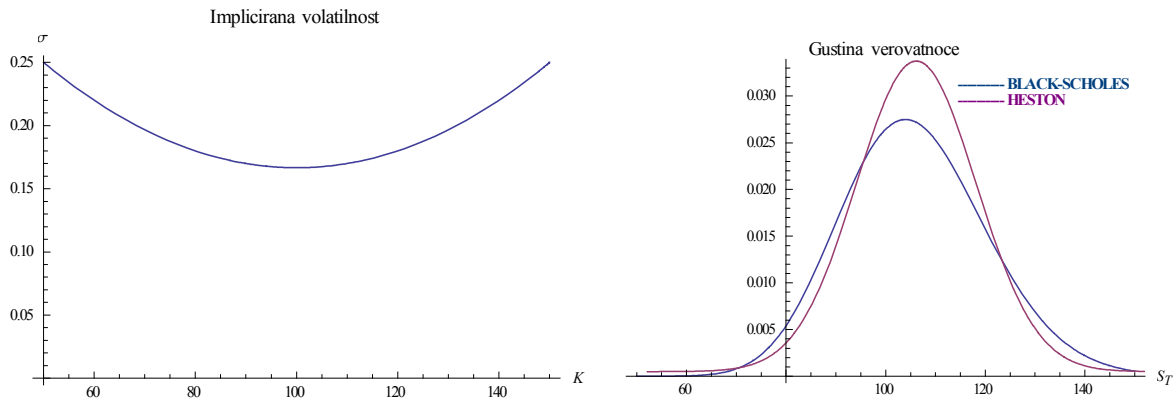
Implicirane volatilnosti evropske *call* i *put* opcije su jednake kada opcije imaju istu cenu izvršenja i isto vreme izvršenja. Ovo je posledica *put-call* pariteta, koji predstavlja odnos između evropske *call* i *put* opcije sa istom cenom izvršenja i vremenom izvršenja. Ključna stavka *put-call* pariteta je da je baziran na prostom argumentu odsustva arbitraže, i ne zahteva bilo kakvu pretpostavku o raspodeli cena akcija u budućnosti. Ova relacija je tačna i kada je raspodela cena akcija log-normalna i kada nije.

Takođe, može se primetiti onda da je i odnos između implicirane volatilnosti i vremena izvršenja za tačno zadatu cenu izvršenja (tzv. "*term structure*") isti za *put* i *call* opcije - sličan argument.

Implicirane volatilnosti se koriste da bi se nadgledalo mišljenje tržišta u vezi volatilnosti određene akcije. Trgovci obično objavljuju implicirane volatilnosti opcije pre nego njenu cenu. Ovo je zgodno zato što implicirana volatilnost teži da bude manje promenljiva (stabilnija) od cene opcije. Implicirane volatilnosti aktivno trgovanih opcija koriste trgovci da procene implicirane volatilnosti drugih opcija.

## 4.2. Opcije bazirane na stranoj valuti (*Foreign currency options, FOREX options*)

*Volatility smile* je efekat koji se javlja kod opcija baziranih na stranoj valuti. Implicirane volatilnosti su relativno male za *at-the-money* opcije, a postepeno se povećavaju sa porastom ili smanjenjem cene izvršenja. *Volatility smile* ima za posledicu da raspodela cena više nije log normalna (kao što pretpostavlja *BS*-ov model sa konstantnom volatilnošću), već da sada raspodela ima veću verovatnoću za ekstremne događaje i da je manje spljoštena.

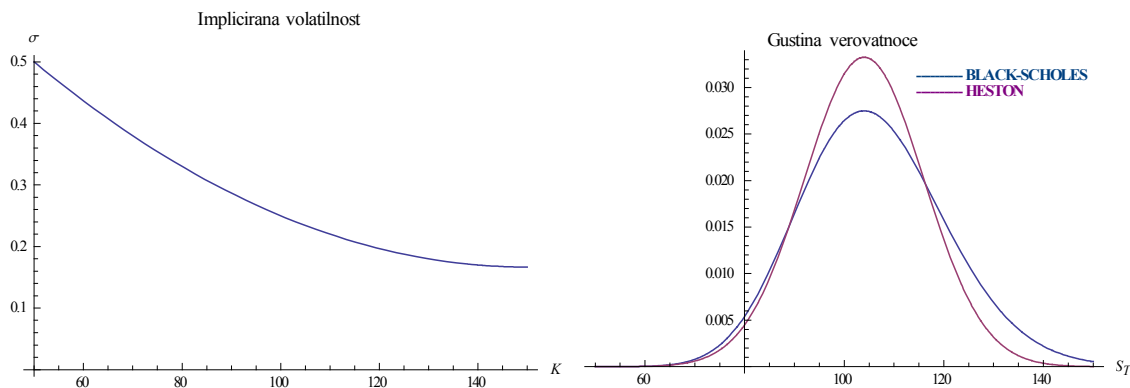


Na gornjim graficima je prikazan pomenuti efekat. Naime, ako posmatramo duboko *out-of-the-money call* opciju sa visokom cenom izvršenja, vidimo da je verovatnoća isplate veća za raspodelu koja nije log-normalna. Prema tome očekujemo da će ta raspodela dati veću cenu za opciju, što će opet sa druge strane da se odrazi na veću impliciranu volatilnost. Isti argument se može primeniti za drugu stranu raspodele ako se posmatra put opcija koja je duboko *out-of-the-money*. Ovo pokazuje da trgovci opcijama baziranih na stranoj valuti smatraju da lognormalna raspodela potcenjuje verovatnoću ekstremnih događaja u promeni kursa.

Opcije bazirane na stranoj valuti nemaju lognormalnu raspodelu iz dva razloga: volatilnost osnovnog finansijskog instrumenta nije konstantna i cena osnovnog finansijskog instrumenta se ne menja kontinualno, već ima skokove. Oba ova razloga dovode do veće verovatnoće za ekstremne događaje, a takođe zavise i od vremena izvršenja opcije. Kako vreme izvršenja opcije raste, uticaj nekonstantne volatilnosti na cenu postaje izraženiji, ali uticaj na impliciranu volatilnost postaje manje izražen, dok uticaj skokova postaje manje izražen i na cenu opcije i na impliciranu volatilnost. Rezultat svega ovoga je da *volatility smile* postaje sve manje izražen kako vreme izvršenja opcije raste.

### 4.3. Opcije na akcije (*Equity options*)

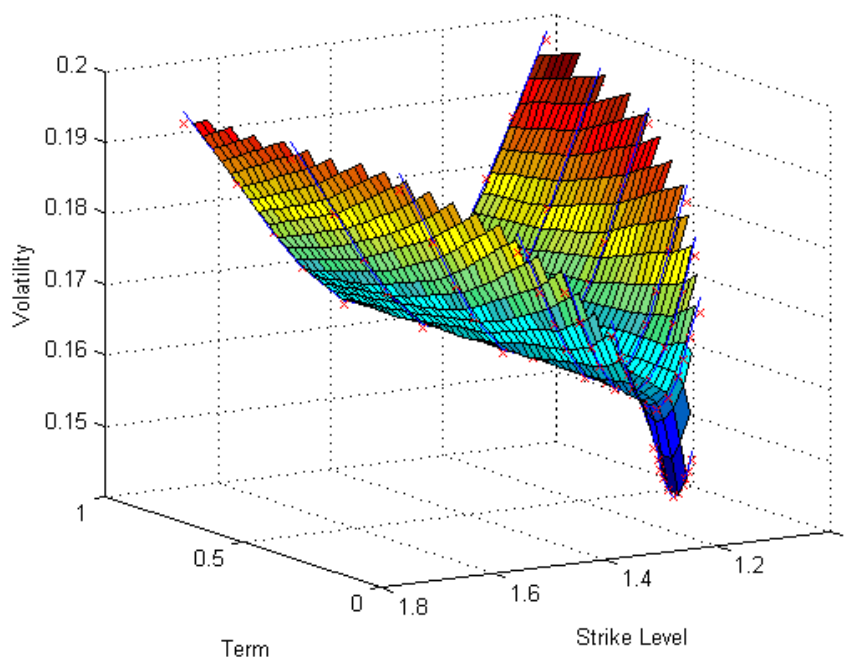
*Volatility smile* je izražen i kod najpopularnijih opcija, opcija na akcije. Međutim, ovde kriva implicirane volatilitnosti u odnosu na cenu izvršenja ima malo drugačiji oblik, pa se ponekad koristi i termin *volatility skew* (asimetrija volatilitnosti).



Ovde se kao što vidimo, implicirana volatilitnost smanjuje na celom domenu sa rastom cene izvršenja. Volatilitnost koja se koristi za vrednovanje opcije sa malom cenom izvršenja (*put* opcija duboko *out-of-the-money* ili *call* opcija duboko *in-the-money*) je značajno veća nego ona koja se koristi za vrednovanje opcije sa visokom cenom izvršenja (*put* opcija duboko *in-the-money* ili *call* opcija duboko *out-of-the-money*). Raspodela koja uzima u obzir asimetriju volatilitnosti je prikazana na gornjoj slici kao i lognormalna raspodela. Može se primetiti da u odnosu na lognormalnu raspodelu, ona ima veću verovatnoću za veliki pad cene osnovnog finansijskog instrumenta, a manju verovatnoću za veliki rast cene istog instrumenta (negativno pomerena raspodela - *negatively skewed*). Sličnim rezonovanjem kao u slučaju opcija baziranih na stranoj valuti se može pokazati da su gornja dva grafika u saglasnosti. Jedno objašnjenje asimetriju volatilitnosti se tiče zaduženja ("*leverage*"). Kako vrednost imovine kompanije ("*equity*") opada, zaduženost raste, što dovodi do toga da ulaganje u ovu kompaniju postaje sve rizičnije, pa i volatilitnost raste. Sa druge strane, ako vrednost kompanije raste, njena zaduženost opada, pa opada i volatilitnost. Drugo objašnjenje se tiče investitorovih pogleda u vezi mogućnosti da se dogodi još jedan krah berze sličan, na primer, onom iz oktobra 1987.

Roba, ("*commodities*"), (kao što je zlato, nafta itd.) ima potpuno obrnuto ponašanje za impliciranu volatilitnost. Naime, roba ima krivu implicirane volatilitnosti koja raste sa rastom cene izvršenja

Primer kako izgleda površina implicirane volatilitnost za *FOREX* opcije je data na donjoj slici.



*Površina implicirane volatilnosti za call opciju na euro-dollar kurs u martu 2009. godine*

#### **4.4. Finansijski instrumenti bazirani na impliciranoj volatilnosti**

Finansijski instrumenti bazirani na impliciranoj volatilnosti su oni koji prate vrednost implicirane volatilnosti za različite izvedene finansijske instrumente. Na primer, *CBOE* ("Chicago Board Options Exchange") indeks volatilnosti ("*VIX*") se računa kao ponderisana suma impliciranih volatilnosti različitih opcija na indeks *S&P 500*. Postoji još mnoštvo indeksa volatilnosti kao što su: *VXN* (*Nasdaq 100* indeks za volatilnost fjučersa), *IVX* (očekivana volatilnost akcije za neki budući period na bilo koju američku hartiju od vrednosti ili instrument kojim se trguje na berzi).



## **5. Modeli stohastičke volatilnosti. Heston-ov model**

### **5.1. Modeli stohastičke volatilnosti**

Modeli stohastičke volatilnosti su modeli u finansijskoj matematici koji se koriste za vrednovanje izvedenih finansijskih instrumenata gde se u modelu pretpostavlja da je volatilnost finansijskog instrumenta stohastički proces vođen određenim promenljivim, kao što su cena osnovnog finansijskog instrumenta i drugim. Modeli stohastičke volatilnosti, u stvari, predstavljaju jedan način da se reše nedostaci *BS* modela, kao što su konstantna volatilnost i log-normalna raspodela cene osnovnog finansijskog instrumenta.

Danas postoji mnoštvo modela stohastičke volatilnosti, od koji ću pomenuti najvažnije: *Heston-ov model*, *CEV model* (*Constant Elasticity of Variance*), *SABR model*, *GARCH model* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), *3/2 model* i *Chen-ov model*. Svaki od ovih modela ima svoje prednosti i mane, ali je model koji se definitivno pokazao najefikasnijim i koji je danas najviše korišćen *Heston-ov model*. Uz naravno ogromnu prednost što se za *Heston-ov model* može naći kvazi-analitičko rešenje, ovaj model takođe daje najbolje rezultate u simulacijama.

### **5.2. Postavka Heston-ovog modela**

Simulacije pokazuju da je korelacija između volatilnosti i cene osnovnog finansijskog instrumenta važna radi objašnjenja asimetričnosti raspodele ("*skewness*") cene osnovnog finansijskog instrumenta i određenih efekata implicirane volatilnosti ("*volatility smile*"). Ali modeli stohastičke volatilnosti uz sve prednosti imaju nedostatak da većina njih nema zatvoren analitički oblik i da zahtevaju obimnu upotrebu numeričkih tehnika za rešavanje dvodimenzionalnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. *Heston-ov model* pruža zatvoren analitički oblik za cenu evropske *call* ili *put* opcije kada je proces cene osnovnog finansijskog instrumenta korelisan sa procesom za volatilnost. Model se može primeniti za opcije na akcije raznih kompanija i agencija ("*equity options*") i valute ("*currency options*").

*Heston-ov model* se može predstaviti sledećim sistemom

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_{t,1} \quad (68)$$

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dB_{t,2} \quad (69)$$

$$dB_{t,1}dB_{t,2} = \rho dt \quad (70)$$

gde su  $B_{t,1}$  i  $B_{t,2}$  *Brown-ova* kretanja definisana na sledeći način

$$B_{t,1} = W_{t,1} \quad (71)$$

$$B_{t,2} = \rho W_{t,1} + \sqrt{1 - \rho^2} W_{t,2} \quad (72)$$

pri čemu su  $W_{t,1}$  i  $W_{t,2}$  nezavisni procesi *Brown*-ovog kretanja. Proces za  $V_t$  ćemo u daljem tekstu zvati varijansom.

Šest parametara modela su

- $\mu$  - drift procesa za cenu akcije, prinos na finansijski instrument
- $k$  - brzina vraćanja na dugoročni nivo
- $\theta$  - dugoročni nivo procesa za  $V_t$
- $\sigma$  - volatilnost procesa za  $V_t$
- $\rho$  - konstantan parametar korelacije između dva *Brown*-ova kretanja
- $V_0$  - inicijalni (početni) nivo procesa  $V_t$

Velika prednost *Heston*-ovog stohastičkog modela jeste što se može rešiti u kvazi-analitičkom obliku, za razliku od drugih modela stohastičke volatilnosti koji veoma često zahtevaju kompleksne numeričke metode za izračunavanje. *Heston*-ov model u stvari predstavlja "proširenu verziju" stohastičkog procesa na kome je *BS* model izgrađen, ali za razliku od *BS* modela koji ima veoma jednostavno analitičko rešenje, *Heston*-ov model ima analitičko rešenje koje iako značajno uprošćava računarski deo posla, i dalje ima deo koji se rešava numeričkim metodama.

Danas postoji nekoliko ekstenzija *Heston*-ovog modela, kao što su: dodavanje još jednog stohastičkog procesa za varijansu nezavisnog od prvog, uzimanje da su i kamatne stope stohastičke i da prate *CIR* proces, uzimanje da su svi parametri zavisni od vremena itd. Sve ove ekstenzije će naravno doprineti većoj tačnosti modela, ali na uštrb povećane kompleksnosti. Dakle, princip je isti kao u većini problema egzaktnih nauka, naći kompromis između dva suprotstavljena zahteva. Pokazalo se, da *Heston*-ov model sa jednim procesom za varijansu i konstantnom kamatnom stopom može poprilično dobro opisati veliku većinu situacija, posebno u kratkom vremenskom intervalu. Naime, finansijske kompanije koje koriste ove modele imaju portfolio sa stotinama, ako ne i hiljadama različitih finansijskih instrumenata koje je potrebno vrednovati relativno često. Jednostavnost u modelima se veoma ceni u tim kompanijama, pa se bez problema mogu naći kompanije koje čak koriste i *BS* model za vrednovanje određenih izvedenih finansijskih instrumenata (isto kao što se u korporativnim finansijama dobar deo firmi i dalje odlučuje za skoro trivijalan *CAPM* model iz jednog, jedinog razloga - jednostavnosti). Naravno, ukoliko se govori o dužim vremenskim intervalima, potrebno je uzeti u obzir i fluktuacije u kamatnim stopama.

Jednačina (69) opisuje proces koji se često koristi u finansijama, i koji se u našem slučaju koristi za opisivanje trenutne vrednosti varijanse. Prvi put je upotrebljen u radu [CIR] kao proces za kratkoročnu kamatnu stopu. Ime je dobio po autorima pomenutog rada *Cox-Ingersoll-Ross*, a predstavlja Markovski proces sa neprekidnim putanjama definisan stohastičkom diferencijalnom jednačinom (69) sa parametrima  $\theta, k, \sigma$ .

### 5.3. Izvođenje Heston-ovog rešenja za cenu evropske call opcije

#### 5.3.1. Replicirajući portfolio i parcijalna diferencijalna jednačina Heston-ovog model

Standardnim argumentima arbitraže (videti [BS], [Merton] i [Heston]) se može pokazati da cena bilo koje opcije  $F_t = F_t(S_t, V_t, t)$  mora zadovoljavati sledeću parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho S_t \frac{\partial^2 F_t}{\partial V_t \partial S_t} - r F_t + r S_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial F_t}{\partial V_t} = 0 \quad (73)$$

gde  $\lambda(S_t, V_t, t) = \lambda V_t$  predstavlja cenu rizika volatilnosti i mora biti nezavisna od svakog pojedinačnog finansijskog instrumenta. Ovo se može pokazati za slučaj evropske *call* opcije na sledeći način. Naime, tražimo replicirajući portfolio koji će da daje identične novčane tokove kao evropska *call* opcija. Međutim, pošto sada imamo još jedan uzrok nesigurnosti (stohastičku volatilnost), moraćemo da dodamo još jedan finansijski instrument za neutralisanje ovog uzroka nesigurnosti - još jednu opciju.

Znači tražimo cenu evropske *call* opcije  $C_t = C(S_t, V_t, t)$  repliciranjem portfolia koji sadrži  $a_t$  akcija  $S_t$ ,  $b_t$  obveznica  $\beta_t = e^{rt}$  (bezrizični deterministički proces dat jednačinom (36)) i  $c_t$  jedinica druge opcije  $O_t = O(S_t, V_t, t)$

$$C_t = \Pi_t = a_t S_t + b_t \beta_t + c_t O_t \quad (74)$$

Sličnim postupkom, kao za *BS* model, ćemo dobiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu za cenu evropske *call* opcije

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho S_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t \partial S_t} - r C_t + r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial C_t}{\partial V_t} = 0 \quad (75)$$

Pomenuta jednačina predstavlja poseban slučaj parcijalne diferencijalne jednačine za generalne procese sa stohastičkom volatilnošću opisanim u [Gatheral]. Jednačina (75) se može napisati i kao

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_t}{\partial t} - r C_t + r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \\ & \quad + \sigma V_t \rho S_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t \partial S_t} \\ & \quad + k(\theta - V_t) \frac{\partial C_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t^2} \\ & \quad - \lambda V_t \frac{\partial C_t}{\partial V_t} = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

Prva linija u jednačini (76) predstavlja generator *BS* modela, druga predstavlja član korekcije zbog korelacije, treća je korekcija zbog stohastičke volatilnosti, a četvrta predstavlja cenu rizika volatilnosti.

Ova jednačina se može napisati drugačije ako uzmemo da je  $x_t = \ln S_t$ , i izrazimo parcijalnu diferencijalnu jednačinu (75) preko  $x_t$ ,  $V_t$  i  $t$

$$\frac{\partial C_t}{\partial S_t} = \frac{\partial C_t}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = \frac{\partial C_t}{\partial x_t} \frac{1}{S_t} \quad (77)$$

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t \partial S_t} = \frac{\partial}{\partial V_t} \left( \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial}{\partial V_t} \left( \frac{1}{S_t} \frac{\partial C_t}{\partial x_t} \right) = \frac{1}{S_t} \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t \partial x_t} \quad (78)$$

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{1}{S_t} \frac{\partial C_t}{\partial x_t} \right) = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial C_t}{\partial x_t} + \frac{1}{S_t} \frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t \partial S_t} = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial C_t}{\partial x_t} + \frac{1}{S_t} \frac{\partial}{\partial x_t} \left( \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \right) = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial C_t}{\partial x_t} + \frac{1}{S_t^2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t^2} \quad (79)$$

Ako sada ovo ubacimo u jednačinu (75), dobijamo ( $S_t$  se skraćuje)

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t \partial x_t} - r C_t + \left( r - \frac{1}{2} V_t \right) \frac{\partial C_t}{\partial x_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial C_t}{\partial V_t} = 0 \quad (80)$$

Evropska *call* opcija sa cenom izvršenja  $K$  i vremenom izvršenja  $T$  zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (80) sa sledećim uslovima

$$C(S_T, V_T, T) = \max(S_T - K, 0) \quad (81)$$

$$C(0, V_t, t) = 0 \quad (82)$$

$$\frac{\partial C(\infty, V_t, t)}{\partial S_t} = 1 \quad (83)$$

$$r S_t \frac{\partial C(S_t, 0, t)}{\partial S_t} + k \theta \frac{\partial C(S_t, 0, t)}{\partial V_t} - r C(S_t, 0, t) + \frac{\partial C(S_t, 0, t)}{\partial t} = 0 \quad (84)$$

$$C(S_t, \infty, t) = S_t \quad (85)$$

### **5.3.2. Rešenje Heston-ove parcijalne diferencijalne jednačine za cenu evropske call opcije**

Cena *call* opcije je opet

$$C_t(K) = e^{-r\tau} E^Q[(S_T - K)_+] = e^{-r\tau} E^Q[S_T 1_{S_T > K}] - e^{-r\tau} K E^Q[1_{S_T > K}] \quad (86)$$

gde je  $\tau = T - t$  vreme izvršenja opcije. Dva člana sa desne strane ćemo rešavati pod različitim merama verovatnoće. Naime, drugi član rešavamo pod, u ovom slučaju, bezrizičnom merom verovatnoće  $Q$ . Sada imamo

$$E^Q[1_{S_T > K}] = Q(S_T > K) = Q(\ln S_T > \ln K) = P_2(x_t, V_t, t) \quad (87)$$

$P_2(x_t, V_t, t)$  predstavlja verovatnoću da će se *call* opcija izvršiti na kraju intervala "in-the-money" u odnosu na cenu akcije  $x_t = \ln S_t$ , volatilitnost  $V_t$  i vreme izvršenja  $\tau = T - t$ . Prema tome

$$P_2(x_t, V_t, t) = Pr(\ln S_T > \ln K) \quad (88)$$

Za prvi član sa desne strane jednakosti (86) ćemo uvesti novu meru  $R$  pomoću *Radon-Nikodym* promenljive

$$\frac{dQ}{dR} = \Lambda_\tau = \frac{S_t/S_T}{\beta_t/\beta_T} \quad (89)$$

gde je

$$\beta_t = \exp\left(\int_0^t r du\right) = \exp(rt) \quad (90)$$

Detaljnije objašnjenje videti u [Klebaner]. Sada je

$$\begin{aligned} e^{-r\tau} E^Q[S_T 1_{S_T > K}] &= E^Q\left[\frac{\beta_t}{\beta_T} S_T 1_{S_T > K}\right] = E^R\left[\frac{\beta_t}{\beta_T} S_T 1_{S_T > K} \Lambda_\tau\right] = \\ &= S_t E^R[1_{S_T > K}] = e^{x_t} R(S_T > K) = e^{x_t} P_1(x_t, V_t, t) \end{aligned} \quad (91)$$

gde je verovatnoća  $P_1(x_t, V_t, t)$  definisana na isti način kao i  $P_2(x_t, V_t, t)$  ali pod drugom merom verovatnoće. Zamenom dobijamo

$$C_t(K) = e^{x_t} P_1(x_t, V_t, t) - e^{-r\tau} K P_2(x_t, V_t, t) \quad (92)$$

Oba člana sa desne strane naravno moraju zadovoljavati parcijalnu diferencijalnu jednačinu (80). Sada radimo izvode po sve tri promenljive

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} = e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K r e^{-r\tau} P_2 - K e^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial t} = e^{x_t} \left[\frac{\partial P_1}{\partial t}\right] - e^{-r\tau} K \left[r P_2 + \frac{\partial P_2}{\partial t}\right] \quad (93)$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial x_t} = e^{x_t} P_1 + e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial x_t} - e^{-r\tau} K \frac{\partial P_2}{\partial x_t} = e^{x_t} \left[P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x_t}\right] - e^{-r\tau} K \left[\frac{\partial P_2}{\partial x_t}\right] \quad (94)$$

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t^2} = e^{x_t} P_1 + 2e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} - e^{-r\tau} K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} = e^{x_t} \left[P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2}\right] - e^{-r\tau} K \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2}\right] \quad (95)$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial V_t} = e^{x_t} \left[\frac{\partial P_1}{\partial V_t}\right] - e^{-r\tau} K \left[\frac{\partial P_2}{\partial V_t}\right] \quad (96)$$

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t^2} = e^{x_t} \left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial V_t^2}\right] - e^{-r\tau} K \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial V_t^2}\right] \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t \partial V_t} = e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial V_t} + e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial V_t} - e^{-r\tau} K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial V_t} = e^{x_t} \left[\frac{\partial P_1}{\partial V_t} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial V_t}\right] - e^{-r\tau} K \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial V_t}\right] \quad (98)$$

Izvod po vremenu  $t$  je u stvari trebao da bude po  $\tau$ , odnosno

$$\frac{\partial C_t}{\partial \tau} = \frac{\partial C_t}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial C_t}{\partial t} \quad (99)$$

Dobijene izvode ćemo zameniti u sledeću diferencijalnu jednačinu (jednačina (80))

$$-\frac{\partial C_t}{\partial \tau} + \frac{1}{2}V_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho \frac{\partial^2 C_t}{\partial V_t \partial x_t} - rC_t + \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) \frac{\partial C_t}{\partial x_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial C_t}{\partial V_t} = 0 \quad (100)$$

Da bismo dobili *Heston*-ovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu za  $P_1$  i  $P_2$ , primetimo da je diferencijalna jednačina (100) nezavisna od uslova ugovora *call* opcije. Prema tome, uzimanjem da je  $K = 0, S_t = 1$  možemo dobiti jednačinu za opciju čija je cena  $P_1$ . Analogno, uzimanjem da je  $K = 1, S_t = 0, r = 0$  možemo dobiti jednačinu za opciju čija je cena  $-P_2$ . Pošto  $-P_2$  zadovoljava jednačinu, to mora učiniti i  $P_2$ . U prvom slučaju ( $K = 0, S_t = 1$ ) dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2}V_t \left[ P_1 + 2\frac{\partial P_1}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} \right] + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \left[ \frac{\partial^2 P_1}{\partial V_t^2} \right] + \sigma V_t \rho \left[ \frac{\partial P_1}{\partial V_t} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial V_t} \right] - rP_1 + \\ \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) \left[ P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x_t} \right] + [k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial P_1}{\partial V_t} = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

Sredjivanjem dobijamo

$$-\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2}V_t \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \frac{\partial^2 P_1}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial V_t} + \left(r + \frac{1}{2}V_t\right) \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + [\sigma V_t \rho + k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial P_1}{\partial V_t} = 0 \quad (102)$$

Drugi slučaj ( $K = -1, S_t = 0, r = 0$ ) ima sledeći oblik jednačine

$$\begin{aligned} \left[ rP_2 - \frac{\partial P_2}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{2}V_t \left[ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} \right] + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \left[ \frac{\partial^2 P_2}{\partial V_t^2} \right] + \sigma V_t \rho \left[ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial V_t} \right] - rP_2 + \\ \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) \left[ \frac{\partial P_2}{\partial x_t} \right] + [k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \left[ \frac{\partial P_2}{\partial V_t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (103)$$

Njenim sredjivanjem dobijamo

$$-\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \frac{1}{2}V_t \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \frac{\partial^2 P_2}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial V_t} + \left(r - \frac{1}{2}V_t\right) \frac{\partial P_2}{\partial x_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial P_2}{\partial V_t} = 0 \quad (104)$$

Jednačine (102) i (104) radi preglednosti možemo kombinovati u jednu

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2}V_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t \partial V_t} + (r + u_j V_t) \frac{\partial P_j}{\partial x_t} + (a - b_j V_t) \frac{\partial P_j}{\partial V_t} = 0 \quad (105)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = k\theta, b_1 = k + \lambda - \rho\sigma, b_2 = k + \lambda \quad (106)$$

za  $j = 1, 2$ .

Kada su poznate karakteristične funkcije  $f_1(\phi; x_t, V_t)$  i  $f_2(\phi; x_t, V_t)$  koje odgovaraju "in-the-money" verovatnoćama  $P_1$  i  $P_2$ , onda se ove verovatnoće dobijaju putem karakterističnih funkcija primenom sledeće formule

$$P_j = Pr(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x_t, V_t)}{i\phi} \right] d\phi \quad (107)$$

Kada je  $\tau = 0$  (vreme izvršenja), verovatnoće su podložne graničnom uslovu

$$P_j(x_T, V_T, T) = 1_{x_T > \ln K} \quad (108)$$

### **5.3.3. Heston-ova karakteristična funkcija**

*Heston* dalje pretpostavlja da je karakteristična funkcija data sledećom formom (za detaljnije objašnjenje videti [Heston])

$$f_j(\phi; x_t, V_t) = \exp\{C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)V_t + i\phi x_t\} \quad (109)$$

gde su  $C_j$  i  $D_j$  koeficijenti (razlikovaćemo cenu opcije  $C_t$  od koeficijenta  $C_j$ ). Karakteristična funkcija  $f_j$  će zadovoljavati parcijalnu diferencijalnu jednačinu (105). Ovo je posledica *Feynman-Kac*-ove teoreme (za detaljnije objašnjenje videti [Klebaner]), koja kaže da ako funkcija  $f(x_t, V_t, t)$  zadovoljava jednačinu (105)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f - rf = 0 \quad (110)$$

sa graničnim uslovom  $f(x_T, T)$ , i

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_t \frac{\partial^2}{\partial V_t^2} + \sigma V_t \rho S_t \frac{\partial^2}{\partial V_t \partial S_t} + r S_t \frac{\partial}{\partial S_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial}{\partial V_t} \quad (111)$$

onda je rešenje dato jednačinom (112)

$$f(x_t, V_t, t) = E[f(x_T, V_T, T) | x_t = x, V_t = V] \quad (112)$$

Koristeći

$$f(x_T, V_T, T) = e^{i\phi x_T} = e^{i\phi \ln S_T} \quad (113)$$

dobijamo rešenje

$$f(x_t, V_t, t) = E[e^{i\phi \ln S_T} | \ln S_t = \ln S, V_t = V] \quad (114)$$

koje predstavlja karakterističnu funkciju za  $\ln S_t$ . Sada je parcijalna diferencijalna jednačina za karakterističnu funkciju

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2}V_t \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t^2} + \sigma V_t \rho \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t \partial v_t} + (r + u_j V_t) \frac{\partial f_j}{\partial x_t} + (a - b_j V_t) \frac{\partial f_j}{\partial v_t} = 0 \quad (115)$$

Trebaju nam sledeći izvodi

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau} V_t\right) f_j \quad (116)$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_t} = i\phi f_j \quad (117)$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} = -\phi^2 f_j \quad (118)$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial v_t} = D_j f_j \quad (119)$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t^2} = D_j^2 f_j \quad (120)$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t \partial x_t} = i\phi D_j f_j \quad (121)$$

Zamenom dobijamo

$$-\left(\frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau} V_t\right) + i\rho\sigma\phi V_t D_j - \frac{1}{2}V_t\phi^2 + \frac{1}{2}V_t\sigma^2 D_j^2 + (r + u_j V_t)i\phi + (a - b_j V_t)D_j = 0 \quad (122)$$

odnosno

$$V_t \left(-\frac{\partial D_j}{\partial \tau} + i\rho\sigma\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + iu_j\phi - b_j D_j\right) - \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + ir\phi + aD_j = 0 \quad (123)$$

Ovo nam daje dve diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = i\rho\sigma\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + iu_j\phi - b_j D_j \quad (124)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = ir\phi + aD_j \quad (125)$$

*Heston* postavlja inicijalne (početne) uslove  $D_j(0, \phi) = 0$  i  $C_j(0, \phi) = 0$ . Jednačina (124) je takozvana *Riccati*-jeva jednačina po  $D_j$ , dok je jednačina (125) obična diferencijalna jednačina po  $C_j$ . Jednačinu (124) pišemo na sledeći način



$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - Q_j D_j + R D_j^2 \quad (126)$$

gde su

$$P_j = iu_j \phi - \frac{1}{2} \phi^2 \quad (127)$$

$$Q_j = b_j - i\rho\sigma\phi \quad (128)$$

$$R = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (129)$$

*Riccati*-jeva jednačina se rešava zamenom  $D_j = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w}$  tako da dobijamo sledeću običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$w'' + Q_j w' + P_j R w = 0 \quad (130)$$

Ova obična diferencijalna jednačina ima karakterističnu jednačinu  $r^2 + Q_j r + P_j R = 0$  sa rešenjima

$$\alpha = \frac{-Q_j + \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j + d_j}{2}, \beta = \frac{-Q_j - \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j - d_j}{2} \quad (131)$$

gde je

$$d_j = \alpha - \beta = \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R} = \sqrt{(i\rho\sigma\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2iu_j\phi - \phi^2)} \quad (132)$$

Rešenje *Heston-Riccati*-jeve jednačine (126) je tada

$$D_j = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w} = -\frac{1}{R} \left( \frac{A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}}{Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}} \right) = -\frac{1}{R} \left( \frac{K\alpha e^{\alpha t} + \beta e^{\beta t}}{Ke^{\alpha t} + e^{\beta t}} \right) \quad (133)$$

gde su  $A$  i  $B$  proizvoljne konstante i  $K = \frac{A}{B}$ . Početni uslov  $D_j(0, \phi) = 0$  nam daje  $K = -\frac{\beta}{\alpha}$ . Sada je rešenje

$$D_j = -\frac{\beta}{R} \left( \frac{-e^{\alpha\tau} + e^{\beta\tau}}{-g_j e^{\alpha\tau} + e^{\beta\tau}} \right) = -\frac{\beta}{R} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) = \frac{Q_j + d_j}{2R} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) = \frac{b_j - i\rho\sigma\phi + d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \quad (134)$$

gde je

$$g_j = -K = \frac{b_j - i\rho\sigma\phi + d_j}{b_j - i\rho\sigma\phi - d_j} \quad (135)$$

za  $j = 1, 2$ .

Rešenje jednačine (125) se dobija integracijom

$$C_j = \int_0^\tau ir\phi dy + a \left( \frac{Q_j + d_j}{2R} \right) \int_0^\tau \left( \frac{1 - e^{d_j y}}{1 - g_j e^{d_j y}} \right) dy \quad (136)$$

Prvi integral se lako rešava, a drugi se dobija zamenom  $x = e^{d_j y}$ . Sada je

$$C_j = ir\phi\tau + \frac{a}{d_j} \left( \frac{Q_j + d_j}{\sigma^2} \right) \int_1^{e^{d_j \tau}} \left( \frac{1-x}{1-g_j x} \right) \frac{1}{x} dx \quad (137)$$

Rešavanjem integrala u relaciji (137) i zamenjivanjem dobijamo

$$C_j = ir\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - i\rho\sigma\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \right] \quad (138)$$

Ovim se završava originalno izvođenje *Heston*-ovog modela.

### **5.3.4. Heston-ovo kvazi-analičko rešenje za cenu evropske call opcije**

Da sumiramo, cena evropske *call* opcije sa vremenom do dospeća  $\tau$  je

$$C_t(K) = e^{x_t} P_1(x_t, V_t, t) - e^{-r\tau} K P_2(x_t, V_t, t) \quad (139)$$

gde su ("*in-the-money*") verovatnoće

$$P_j = Pr(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x_t, V_t)}{i\phi} \right] d\phi \quad (140)$$

sa karakterističnim funkcijama

$$f_j(\phi; x_t, V_t) = exp\{C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)V_t + i\phi x_t\} \quad (141)$$

Da bi se ovo rešilo, rešavamo izraze po  $C_j$  i  $D_j$  u jednakostima (138), (139) da bi dobili dve karakteristične funkcije. Tada rešavamo integrale za  $P_1$  i  $P_2$  koristeći algoritme za numeričku integraciju. Integral u jednačini (140) je neprekidna funkcija koja brzo opada, i uvek postoji jer karakteristične funkcije uvek postoje (videti [Heston]).

Bitno je napomenuti da možemo uzeti i samo jednu karakterističnu funkciju, pošto postoji samo jedan finansijski instrument. Naime, verovatnoće  $P_1$  i  $P_2$  možemo pisati posredstvom samo jedne karakteristične funkcije na sledeći način

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi - i; x_t, V_t)}{i\phi f(-i; x_t, V_t)} \right] d\phi \quad (142)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi; x_t, V_t)}{i\phi} \right] d\phi \quad (143)$$

Detaljnije objašnjenje i dokaz se može pogledati u [Rouah].

Malo drugačija formulacija jednačina (138) i (134) nam zadaje manje numeričkih problema u simulacijama, pa ćemo se zato i držati sledećih jednačina (detaljnije objašnjenje videti u [Albrecher]).

$$D_j = \frac{b_j - i\rho\sigma\phi - d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - h_j e^{-d_j\tau}} \right) \quad (144)$$

$$h_j = \frac{1}{g_j} = \frac{b_j - i\rho\sigma\phi - d_j}{b_j - i\rho\sigma\phi + d_j} \quad (145)$$

$$C_j = i r \phi \tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - i\rho\sigma\phi - d_j)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - h_j e^{-d_j\tau}}{1 - h_j} \right) \right] \quad (146)$$

## **6. Opis i rezultati simulacije**

*Heston*-ov model je najuspešniji model stohastičke volatilnosti koji pokušava da uhvati *volatility smile* efekat uočen u impliciranim volatilnostima likvidnih opcija, i da popuni prazninu stvorenu nerealnom pretpostavkom konstantne volatilnosti u *BS* modelu. U *Heston*-ovom modelu, varijanse, ne volatilnosti, su postavljene tako da prate *CIR* proces. Kao što je već pomenuto, ovo je proces koji se često koristi u finansijama, za opisivanje različitih veličina, ali prvenstveno za kratkoročne kamatne stope. Glavni razlog za preferenciju kvadratnog korena u difuzionom članu leži u analitičkoj jednostavnosti njenih karakterističnih funkcija uprkos ne-Gausovskim raspodelama.

*Monte Carlo* simulacija je ponekad jedini način da se dobije cena za nelikvidne finansijske instrumente. Kao kontrast njenoj analitičkoj jednostavnosti karakterističnih funkcija, efikasna simulacija *CIR* procesa nije trivijalan zadatak. Generalno, naići ćemo na dva problema pri simulaciji *Heston*-ovog modela: prvo je nesrećno ograničenje parametara koje onemogućava negativnu varijansu, a drugo je nemogućnost da se isključi negativna varijansa u putanjama. Oba ova problema dovode do grešaka u simulacijama. Najveći deo istraživanja u vezi efikasne simulacije *Heston*-ovog modela bio je usmeren na ograničavanje varijanse na pozitivne vrednosti. Šema koja se pored *Andersen*-ove (videti [Andersen]), često koristi je opisana u [Kahl]. Ova šema daje dosta dobre rezultate, ali ona, kao i *Andersen*-ova, mora da uvede određena ograničenja za parametre. Ovde ćemo se ograničiti na šemu transformisane volatilnosti, koja iako jednostavna za implementiranje, nešto sporije konvergira od *Andersen*-ove. Ipak, čak i uz *Euler*-ovu šemu diskretizacije (videti [Glasserman]), dobija se efikasna i tačna simulacija u kojoj se ne moraju uvoditi nikakva ograničenja.

### **6.1. Šema transformisane volatilnosti**

Sve poznate šeme simulacije do sad direktno rade sa *CIR* procesom za varijansu u *Heston*-ovom modelu. Umesto toga ćemo transformisati varijansu u ekvivalentnu volatilnost koja prati *Ornstein-Uhlenbeck*-ov proces. Ovaj efikasan pristup simuliranju *Heston*-ovog modela daje mogućnost za jednostavnu i tačnu simulaciju. Pokazuje se da je prikladnije zameniti varijansu volatilnošću pošto novi *Ornstein-Uhlenbeck*-ov proces nema član sa kvadratnim korenom, pa prema tome nema nikakva ograničenja u pogledu parametara. Referenca za šeme simulacije za *Heston*-ov model je do sada bila *Andersen*-ova *QE* šema koja je davala daleko bolje rezultate od ostalih šema za simulaciju.

*Heston*-ov model je, kao što je do sada poznato, predstavljen sledećim relacijam

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_{t,1} \quad (147)$$

$$dV_t = k(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dB_{t,2} \quad (148)$$

$$dB_{t,1} dB_{t,2} = \rho dt \quad (149)$$

Proces za varijansu, relacija (148), je identičan onome koji se koristi u [CIR] za kamatne stope u kratkom vremenu i njegova glavna osobina jeste da trenutna vrednost varijanse konvergira ka dugoročnoj vrednosti. Ova osobina ("*mean-reversion*") je poželjna osobina za stohastičku varijansu/volatilnost i dobro je dokumentovana mnogim empirijskim istraživanjima.

Ako  $k, \theta$  i  $\sigma$  zadovoljavaju sledeći uslov

$$2k\theta > \sigma^2, V(0) > 0 \quad (150)$$

može se pokazati da su varijanse uvek pozitivne i da je proces za varijansu dobro definisan pod uslovom (150). Ipak, kalibracija bez ograničenja parametara ne osigurava da će varijansa uvek biti pozitivna i vodi do mogućih negativnih vrednosti za varijansu u simulacijama. Ovo onemogućava izračunavanje kvadratnog korena u procesu i ruši simulaciju. Dakle, ograničena kalibracija *Heston*-ovog modela sa ubačenim ograničenjem za parametre je neophodna, i žrtvuje određeni kvalitet fitovanja.

Uslov (150) je poznat kao *Feller*-ov uslov koji omogućava da varijansa uvek bude pozitivna.

Ali čak i ako je uslov (150) zadovoljen, ipak je moguće generisati negativne vrednosti varijanse u praktičnim simulacijama *Heston*-ovog modela. Da bismo ovo pokazali napišimo jednačinu procesa za varijansu u diskretnom obliku

$$V(t + \Delta) = V(t) + k[\theta - V(t)]\Delta + \sigma\sqrt{V(t)}\Delta Z(t) \quad (151)$$

gde je  $Z(t)$  standardna normalna slučajna promenljiva u trenutku  $t$ . Ako  $Z(t)$  postigne veliku negativnu vrednost, tako da

$$V(t) + k[\theta - V(t)]\Delta + \sigma\sqrt{V(t)}\Delta Z(t) < 0 \quad (152)$$

dobijamo da je

$$V(t + \Delta) < 0 \quad (153)$$

Ovaj problem nekada ume da bude nepovoljniji i od uslova (150). Jednostavan i naivan pristup za rešenje pomenutog problema je da odsečemo negativne vrednosti varijanse,  $\max[V(t + \Delta), 0]$ . Ovo je jednostavan princip i lako primenljiv u simulacijama, ali ne daje dovoljno dobra rešenja primenljiva za vrednovanje opcija.

Jednom rečju, negativne vrednosti za varijansu  $V(t)$  dovode do pada cele simulacije. Aproksimacija *CIR* procesa putem procesa bez člana  $\sqrt{V(t)}$  se čini kao jedini način za prevazilaženje problema u simulaciji *Heston*-ovog modela.

Neka je  $v(t) = \sqrt{V(t)}$  stohastička volatilnost u *Heston*-ovom modelu. Ako primenimo *Itô*-ovu lemu, dobijamo sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu za volatilnost

$$dv(t) = \frac{1}{2}k \left[ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4k} \right) v^{-1}(t) - v(t) \right] dt + \frac{1}{2}\sigma dB_2(t) = k_v[\theta_v(t) - v(t)]dt + \sigma_v dB_2(t) \quad (154)$$

gde je

$$k_v = \frac{1}{2}k, \sigma_v = \frac{1}{2}\sigma, \theta_v(t) = \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4k} \right) v^{-1}(t) \quad (155)$$

Možemo primetiti da je proces za volatilnost u stvari *Ornstein-Uhlenbeck*-ov proces koji nema nijedan član sa kvadratnim korenom.

Takođe je bitno primetiti da dugoročni nivo volatilnosti  $\theta_v(t)$  sada nije deterministički, već stohastički. Ovo znači da ne možemo očekivati da će volatilnost konvergirati nekoj tačno određenoj vrednosti u *Heston*-ovom modelu. Druga, bitnija stvar je da  $\theta_v(t)$  može proizvesti negativnu vrednost za volatilnost. Uslov koji  $\theta_v(t)$  drži uvek pozitivnim je

$$4k\theta > \sigma^2 \quad (156)$$

Očigledno je uslov (150) za pozitivnu varijansu i više nego dovoljan da održi pozitivan nivo volatilnosti u *Heston*-ovom modelu.

Nekoliko interesantnih zapažanja proizilazi iz naše transformisane volatilnosti. Prvo, stohastički proces dat jednačinom (147) i naš novi proces za transformisanu volatilnost čine model stohastičke volatilnosti koji se potpuno podudara sa *Heston*-ovim modelom, i izražava dinamiku volatilnosti, ne varijanse. Drugo, proces transformisane stohastičke volatilnosti je uvek dobro definisan i nema ograničenja za bilo koji skup parametara, dok je proces za varijansu matematički ispravan samo pod uslovom (150). Dakle, proces transformisane volatilnosti se može posmatrati kao proces koji generiše varijansu u *Heston*-ovom modelu i koji ne postavlja restrikcije na dinamiku procesa. Takođe, proces transformisane volatilnosti, zajedno sa procesom (147), bi trebalo da vrednuje opcije približnije *Heston*-ovoj aproksimaciji (*Heston*-ovo kvazi-analitičko rešenje za cenu evropske *call* opcije) nego što je to slučaj sa procesom za varijansu, pošto *Heston*-ova aproksimacija takođe nema nikakvih ograničenja u pogledu parametara. Naime, možemo staviti bilo koji skup parametara i u *Heston*-ovu aproksimaciju i u proces transformisane volatilnosti i dobićemo smislene cene. Do sada se nije pojavio nijedan rad ili izveštaj koji dovodi u pitanje tačnost *Heston*-ove aproksimacije usled neadekvatnih parametara. Konačno, proces za transformisanu volatilnost predstavlja *Ornstein-Uhlenbeck*-ov proces sa stohastičkim dugoročnim nivoom volatilnosti  $\theta_v(t)$ . Ako se uzme da je  $\theta_v(t)$  konstanta, dolazimo do jednostavnijeg modela opisanog u [Schobel].

Uzimanjem da je  $X(t) = X_t = \ln S_t$  proces dat u (147) se drugačije može napisati kao

$$dX_t = d(\ln S_t) = \left[ r - \frac{1}{2}V(t) \right] dt + \sqrt{V(t)}dB_1(t) \quad (157)$$

Uzimajući uniformnu vremensku particiju  $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{H-1}, t_H\}$  sa korakom  $\Delta = t_h - t_{h-1}$ , *Euler*-ova šema diskretizacije za Heston-ov model se predstavlja sledećim relacijama

*Heston*-ov model (sa procesom za varijansu)

$$\begin{aligned} X(t_{h+1}) &= X(t_h) + \int_{t_h}^{t_{h+1}} \left[ r - \frac{1}{2}V(t_u) \right] dt_u + \sqrt{V(t_h)}dB_{1,t_u} \approx \\ &X(t_h) + \left[ r - \frac{1}{2}V(t_h) \right] \Delta + \sqrt{V(t_h)}\Delta Z_1(t_h) \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} V(t_{h+1}) &= V(t_h) + \int_{t_h}^{t_{h+1}} k[\theta - V(t_u)]dt_u + \int_{t_h}^{t_{h+1}} \sigma\sqrt{V(t_u)}dB_{2,t_u} \approx \\ &V(t_h) + k[\theta - V(t_h)]\Delta + \sigma\sqrt{V(t_h)}\Delta Z_2(t_h) \end{aligned} \quad (159)$$

*Heston*-ov model (sa procesom za transformisanu volatilnost)

$$\begin{aligned} X(t_{h+1}) &= X(t_h) + \int_{t_h}^{t_{h+1}} \left[ r - \frac{1}{2}V(t_u) \right] dt_u + v(t_h)\sqrt{\Delta}dB_{1,t_u} \approx \\ &X(t_h) + \left[ r - \frac{1}{2}V(t_h) \right] \Delta + v(t_h)\sqrt{\Delta}Z_1(t_h) \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} v(t_{h+1}) &= v(t_h) + \frac{1}{2} \int_{t_h}^{t_{h+1}} k[\theta_v(t_u) - v(t_u)]dt_u + \frac{1}{2} \int_{t_h}^{t_{h+1}} \sigma dB_{2,t_u} \approx \\ &v(t_h) + \frac{1}{2} k[\theta_v(t_h) - v(t_h)]\Delta + \frac{1}{2} \sigma\sqrt{\Delta}Z_2(t_h) \end{aligned} \quad (161)$$

Ovde  $Z_1(t_h)$  i  $Z_2(t_h)$  predstavljaju dve korelisane standardne normalne slučajne promenljive generisane u trenutku  $t_h$ . Za *Heston*-ov model sa transformisanom volatilnošću predstavljen pomoću Euler-ove diskretizacione šeme će nadalje biti korišćen izraz šema transformisane volatilnosti.

Prednosti nove šeme transformisane volatilnosti su bar trostruke. Prvo, proces transformisane volatilnosti se potpuno poklapa sa *Heston*-ovim modelom i u isto vreme izbegava izračunavanje kvadratnog korena. Transformacija volatilnosti je teorijski tačna. Jedina greška simulacije dolazi od diskretizacije i od generatora slučajnih brojeva. Drugo, bilo kakav skup parametara je dozvoljen za proces transformisane volatilnosti. Negativne vrednosti volatilnosti ipak dovode do pozitivne varijanse, pa ne dolazi do sloma simulacije. I treće, transformisani *Heston*-ov model zadržava korelaciju originalnog *Heston*-ovog modela. *Brown*-ovo kretanje koje pokreće proces za varijansu je isto ono koje pokreće i proces za transformisanu volatilnost, tako da nemamo problem sa korelacijom kao u *Andersen*-ovoj *QE* šemi.

Jedina mana šeme transformisane volatilnosti je ta da  $\theta_v(t_h)$  ima član  $v^{-1}(t_h)$  koji je čini stohastičkom kroz vreme. Jednostavna *Euler*-ova šema ne može adekvatno da uhvati veoma haotično ponašanje  $v^{-1}(t_h)$  u vremenskom intervalu  $[t_h, t_{h+1}]$ . Ovo haotično ponašanje može biti čak i pojačano za negativne vrednosti koeficijenta  $(\theta - \sigma^2/4k)$ . U tom slučaju,  $\theta_v(t_h)$  će često skakati sa velike pozitivne na veliku negativnu vrednost i obrnuto u kratkom vremenskom periodu. To znači da vrednost  $\theta_v(t_h)$  dobijena na početku intervala vremena  $[t_h, t_{h+1}]$  više neće biti reprezentativna za taj ceo vremenski period. Da bi postigli tačnu i efikasnu simulaciju poslužićemo se tehnikom zvanom metod momenata.

### 6.1.1. Metod momenata ("Moment-matching")

Neka imamo  $d$  nezavisnih normalnih slučajnih promenljivih  $X_i$  sa parametrima  $(\mu_i, \sigma_i)$ . Tada slučajna promenljiva  $\sum_{i=1}^d (X_i/\sigma_i)^2$  ima necentralnu hi-kvadrat raspodelu sa dva parametra:  $d$  koji predstavlja broj stepeni slobode i  $n = \sum_{i=1}^d (\mu_i/\sigma_i)^2$  koji predstavlja parametar necentralnosti i obeležava se sa  $F_{\chi^2}(x, d, n)$ .

Možemo definisati verovatnoću prelaza  $P(V(t) = x | V(s) = y)$  koja prati necentralnu hi-kvadrat raspodelu  $F_{\chi^2}(aV(s), d, n)$  ( $aV(t)$  je slučajna promenljiva koja prati necentralnu hi-kvadrat raspodelu), gde je

$$d = \frac{4k\theta}{\sigma^2} \quad (162)$$

$$n = \frac{4ke^{-k(t-s)}}{\sigma^2(1-e^{-k(t-s)})} \quad (163)$$

$$a = \frac{n}{e^{-k(t-s)}} = \frac{4k}{\sigma^2(1-e^{-k(t-s)})} \quad (164)$$

Iz osobina necentralne hi-kvadrat raspodele,  $V(t)$  ima sledeća dva momenta

$$E[V(t)|V(s)] = \theta + (V(s) - \theta)e^{-k(t-s)} \quad (165)$$

$$Var[V(t)|V(s)] = V(s) \frac{\sigma^2}{k} e^{-k(t-s)} [1 - e^{k(t-s)}] + \frac{\sigma^2\theta}{2k} [1 - e^{k(t-s)}]^2 \quad (166)$$

Usled jakih oscilacija  $\theta_v(t_h)$  između pozitivnog i negativnog domena, pomenuta diskretizaciona šema ponekad ne uspeva da nam da pravu prosečnu dinamiku procesa  $\theta_v(t_h)$ . Predložena tehnika, mada robustna, se pokazalo da daje jako dobre rezultate. Ona se zasniva na poređenju momenata raspodele, u ovom slučaju samo prvog i drugog momenta, na sledeći način

$$E[v(t_h + \Delta)]^2 = E[V(t_h + \Delta)] = Var[v(t_h + \Delta)] + E[v(t_h + \Delta)]^2 \quad (167)$$

gde je

$$E[V(t_h + \Delta)] = m_1(t_h) = \theta + (V(t_h) - \theta)e^{-k\Delta} \quad (168)$$

$$Var[v(t_h + \Delta)] = m_2(t_h) = \frac{\sigma_v^2}{2k_v} (1 - e^{-2k_v\Delta}) = \frac{\sigma^2}{4k} (1 - e^{-k\Delta}) \quad (169)$$

$$E[v(t_h + \Delta)] = \theta_v(t_h) + (v(t_h) - \theta_v(t_h))e^{-k_v\Delta} = \theta_v(t_h) + (v(t_h) - \theta_v(t_h))e^{-\frac{1}{2}k\Delta} \quad (170)$$

Zamenjujući u jednačinu (167) dobijamo



$$\left[ \theta_v(t_h) + (v(t_h) - \theta_v(t_h))e^{-\frac{1}{2}k\Delta} \right]^2 = m_1(t_h) - m_2(t_h) = \theta + (v^2(t_h) - \theta)e^{-k\Delta} - \frac{\sigma^2}{4k}(1 - e^{-k\Delta}) \quad (171)$$

Ova jednačina se može rešiti po  $\theta_v(t_h)$

$$\theta_v^*(t_h) = \frac{\beta - v(t_h)e^{-\frac{1}{2}k\Delta}}{1 - e^{-\frac{1}{2}k\Delta}} \quad (172)$$

gde je sada

$$\beta = \sqrt{(m_1(t_h) - m_2(t_h))_+} \quad (173)$$

Dobijeno  $\theta_v^*(t_h)$  može biti primenjeno na bilo koji skup parametara i daje dobre rezultate simulacije čak i za slučaj  $4k\theta < \sigma^2$ . Iako ovaj metod zahteva malo više kompjuterskog izračunavanja, on ipak nemerljivo popravlja preciznost simulacije, pa ću za simulaciju šeme transformisane volatilnosti i ja koristiti ovaj metod.

Neke naprednije tehnike simulacije, na primer, "*martingale correction*", mogu biti ukomponovane sa pomenutom šemom radi potencijalnih poboljšanja.

## **6.2. Šema simulacije za Heston-ovu aproksimaciju**

Simulacija Heston-ove aproksimacije se vrši sledećom jednačinom

$$C_t(x_t, V_t, \tau, K) = e^{x_t} P_1(x_t, V_t, t) - e^{-r\tau} K P_2(x_t, V_t, t) \quad (174)$$

gde  $P_j(x_t, V_t, \tau, K)$  predstavljaju već pomenute "*in-the-money*" verovatnoće

$$P_j(x_t, V_t, \tau, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x_t, V_t)}{i\phi} \right] d\phi \quad (175)$$

sa karakterističnim funkcijama

$$f_j(\phi; x_t, V_t) = \exp\{C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)V_t + i\phi x_t\} \quad (176)$$

gde je

$$x_t = \ln(S_t) \quad (177)$$

i za  $j = 1, 2$

$$D_j = \frac{b_j - i\rho\sigma\phi - d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - h_j e^{-d_j\tau}} \right) \quad (178)$$

$$h_j = \frac{1}{g_j} = \frac{b_j - i\rho\sigma\phi - d_j}{b_j - i\rho\sigma\phi + d_j} \quad (179)$$

$$C_j = ir\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - i\rho\sigma\phi - d_j)\tau - 2\ln \left( \frac{1 - h_j e^{-d_j\tau}}{1 - h_j} \right) \right] \quad (180)$$

$$d_j = \sqrt{(i\rho\sigma\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2iu_j\phi - \phi^2)} \quad (181)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = k\theta, b_1 = k + \lambda - \rho\sigma, b_2 = k + \lambda \quad (182)$$

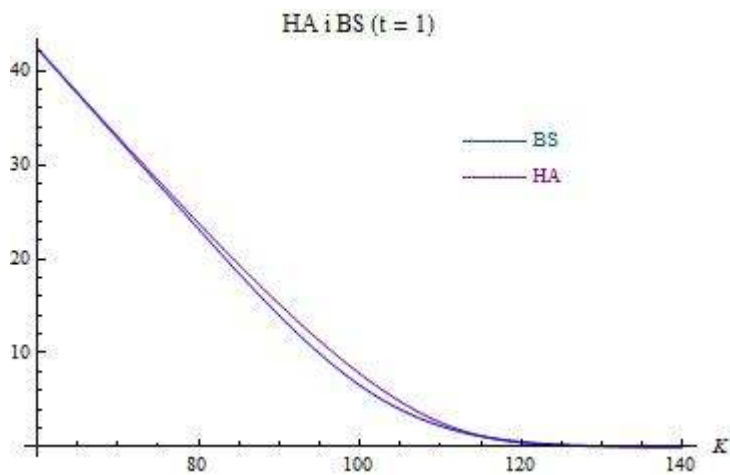
### **6.3. Kalibracija parametara**

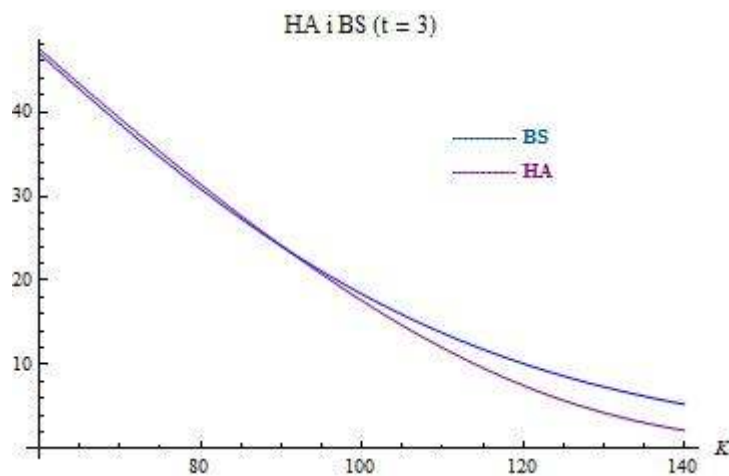
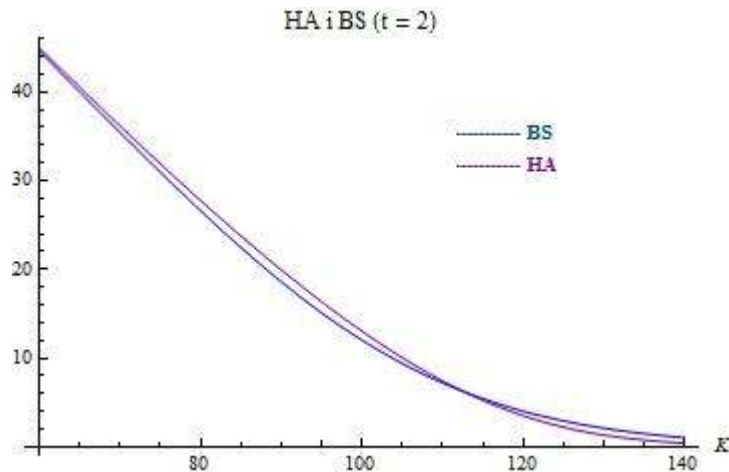
*Heston*-ov model, kao i ostali modeli stohastičke volatilnosti za kalibraciju koristi podatke sa finansijskih tržišta, koji naravno moraju biti kako tačni i validni, tako i dovoljno raznovrsni da bi pokrili sve mogućnosti. Metode koje se najčešće koriste da bi se dobio valjani skup parametara iz istorijskih podataka jesu metod maksimalne verodostojnosti i metod najmanjih kvadrata. Naime, ako  $\psi_0$  predstavlja početni skup parametara koji mi zadamo, onda ćemo na osnovu minimiziranja rezidualne greške pri primeni istorijskih podataka na naš model, dobiti skup parametara  $\psi$  koji bi trebalo dobro da opiše stanje na tržištu. Pored toga što je potreban jako veliki broj podataka za postizanje zadate tačnosti, veliki problem predstavlja definisanje početnih parametara. Naime, loše definisanje početnih parametara može dovesti do vrednosti parametara koje neće dobro opisivati tržište. U tom cilju, jako je bitan i programski paket koji se koristi. Danas, međutim, postoje određene smernice za definisanje početnih parametara, kao i određena ograničenja intervala u kojima se optimalan parametar treba nalaziti koje mnogo pomažu pri kalibraciji.

Parametri u sledećoj tabeli su reprezentativni za jedan od poznatijih finansijskih indeksa *S&P 500* (*Standard & Poor's 500*) i biće korišćeni nadalje u simulaciji

$r$	0.04
$k$	0.9933
$\theta$	0.0375
$V_0$	0.0128
$\sigma$	0.3167
$\rho$	-0.7178
$S_0$	100

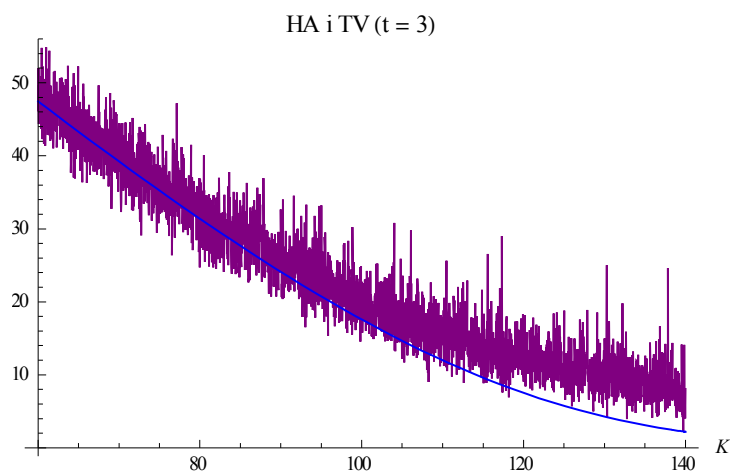
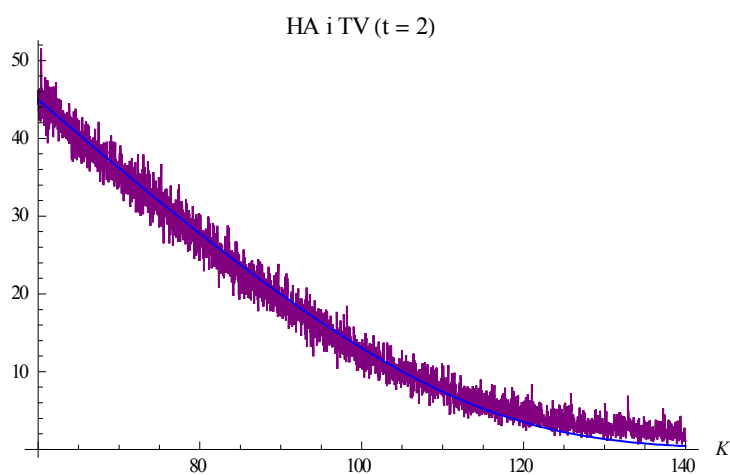
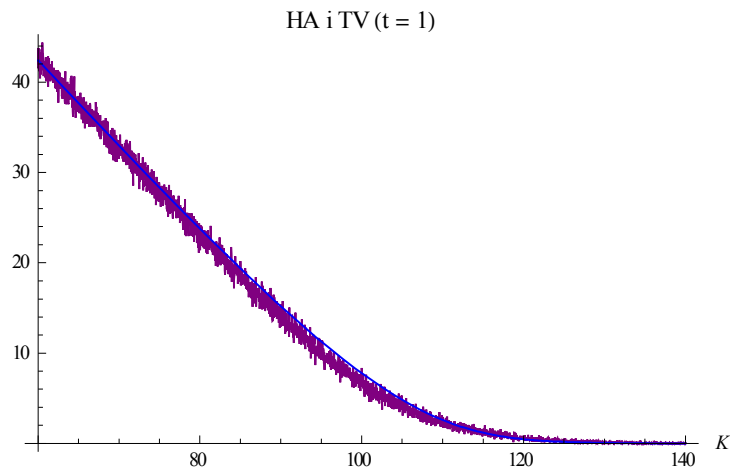
#### **6.4. Rezultati simulacije za cenu evropske *call* opcije**





Poređenje Heston-ove aproksimacije i BS modela za  $t = 1, 2, 3$

Na gornjim slikama je prikazano poređenje *Heston*-ovog modela (pomoću *Heston*-ove aproksimacije) i *BS* modela (pomoću *BS* analitičkog rešenja) za cenu evropske *call* opcije u tri različita trenutka. Volatilitet u *BS* formuli je uzeta kao usrednjena vrednost volatiliteta u šemi transformisane volatiliteta za isti vremenski trenutak da bi se postiglo adekvatno poređenje. Znamo da za *volatility smile*, *BS* formula precenjuje opcije koje su *at-the-money* ili blizu, dok potcenjuje opcije koje su *in-the-money* i *out-of-the-money*. S druge strane, za *volatility skew* efekat, *BS* formula potcenjuje opcije koje su duboko *in-the-money*, a precenjuje opcije koje su duboko *out-of-the-money*. Pošto se radi o podacima za indeks *S&P 500*, možemo primetiti sa naših grafika da se zaista kriva *BS* modela nalazi ispod *Heston*-ove krive, za *in-the-money* opcije, dok se za *out-of-the-money* opcije kriva nalazi iznad *Heston*-ove krive. Ono što još treba primetiti je da potcenjivanje, odnosno precenjivanje cene *call* opcije raste sa vremenom, pa je u trenutku  $t = 3$  naizraženije. Ovo naravno i dolazi zbog toga što se za *BS*-ov model uzima prosečna vrednost volatiliteta tokom celog intervala, pa se naravno pri svakom povećanju intervala gubi sve više informacija za volatilitet u *BS* modelu.

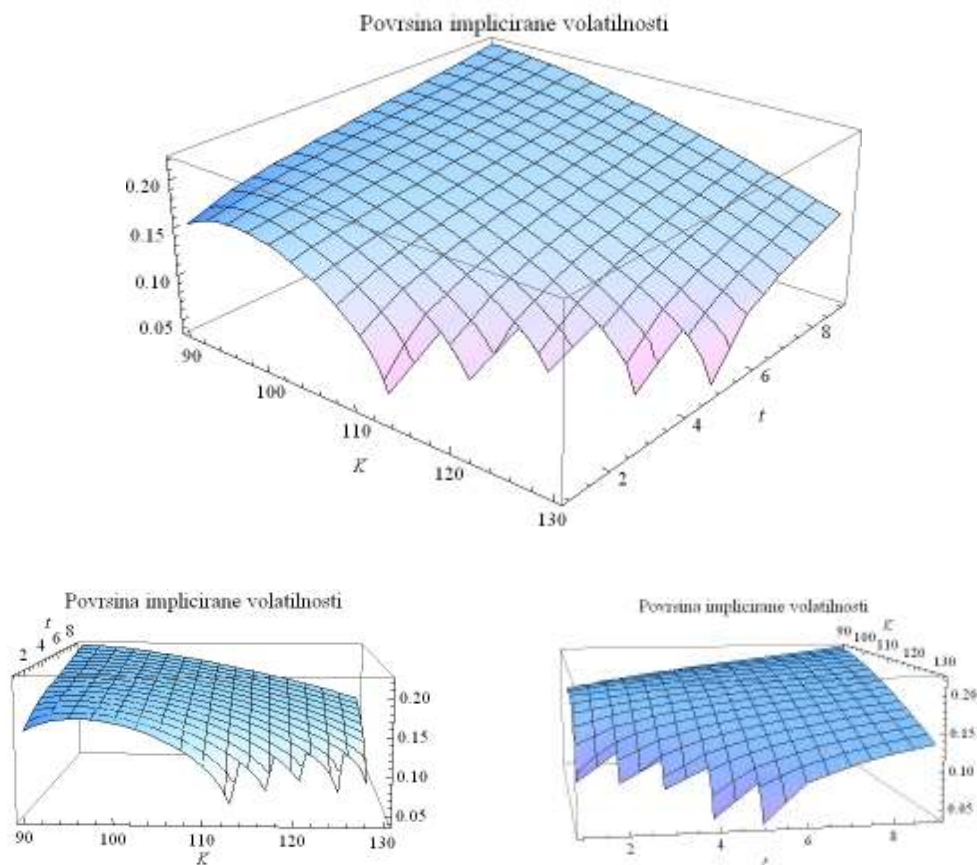


*Poređenje Heston-ove aproksimacije i šeme transformisane volatilnosti za  $t = 1, 2, 3$*

Na gornje tri slike je prikazano poređenje *Heston*-ovog modela putem *Heston*-ove aproksimacije i šeme transformisane volatilnosti za različite trenutke. Šum koji se javlja kod šeme transformisane volatilnosti je posledica grubog vremenskog koraka 0.5 koji je uzet za simulaciju (greška diskretizacije). Sa smanjenjem

koraka šum će postajati sve manji. U suštini, vidimo da i *Heston*-ova aproksimacija i šema transformisane volatilnosti daju skoro ista rešenja za  $t = 1$ . Naravno, sa povećanjem vremena izvršenja, povećava se i šum kod šeme transformisane volatilnosti, kao i odstupanje jedne šeme od druge, što se može videti na druge dve slike. Može se pokazati da se i šum i odstupanje mogu smanjiti sa povećanjem koraka nauštrb povećane kompleksnosti računanja. U svakom slučaju, za  $t = 1$  ili  $t = 2$  se primećuje da su greške odstupanja jedne šeme od druge relativno male, što znači da šema transformisane volatilnosti daje sasvim dobre rezultate, a da će davati još bolje, čak i sa većim vremenom izvršenja, sa smanjenjem greške diskretizacije.

### 6.5. Simulacija implicirane volatilnosti



Na gornjim slikama je prikazana površina implicirane volatilnosti (grafik implicirane volatilnosti u zavisnosti od cene izvršenja i vremena dospeća). Dve manje slike samo predstavljaju veću, "glavnu", sliku iz druge perspektive radi lakšeg uočavanja određenih efekata. Naime, sa grafika se može izdvojiti nekoliko zapažanja. Prvo, pošto je simulacija rađena za finansijski indeks *S&P 500*, očekujemo da vidimo opadanje implicirane volatilnosti sa rastom cene izvršenja (*volatility skew* efekat) što i jeste uočljivo na slikama. Drugo, primećujemo da je volatilnost relativno mala. Pomenuto je da akcije imaju volatilnost od

15% do 60%, dok na slikama vidimo da je najveća volatilnost u nekom trenutku oko 23%. Ovo je i očekivano, s obzirom, prvo, da se radi o indeksu 500 najvećih američkih kompanija koje i dan danas važe za veoma stabilne kompanije za sigurno ulaganje, a drugo, da je simulacija izvršena sa parametrima kalibrisanim na osnovu vrednosti indeksa u "ravnoteži" (period prosperiteta, na primer, period do 2007. godine). Treće, primećujemo da implicirana volatilnost raste sa porastom vremena izvršenja, što je i logično. I poslednje, može se primetiti da je brzina opadanja volatilnosti sve manja kako vreme izvršenja raste, odnosno da se površina implicirane volatilnosti "izravnjava" sa vremenom.

## 7. Zaključak

Nezadrživ razvoj tehnologije u zadnjih 50-ak godina je doveo do računara koji danas bez mnogo muke mogu simulirati i proveriti većinu modela koja se pojavljuje u praksi. To se posebno odrazilo na finansijske nauke u kojima se sada mogu zadavati sve kompleksniji i realističniji modeli za računanje vrednosti različitih finansijskih instrumenata. Model stohastičke volatlnosti koji, iako kreiran pre skoro dve decenije, danas drži primat u vrednovanju najrazličitijih vrsta opcija jeste *Heston-ov* model.

*Heston-ov* model, kao što je pokazano, vrši korekciju nerealistične pretpostavke *BS* modela za konstantnu volatlnost. Samim tim ovaj model mnogo bolje vrednuje opcije od jednostavnog *BS* modela. Naime, on uzima u obzir *volatility smile* efekat, a samim tim i razbija pretpostavku o log-normalnoj raspodeli cena osnovnog finansijskog instrumenta.

U teorijskom delu rada, osim nekih važnijih rezultata iz finansijske matematike i stohastičkog računa je predstavljen i izveden *BS-ov* model kao referenca za *Heston-ov* model. Posle toga je detaljno izveden i *Heston-ov* model, nakon koga sledi objašnjenje implicirane volatlnosti i *volatility smile* efekta.

U ovom radu je takođe predstavljena i jedna nova tehnika pomoću koje je simulacija *Heston-ovog* modela mnogo efikasnija. Ova tehnika ne uzima proces za varijansu, već ga transformiše u ekvivalentni proces za volatlnost koji ne zahteva nikakvo ograničenje za parametre. Simulacijom je pokazano da ova šema daje dobre rezultate kada se poredi sa *Heston-ovom* aproksimacijom i ne dovodi do pada simulacije zbog negativnih vrednosti. Pomenuta šema nam dakle omogućava da simuliramo *Heston-ov* model bez ikakvih ograničenja, baš kao što nam to i *Heston-ova* aproksimacija omogućava.

Kao što je u radu već pomenuto, danas postoji nekoliko korisnih proširenja *Heston-ovog* modela. Ali princip ostaje isti: kompromis između što veće preciznosti simulacije i što veće jednostavnosti za računarsko modelovanje. Naravno, svaka kompanija, odnosno individualni investitor, će sami odlučivati o "stepenu slobode" *Heston-ovog*, ali i bilo kog drugog modela. Međutim, s obzirom na neverovatan rast računarske moći poslednjih godina, neće proći još dugo vremena pre nego što će ljudi početi da brinu samo o efikasnosti nekog modela, a ne i o njegovoj robustnosti.



## Literatura

- [Albrecher] H. Albrecher, P. Mayer, W. Schoutens, J. Tistaert. The Little Heston Trap. *Wilmott Magazine*, 2007.
- [Andersen] L. Andersen. Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model. *Banc of America Securities*, 2006.
- [Benhamou] E. Benhamou, E. Gobet, M. Miri. Time Dependent Heston Model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2010.
- [BS] F. Black, M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 1973.
- [CIR] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 1985.
- [Dupire] B. Dupire. Pricing with a Smile. *Risk Magazine*, 2004.
- [Gatheral] J. Gatheral. The Volatility Surface: A Practitioner's Guide. *Wiley Finance*, 2006.
- [Gil-Pelaez] J. Gil-Pelaez. Note on the Inversion Theorem. *Biometrika*, 1951.
- [Glasserman] P. Glasserman. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. *Springer*, 2003.
- [Heston] S. Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 1993.
- [Hull] J. Hull. Options, Futures, and other Derivatives, seventh edition. *Prentice Hall*, 2009.
- [Kahl] C.Kahl, P.Jackel. Fast strong approximation Monte-Carlo schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 2006.
- [Klebaner] F. Klebaner. Introduction To Stochastic Calculus With Applications, second edition. *Imperial College Press*, 2005.
- [Merkle] M. Merkle. Verovatnoća i Statistika za inženjere i studente, treće izdanje. *Akadska misao*, 2010
- [Merton] R. Merton. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973.
- [Rouah] F. Rouah. Derivation of the Heston Model. [www.frouah.com/pages/finmath.html](http://www.frouah.com/pages/finmath.html), 2008.
- [Schobel] R. Schobel, J. Zhu. Stochastic Volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: An extension. *Europe Finance Review*, 1999.

- [Steele] M. Steele. Stochastic Calculus and Financial Applications. *Springer*, 2001.
- [wikipedia] [http://en.wikipedia.org/wiki/Volatility\\_smile](http://en.wikipedia.org/wiki/Volatility_smile);  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Implied\\_volatility](http://en.wikipedia.org/wiki/Implied_volatility);  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Black\\_Scholes](http://en.wikipedia.org/wiki/Black_Scholes);
- [Wilmott] P. Wilmott. Quantitative Finance, second edition. *John Wiley & Sons*, 2007.
- [Zhu] J.Zhu. A Simple and Exact Simulation Approach to Heston Model.  
[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1153950](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1153950), 2008.