Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Odsek za primenjenu matematiku

MASTER RAD

MCMC metoda u Bayes-ovskoj statistici

Mentor:
Prof. dr Milan Merkle

Kandidat:
Aleksandar Nešić, dipl. ing.

Sadržaj

Uvod

Markov Chain Monte Carlo (MCMC) metode predstavljaju klasu algoritama koji se koriste za generisanje uzoraka slučajnih promenljivih sa željenom raspodelom. Ove metode se zasnivaju na konstruisanju Markov-skih lanaca čija je ravnotežna raspodela željena raspodela, odnosno raspodela iz koje želimo da generišemo uzorak slučajnih promenljivih. Jedna od mnogobrojnih primena ovih metoda jeste ocenjivanje vrednosti parametara slučajnih procesa. Tako su MCMC metode našle svoje mesto i u finansijskoj matematici gde se koriste za ocenu vrednosti parametara modela formiranja cena akcija i opcija na finansijskom tržištu.

U ovom Master radu biće prikazana primena MCMC metoda u Bayes-ovskom ocenjivanju parametara slučajnih procesa za klasičan Black-Scholes-ov model cena akcija i opcija. Ovaj model je opisan pomoću procesa geometrijskog Brown-ovog kretanja sa konstantnim parametrima čije vrednosti je potrebno oceniti. Parametrima se dodeljuju apriorne raspodele, a zatim se posmatra realizacija procesa formiranja cena. Na osnovu Bayes-ovske paradigme, nalaze se aposteriorne raspodele parametara, a za njihovu ocenu se uzimaju vrednosti u kojima gustine aposteriornih raspodela dostižu svoje maksimume. Uloga MCMC metoda je da generišu nizove slučajnih promenljivih čije vrednosti predstavljaju vrednosti parametara, i koji asimptotski teže ka aposteriornim raspodelama.

U prvom delu Master rada date su teorijske osnove Bayes-ovskih metoda, slučajnih procesa, Markov-skih lanaca, Monte Carlo metoda, MCMC metoda i matematičkih modela određivanja cena akcija i opcija. U drugom delu rada data je primena MCMC metoda u ocenjivanju vrednosti parametara geometrijskog Brown-ovog kretanja u modelu cena akcija i opcija na finansijskom tržištu prema Black-Scholes-ovoj formuli. Takođe su analizirane i osetljivosti MCMC metoda na promenu apriornih raspodela.

Ključne reči: Markov Chain Monte Carlo (MCMC), Bayes-ovska paradigma, slučajni procesi, Markov-ski procesi, Markov-ski lanci, Monte Carlo metode, Black-Scholes-ova formula

§1 Elementi Bayes-ovske teorije

Uprkos tome što je od samog nastanka u 18. veku pa sve do danas predmet mnogih kontroverzi, Bayes-ovska teorija je svoju primenu našla u praktično svim oblastima nauke. U nekim primenama kao što je npr. prepoznavanje oblika, metodi zasnovani na Bayes-ovskoj teoriji se koriste kao neizostavne alatke. Osnovni princip na kome se zasniva ova teorija i koji je Engleski sveštenik Thomas Bayes predstavio u svojoj čuvenoj formuli, jeste da se prikupljanjem informacija iz realizovanih događaja koriguju verovatnoće ustanovljene na osnovu ranijih pretpostavki, iskustava i saznanja. U ovom poglavlju biće opisani elementi Bayes-ovske teorije, kao i još neki pojmovi verovatnoće i statistike neophodni za razumevanje Bayes-ovske teorije.

1.1 Uslovna verovatnoća

Zamislimo da posmatramo eksperiment koji ima $n>1$ mogućih ishoda koji su podjednako verovatni. Ukoliko nemamo nikavu dodatnu informaciju o ishodu eksperimenta, verovatnoća svakog od n mogućih ishoda iznosiće $\frac{1}{n}$. Zamislimo sada da posmatramo isti eksperiment ali da imamo informaciju da se iz određene grupe od $m<n$ ishoda nije realizovao ni jedan. Sa ovom informacijom, skup mogućih ishoda eksperimenta se svodi na ukupno n-m ishoda. Verovatnoća realizacije m ishoda za koje znamo da se nisu dogodili jednaka je nuli, dok je verovatnoća svakog od mogućih n-m ishoda eksperimenta jednaka $\frac{1}{n-m}$. Suština je u tome da se prikupljanjem relevantnih informacija u vezi realizacije eksperimenta mogu promeniti verovatnoće pojedinačnih ishoda.

Definicija 1.1 *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \Im, P)$ *i neka su su dati događaji* $A, B \in \Im$, *P(B)*$\neq 0$[1]. *Uslovna verovatnoća događaja A, pod uslovom realizacije događaja B u oznaci* $P(A\,|\,B)$, *definiše se sa:*

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Drugim rečima, ukoliko tražimo verovatnoću događaja *A*, a znamo da se realizovao događaj *B*, tada se skup svih mogućih ishoda svodi na skup *B*, dok se skup povoljnih ishoda za događaj A svodi na skup *AB*. Može se jednostavno pokazati da funkcija $P(\cdot\,|\,B)$ zadovoljava aksiome verovatnoće.

Teorema 1.1 *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \Im, P)$ *i neka je dat događaj* $H \in \Im$ *(hipoteza) takav da je P(H)*$\neq 0$. *Tada je uslovna verovatnoća nekog događaja pod uslovom H,* $P(\cdot\,|\,H)$ *verovatnoća, tj.*

(i) $P(\Omega\,|\,H) = 1$

(ii) $(\forall A \in \Im)\, 0 \leq P(A\,|\,H) \leq 1$

(iii) Neka je $A = \{A_1, A_2, ...\}$ dat skup događaja takav da važi: $|A| \leq \aleph_0$ i $(\forall i, j \in N)(i \neq j) \Rightarrow A_i \bigcap A_j = \varnothing$. Tada važi sledeće:

$$P(A\,|\,H) = \sum_i P(A_i\,|\,H),\ (i = 1, 2, ...)$$

□

(i) $P(\Omega\,|\,H) = \dfrac{P(\Omega H)}{P(H)} = \dfrac{P(H)}{P(H)} = 1$

[1] Uslovna verovatnoća se može definisati i u slučaju da je *P*(*B*)=0. Ovu definiciju ćemo videti kasnije.

(ii) $0 \le \dfrac{P(AH)}{P(H)} \le \dfrac{P(H)}{P(H)} = 1$

(iii) $P(A|H) = P\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... | H\right) = \dfrac{P\left(\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ...\right) \bigcap H\right)}{P(H)} =$

$$= \frac{P\left(\left(A_1 \bigcap H\right) \bigcup \left(A_2 \bigcap H\right) \bigcup ...\right)}{P(H)} = \frac{\sum_i P(A_i H)}{P(H)} =$$

$$= \sum_i \frac{P(A_i H)}{P(H)} = \sum_i P(A_i | H), \ (i = 1, 2, ...)$$

□

Na osnovu svega navedenog, ne može se izvesti zaključak da će saznanje da se u ekperimetu realizovao neki događaj *A* obavezno promeniti verovatnoću nekog drugog događaja *B*. Postoje slučajevi kada to ne mora da važi i tada za događaje *A* i *B* kažemo da su statistički nezavisni.

Definicija 1.2

(i) *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \Im, P)$ *i neka su su dati događaji* $A, B \in \Im$. *Kažemo da su događaji A i B statistički nezavisni (ili skraćeno nezavisni) ako važi da je* $P(AB) = P(A)P(B)$.

(ii) *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \Im, P)$ *i neka su dati događaji* $A_1, A_2, ..., A_n \in \Im, n \ge 2$ *i neka je* $(j_1, j_2, ..., j_k), 2 \le k \le n$ *jedna kombinacija bez ponavljanja skupa* $N_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Ukoliko važi da je :

$$\forall (j_1, j_2, ..., j_k) \, P\left(A_{j_1} A_{j_2} ... A_{j_k}\right) = P\left(A_{j_1}\right) P\left(A_{j_2}\right) ... P\left(A_{j_k}\right)$$

kažemo da su događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ *nezavisni u celini.*

Ukoliko važi da je:[2]

$$(\forall i, j \in N_n)(i \ne j) \Rightarrow P\left(A_i A_j\right) = P(A_i) P\left(A_j\right)$$

kažemo da su događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ *nezavisni u parovima.*

Na osnovu definicije 1.2 može se zaključiti da su događaji koji su nezavisni u celini, istovremeno nezavisni i u parovima. Obrnuto u opštem slučaju ne važi.

Realizaciju događaja, naravno, možemo predstaviti preko dodele vrednosti slučajnim promenljivama u zavisnosti od ishoda eksperimenta, pa će verovatnoća realizacije nekog događaja biti jednaka verovatnoći da neka slučajna promenljiva ima određenu vrednost. U nastavku teksta, proizvoljan događaj *A* ćemo predstavljati na sledeći način: $A = \{X \in B\}$, gde je *B* proizvoljan Borel-ov skup.

[2] Umesto uslova (i≠j), dovoljan je uslov je (*i*<j) ili (*i*>j).

1.1.1 Uslovne raspodele u odnosu na događaj

Videli smo da se verovatnoća nekog događaja može promeniti ukoliko nam je poznato da se u slučajnom eksperimentu realizovao neki drugi događaj. Ako sada umesto događaja posmatramo slučajne promenljive i njihove raspodele možemo izvesti slične zaključke. Ukoliko nam je poznato da se u slučajnom eksperimentu realizovao neki događaj, tada se raspodele slučajnih promenljivih mogu razlikovati u odnosu na slučaj kada o ishodu slučajnog eksperimenta ne znamo ništa.

Definicija 1.3 *Neka je data slučajna promenljiva X, neka je dat događaj H takav da je P(H)* $\neq$ *0 i neka je* $B \subset \mathbf{R}$ *proizvoljan Borel-ov skup.*

(i) *Uslovna raspodela slučajne promenljive X u odnosu na događaj H je verovatnoća*

$$P_{X|H}(B) = P(X \in B \mid H) = \frac{P(\{X \in B\} \cap H)}{P(H)}.$$

(ii) *Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj H je funkcija*

$$F_{X|H}(x) = P(X \leq x \mid H) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap H)}{P(H)}, \; x \in R.$$

(iii) *Uslovna funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive X u odnosu na događaj H je funkcija* $x \mapsto f_{X|H}(x)$*, takva da važi:*

$$F_{X|H}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|H}(t)dt, \; x \in R$$

(iv) *Neka je data diskretna slučajna promenljiva X. Definišimo skup* $S \subset \mathbf{R}$ *na sledeći način:* $S = \{x \in \mathbf{R} \mid P(X = x) \neq 0\}$[3]. *Uslovni zakon raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj H je zakon raspodele*

$$P(X = x_k \mid H) = \frac{P(X = x_k, H)}{P(H)}, \; k = 1, 2, \ldots$$

Sve uslovne raspodele iz definicije 1.3 imaju iste osobine kao i raspodele koje nisu uslovne u odnosu na neki događaj. Npr. uslovna funkcija gustine verovatnoće je normirana na intervalu $(-\infty, +\infty)$, uslovna funkcija raspodele je na istom intervalu monotono neopadajuća, itd.

1.1.2 Uslovne raspodele u odnosu na slučajnu promenljivu

Videli smo kako se definišu uslovne raspodele u odnosu na neki „uslovni“ događaj. Ukoliko sada i taj događaj predstavimo preko neke slučajne promenljive, dobićemo uslovne raspodele u odnosu na slučajnu promenljivu.

[3] Pošto je *X* diskretna slučajna promenljiva, važi da je $|S| \leq \aleph_0$.

Definicija 1.4 *Neka su date slučajna promenljiva X i slučajna promenljiva Y koja je diskretna, i neka je* $B \subset \mathbf{R}$ *proizvoljan Borel-ov skup. Raspodela slučajne promenljive X u odnosu na slučajnu promenljivu Y definiše se kao raspodela koja pri realizaciji događaja* $\{Y = y\}$ *dobija vrednost:*

$$P\left(X \in B \mid Y = y\right) = \frac{P\left(X \in B, Y = y\right)}{P\left(Y = y\right)}$$

U dosadašnjem tekstu ove glave, uslovnu verovatnoću i uslovne raspodele smo definisali u odnosu na događaje koji su pozitivne verovatnoće. Zamislimo sada da imamo dve neprekidne slučaje promenljive *X* i *Y*, i neka nam je poznata njihova zajednička raspodela $\left(x, y\right) \mapsto f\left(x, y\right)$. Ukoliko želimo da odredimo uslovnu raspodelu slučajne promenljive *X* pod uslovom da slučajna promenljiva *Y* ima neku fiksiranu vrednost $Y = y$, suočićemo se sa problemom da je $P(Y = y) = 0$. Ovaj problem ćemo rešiti na sledeći način. Neka $x, h \in \mathbf{R}, h \neq 0$. Tada će važiti:

$$P\left(X \le x \mid Y \in \left[y, y+h\right]\right) = \frac{\int_{y}^{y+h} \int_{-\infty}^{x} f\left(u,v\right) du dv}{\int_{y}^{y+h} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u,v\right) du dv} = \frac{\int_{y}^{y+h} \int_{-\infty}^{x} f\left(u,v\right) du dv}{\int_{y}^{y+h} f_Y\left(v\right) dv}$$

Primenićemo L'Hospital-ovo pravilo na poslednji količnik, uz uslov da su funkcije $v \mapsto f\left(u,v\right)$ i $v \mapsto f_Y\left(v\right)$ neprekidne i dobićemo:

$$\lim_{h \to 0} P\left(X \le x \mid Y \in \left[y, y+h\right]\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{y}^{y+h} \int_{-\infty}^{x} f\left(u,v\right) du dv}{\int_{y}^{y+h} f_Y\left(v\right) dv} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} f\left(u, y+h\right) du}{f_Y\left(y+h\right)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{f_Y\left(u, y\right)}{f_Y\left(y\right)} du$$

uz uslov da je $f_Y\left(y\right) \neq 0$.

Definicija 1.5 *Neka su date neprekidne slučajne promenljive X i Y koje su koncentrisane na skupovima* D_X *i* D_Y *koji su unije najviše prebrojivo mnogo disjunktnih otvorenih intervala, i neka su njihove funkcije gustine verovatnoće* f_X *i* f_Y *neprekidne i pozitivne. Neka je zajednička funkcija gustine verovatnoće* $f\left(x, y\right)$ *neprekidna po svakoj promenljivoj posebno za* $x \in D_X$ *i* $y \in D_Y$.

(i) *Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj* $\{Y = y\}$ *je funkcija*

$$P\left(X \le x \mid Y = y\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f\left(u, y\right)}{f_Y\left(y\right)} du .$$

(ii) *Uslovna funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive X u odnosu na događaj* $\{Y = y\}$ *je funkcija:*

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

1.2 Funkcija verodostojnosti

Neka je X data Gauss-ova slučajna promenljiva $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Ukoliko bismo znali kolike su vrednosti parametara μ i σ^2, tada bismo od ponuđene npr. dve vrednosti slučajne promenljive X, x_1 *i* x_2 mogli da na osnovu funkcije gustine verovatnoće odredimo koja je od ove dve vrednosti „verovatnija“, kao i da odredimo kolika je verovatnoća da se vrednost slučajne promenljive X nađe u nekom podskupu skupa **R**. Zamislimo obrnutu situaciju, tj. dat nam je uzorak vrednosti slučajne promenljive X, a od nas se traži da procenimo kolike bi mogle biti najverovatnije vrednosti parametara μ i σ^2. Ovaj problem nas dovodi do pojma verodostojnosti. Za razliku od verovatnoće koja se koristi da predvidi nepoznate ishode na osnovu poznatih parametara, verodostojnost se koristi da proceni nepoznate parametre na osnovu poznatih ishoda.

U opštem slučaju zamislimo da imamo slučajni vektor $\overrightarrow{X}$, vektor parametara $\vec{\theta}$ i zajedničku funkciju gustine verovatnoće (odnosno raspodelu u slučaju da je slučajni vektor diskretan)[4] $f\left(\vec{x}\,|\,\vec{\theta}\right)$. Za različite vrednosti vektora parametara imaćemo različite funkcije gustine verovatnoće $\vec{x}\rightarrow f\left(\vec{x}\,|\,\vec{\theta}\right)$, tj. od vrednosti vektora parametara zavisiće u kojim tačkama prostora vektora slučajnih promenljivih će funkcija gustine verovatnoće imati koje vrednosti, odnosno, koje su verovatnoće da će vektor slučajnih promenljivih imati određene vrednosti. Ukoliko sada funkciju f shvatimo kao funkciju svog drugog argumenta, pri čemu nam je prvi argument poznat, dobijamo funkciju verodostojnosti $\vec{\theta}\rightarrow f\left(\vec{x}\,|\,\vec{\theta}\right)$, u oznaci $L\left(\vec{\theta}\,|\,\vec{x}\right)$ (slovo L potiče od Engleske reči „*likelihood*“).

Definicija 1.6[5]
Neka je data zajednička funkcija gustine raspodele vektora slučajnih promenljivih $\overrightarrow{X}$ *u zavisnosti od vektora parametara* $\vec{\theta}$, $f\left(\vec{x}\,|\,\vec{\theta}\right)$. *Funkcija verodostojnosti vektora parametara* $\vec{\theta}$ *za fiksno* $\vec{x}$ *u oznaci* $L\left(\vec{\theta}\,|\,\vec{x}\right)$ *je funkcija* $f\left(\vec{x}\,|\,\vec{\theta}\right)$ *posmatrana kao funkcija svog drugog argumenta.*

---
[4] Pomoću Dirac-ove delta funkcije, moguće je definisati funkciju gustine verovatnoće i za diskretne slučajne promenljive što omogućava da se na jedinstven način proučavaju osobine diskretnih i neprekidnih slučajnih promenljivih (v. npr. [2]).

U slučaju da imamo uzorak od $n>1$ međusobno nezavisnih vrednosti slučajnog vektora, funkcija verodostojnosti vektora parametara bi se dobila kao proizvod pojedinačnih funkcija verodostojnosti, tj.

$$L\left(\vec{\theta} \mid \overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{X_n} = \overrightarrow{x_n}\right) = f\left(\overrightarrow{x_1} \mid \vec{\theta}\right) \cdot f\left(\overrightarrow{x_2} \mid \vec{\theta}\right) \cdot ... \cdot f\left(\overrightarrow{x_n} \mid \vec{\theta}\right)$$

Iako je funkcija verodostojnosti po definiciji funkcija gustine verovatnoće posmatrana kao funkcija svog drugog argumenta ona se nikako ne sme interpretirati na isti način. U slučaju neprekidnih slučajnih vektora, ne možemo smatrati da integral funkcije verodostojnosti u određenoj oblasti predstavlja verovatnoću da je stvarna vrednost vektora parametara baš u toj oblasti, a takođe ni u slučaju diskretnih slučajnih vektora, ne možemo smatrati da vrednost funkcije verodostojnosti u određenoj vrednosti vektora parametara predstavlja verovatnoću da vektor parametara ima baš tu vrednost. Ovo ćemo ilustrovati pomoću sledeća dva primera.

Primer 1.1 Posmatrajmo bacanje jednog novčića (koji ne mora biti „fer") tri puta, i neka verovatnoća da će novčić pokazati glavu u pojedinačnom bacanju (događaj *G*) iznosi $p_G, (0 \le p_G \le 1)$. Ukoliko se realizovao događaj *GGG*, koja je najverovatnija vrednost parametra p_G?

Po definiciji, za funkciju verodostojnosti dobijamo:

$$L\left(p_G \mid GGG\right) = P(GGG \mid p_G) = p_G^3, 0 \le p_G \le 1$$

Grafik ove funkcije je prikazan na slici 1.1. Sa grafika se vidi da funkcija verodostojnosti najveću vrednost dostiže za $p_G = 1$ što znači da je (na osnovu prva tri ishoda eksperimenta bacanja novčića u kome je u sva tri slučaja novčić pokazao *G*) prema definiciji funkcije verodostojnosti najverovatnije da će novčić uvek pokazati *G*, ali nije nemoguće i da vrednost parametra p_G bude drugačija, jedino što je na osnovu rezultata prva tri bacanja to manje verovatno. Vrednost funkcije verodostojnosti u tački $p_G = 1$ iznosi 1, ali ovo se ne sme tumačiti kao verovatnoća da je parametar $p_G = 1$. Sasvim je moguće da je novčić „fer" a da se u prva tri bacanja dobije *G*.

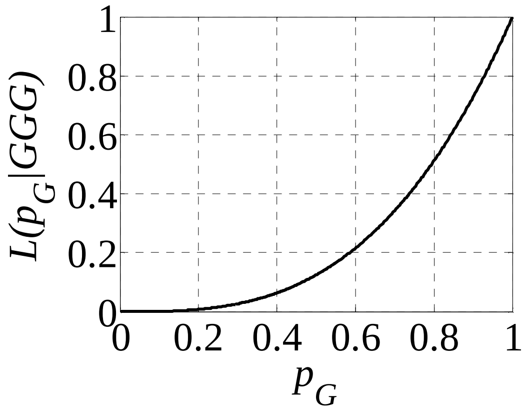
Primer 1.2 Posmatrajmo bacanje istog novčića iz prethodnog primera. Neka je sada novčić bačen još dva puta i neka je u dodatna dva bacanja pokazao *PG*, respektivno (događaj P znači da je novčić pokazao pismo). Kolika je sada najverovatnija vrednost parametra p_G?

Sada kada znamo realizaciju prvih pet bacanja novčića, možemo pisati sledeći izraz za funkciju verodostojnosti parametra *p*:

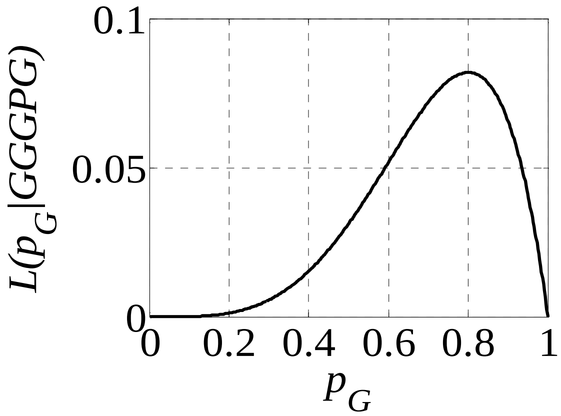
$$L\left(p_G \mid GGGPG\right) = P(GGGPG \mid p_G) = p_G^4(1 - p_G), 0 \le p_G \le 1$$

Grafik ove funkcije je prikazan na slici 1.2.

[5] U literaturi se mogu naći i definicije koje funkciju verodostojnosti definišu kao svaku funkciju vektora parametara $\vec{\theta}$ koja je proporcionalna sa $f\left(\vec{x} \mid \vec{\theta}\right)$, tj. kao klasu ekvivalencije funkcija (v. npr. [3]).



Slika 1.1 Funkcija verodostojnosti parametra p_G *u modelu bacanja novčića tri puta (sva tri puta novčić je pokazao G)*



Slika 1.2 Funkcija verodostojnosti parametra p_G *u modelu bacanja novčića pet puta, (novčić je redom pokazao GGGPG)*

Sa grafika se vidi da funkcija verodostojnosti svoj maksimum dostiže za vrednost parametra $p_G = 0,8$ što znači da je (na osnovu prvih pet ishoda eksperimenta bacanja novčića pri čemu je novčić redom pokazao *GGGPG*) prema definiciji funkcije verodostojnosti najverovatnije da će u svakom narednom bacanju novčić pokazati *G* sa verovatnoćom od 0,8. Vidimo da je nakon što je novčić u četvrtom bacanju pokazao pismo, vrednost funkcije verodostojnosti u tački $p_G = 1$ pala na nulu. Ovo je i očekivano jer ako je novčić u bar jednom od bacanja pokazao pismo, nemoguće je da verovanoća dobijanja glave u pojedinačnom bacanju bude jednaka jedinici. U opštem slučaju, što imamo više informacija, odnosno veći uzorak ishoda, možemo oceniti vrednosti nepoznatih parametara sa većom tačnošću.

Metod koji je korišćen za ocenu vrednosti parametra p_G u prethodna dva primera, odnosno određivanje vrednosti parametra u kome funkcija verodostojnosti dostiže svoj maksimum kao ocenu njegove najverovatnije vrednosti, naziva se metod maksimalne verodostojnosti. Ovaj metod je predstavljen u radovima Engleskog statističara i biologa Sir Ronald Aylman Fisher-a početkom 20. veka. Može se pokazati da su asimptotske vrednosti ocena parametara dobijenih metodom maksimalne verodostojnosti bolje od vrednosti dobijenih na bilo koji drugi način.

Definicija 1.7. *Neka je* $L\left(\vec{\theta}\,|\,\vec{x}\right)$ *data funkcija verodostojnosti vektora parametara* $\vec{\theta}$*. Vrednost vektora parametara* $\vec{\theta}$ *u kojoj funkcija verodostojnosti dostiže svoj maksimum zvaćemo ocena makcimalne verodostojnosti i obeležavaćemo je sa* $\hat{\vec{\theta}}$*.*

Za poređenje dve različite vrednosti vektora parametara $\vec{\theta_1}$ i $\vec{\theta_2}$ (za fiksiranu vrednost slučajnog vektora $\vec{x}$), od interesa je razmatrati količnik vrednosti funkcije verodostojnosti za date vrednosti parametara, tzv. količnik verodostojnosti $\dfrac{L\left(\vec{\theta_1}\,|\,\vec{x}\right)}{L\left(\vec{\theta_2}\,|\,\vec{x}\right)}$. Od vrednosti ovog količnika zavisi koja je vrednost parametara verovatnija. Pomoću količnika verodostojnosti možemo definisati oblasti verodostojnosti.

Definicija 1.8 *Neka je* $L\left(\vec{\theta}\,|\,\vec{x}\right)$ *data funkcija verodostojnosti vektora parametara* $\vec{\theta}$*. S*kup svih dozvoljenih vrednosti vektora parametara $\vec{\theta}$ za koje važi da je:

$$\frac{L\left(\vec{\theta}\,|\,\vec{x}\right)}{L\left(\hat{\vec{\theta}}\,|\,\vec{x}\right)} \geq \alpha$$

naziva se oblast verodostojnosti reda $\alpha, (0 < \alpha < 1)$.

Pošto funkcija verodostojnosti u tački $\hat{\vec{\theta}}$ dostiže svoj maksimum, količnik verodostojnosti iz definicije 1.8 ne može biti veći od 1.

1.3 Bayes-ovsko zaključivanje i Bayes-ova teorema

Bayes-ovsko zaključivanje je statistički pristup u kome se na osnovu realizovanih događaja prikupljaju dokazi koji trebaju da potvrde ili opovrgnu neku hipotezu. Suština Bayes-ovskog zaključivanja se ogleda u tome da se, ukoliko imamo više hipoteza o nekom događaju pri čemu samo jedna hipoteza može biti tačna, svakoj od njih dodeli neka početna (apriorna) verovatnoća na osnovu raspoloživih informacija ili iskustava. Nakon toga, posmatranjem koji se događaj u slučajnom eksperimentu realizovao (odnosno prikupljanjem dokaza) menjaju se i prethodno ustanovljene verovatnoće hipoteza i dobijaju se nove verovatnoće (aposteriorne). Ovo se dešava zbog toga što određene hipoteze „favorizuju“ određene događaje, odnosno, ukoliko je neka hipoteza tačna veća je verovatnoća da će se u slučajnom eksperimentu desiti neki određeni događaj u odnosu na druge. Ukoliko se desio onaj događaj koji smo na osnovu hipoteze i očekivali, raste i verovatnoća te hipoteze. U suprotnom, verovatnoća hipoteze se smanjuje a raste verovatnoća neke druge hipoteze.

1.3.1 Bayes-ova teorema (diskretan slučaj)

Definicija 1.9 *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \Im, P)$ *i neka su dati događaji* $H_1, H_2, ..., H_n \in \Im, n \in N$, $(\forall i, j \in \{1, 2, ...n\})(i \neq j) \Rightarrow H_i \bigcap H_j = \varnothing$. *(uzajamno isključivi događaji). Ukoliko važi da je* $A \subset H_1 \bigcup H_2 \bigcup ... \bigcup H_n$, *kažemo da događaji* $H_1, H_2, ..., H_n$ *čine potpun sistem hipoteza u odnosu na događaj A.*

Iz definicije 1.9 sledi da je $A = AH_1 \bigcup AH_2 \bigcup ... \bigcup AH_n$, a pošto su događaji $H_1, H_2, ..., H_n$ uzajamno isključivi, dobijamo sledeću jednakost:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n)$$

Ovu jednakost na osnovu definicije 1.1 možemo pisati i na sledeći način:

$$P(A) = P(A | H_1) P(H_1) + P(A | H_2) P(H_2) + ... + P(A | H_n) P(H_n)$$

Poslednja jednakost se naziva formula totalne verovatnoće.

Teorema 1.2 (Bayes-ova formula) *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \Im, P)$ *i neka su dati događaji* $H_1, H_2, ..., H_n \in \Im, n \in N$, *takvi da čine potpun sistem hipoteza u odnosu na događaj A i neka je* $P(A) \neq 0$. *Tada,* $\forall j \in \{1, 2, ...n\}$ *važi:*

$$P(H_j | A) = \frac{P(H_j) P(A | H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) P(A | H_j)}{\sum_i P(H_i) P(A | H_i)}$$

Verovatnoće $P(H_j | A)$ se nazivaju aposteriornim verovatnoćama, dok se verovatnoće $P(H_j)$ nazivaju apriornim. Pre izvođenja eksperimenta, smatrali smo da su verovatnoće hipoteza $P(H_j)$. U eksperimentu se dogodio događaj *A*, i na osnovu realizacije eksperimenta dolazimo do novih verovatnoća $P(H_j | A)$. Ukoliko sada dobijene aposteriorne verovatnoće usvojimo kao apriorne i ponovimo eksperiment, nakon izvođenja eksperimenta dobićemo nove aposteriorne verovatnoće. Ukoliko nastavimo sa ovim postupkom, aposteriorne verovatnoće svake od hipoteza će konvergirati ka određenim vrednostima.

Iz Bayes-ove formule sledi da će se verovatnoća hipoteze H_j povećati pod uslovom da se realizovao događaj *A* ukoliko važi da je:

$$\frac{P(A | H_j)}{\sum_i P(H_i) P(A | H_i)} = \frac{P(A | H_j)}{P(H_j) P(A | H_j) + P(\overline{H_j}) P(A | \overline{H_j})} > 1$$

Poslednja nejednakost će važiti ukoliko je:

$$P\left(A \mid H_j\right) > P\left(H_j\right)P\left(A \mid H_j\right) + P\left(\overline{H_j}\right)P\left(A \mid \overline{H_j}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(A \mid H_j\right)P\left(\overline{H_j}\right) > P\left(\overline{H_j}\right)P\left(A \mid \overline{H_j}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(A \mid H_j\right) > P\left(A \mid \overline{H_j}\right),$$

odnosno, ako je veća verovatnoća da će se događaj A realizovati kada je hipoteza H_j tačna u odnosu na slučaj kada ona to nije.

1.3.2 Bayes-ova teorema (neprekidan slučaj)

Najpre ćemo, analogno diskretnom slučaju, izvesti izraz za formulu totalne verovatnoće u neprekidnom slučaju.

Teorema 1.3 *Neka je B proizvoljan Borel-ov skup i neka su date neprekidne slučajne promenljive X i Y. Tada važi sledeće tvrđenje koje se naziva neprekidna verzija formule totalne verovatnoće:*

$$P\left(X \in B\right) = \int_{D_Y} P\left(X \in B \mid Y = y\right) f_Y\left(y\right) dy$$

$$\begin{aligned} P\left(X \in B\right) &= \int_{D_Y}\int_B f\left(x,y\right) dxdy = \int_{D_Y}\int_B f_{X|Y}\left(x \mid y\right) f_Y\left(y\right) dxdy = \\ &= \int_{D_Y}\left(\int_B f_{X|Y}\left(x \mid y\right) dx\right) f_Y\left(y\right) dy = \\ &= \int_{D_Y} P\left(X \in B \mid Y = y\right) f_Y\left(y\right) dy \end{aligned}$$

$\square$

Analogno diskretnom slučaju, zamislimo sada da nam je poznata uslovna raspodela za Y u odnosu na X, a da nam je nepoznata uslovna raspodela za X u odnosu na Y. Neka je X parametar raspodele za Y koji se bira slučajno. Za fiksiranu vrednost slučajne promenljive X dobijamo određenu raspodelu za Y, ali problem je odrediti nepoznatu vrednost X. Ovo se može uraditi tako što možemo da usvojimo apriopornu raspodelu parametra X, zatim izvršimo slučajni eksperiment u kome se realizuje neka vrednost slučajne promenljive Y i odredimo aposteriornu raspodelu za X. Ovo možemo uraditi pomoću neprekidne verzije Bayes-ove formule.

Teorema 1.4 (neprekidna verzija Bayes-ove formule) *Neka su date slučajne promenljive X i Y koncentrisane na skupovima D_x i D_y respektivno. Tada, $\forall x \in D_x$, $\forall y \in D_y$ važi sledeće tvrđenje:*

$$f_{X|Y}\left(x \mid y\right) = \frac{f_{Y|X}\left(y \mid x\right) f_X\left(x\right)}{f_Y\left(y\right)} = \frac{f_{Y|X}\left(y \mid x\right) f_X\left(x\right)}{\int_{D_X} f_{Y|X}\left(y \mid t\right) f_X\left(t\right) dt}$$

1.3.3 Bayes-ovska paradigma

Kao što smo nagovestili, Bayes-ovski pristup se može koristiti za ocenu vrednosti parametara raspodela. Osnovni postulat koji se ovde koristi je da je vrednost parametra X slučajna promenljiva koja ima određenu raspodelu na određenom skupu (apriorna raspodela). U slučajnom eksperimentu se uzima uzorak slučajne promenljive Y čija je raspodela određena vrednošću parametra X i određuje se aposteriorna raspodela slučajne promenljive X. Aposteriorna raspodela je naravno, sinteza prethodnih znanja (koja se dobija primenom Bayes-ove formule) o parametru X koja su sadržana u apriornoj raspodeli, i informacija dobijenih realizacijom eksperimenta.

Ocena vrednosti parametra kod Bayes-ovskog pristupa je veoma jednostavna. Kao Bayes-ovska ocena parametra uzima se vrednost parametra u kojoj aposteriorna raspodela dostiže maksimum. Interval poverenja se takođe dobija iz aposteriorne raspodele kao interval u kome je integral normirane aposteriorne raspodele određeni procenat broja 1. Kod Bayes-ovskog pristupa ocenjivanja parametara testiranje hipoteza vrednosti parametara se takođe vrši pomoću aposteriorne raspodele. Pretpostavimo da imamo dve hipoteze: $X \in B_1$ i $X \in B_2$. Ono što je potrebno uraditi jeste uporediti brojne vrednosti aposteriornih raspodela u datim oblastima i prihvatiti hipotezu koja odgovara oblasti sa većom aposteriornom verovatnoćom.

Osnovni razlog za kritiku Bayes-ovskog zaključivanja jeste apriorna verovatnoća, odnosno apriorna raspodela koja se usvaja na osnovu postojećih saznanja. Naime, kritičari Bayes-ovske teorije ističu da pogrešna ubeđenja sadržana u apriornim raspodelama mogu prilično uticati na aposteriorne verovatnoće, odnosno, raspodele. Ukoliko su naša apriorna ubeđenja dosta različita od realnosti, čak i pri velikom broju ponavljanja eksperimenta čiji rezultati sugerišu da naša apriorna saznanja nisu dobra, uticaj apriorne raspodele može biti dominantan u formiranju aposteriorne raspodele. Teorijski, ponavljanjem slučajnog eksperimenta veliki broj puta, postiže se konvergencija aposteriorne raspodele ka raspodeli koja odgovara realnosti, ali ponekad je neophodan broj ponavljanja slučajnog eksperimenta da bi se dobila zadovoljavajuća tačnost aposteriorne raspodele jako velik. Ovo je nepovoljno sa stanovišta efikasnosti, odnosno, vreme neophodno za ponavljanje slučajnog eksperimenta ovako veliki broj puta može biti znatno veće od onog koje imamo na raspolaganju. Zbog toga je izbor apriorne raspodele veoma važan faktor o kome treba voditi računa.

Bayes-ovski pristup ocenjivanju parametara ćemo koristi u određivanju nepoznatih parametara modela formiranja cena akcija i opcija što je i predmet ovog master rada. Najpre ćemo usvojiti apriorne raspodele za nepoznate parametre, a onda ćemo na osnovu eksperimenta formiranja cena i na osnovu Bayes-ove formule dobiti aposteriorne raspodele nepoznatih parametara. Kao ocenu vrednosti parametara uzećemo vrednosti u kojima njihove aposteriorne raspodele dostižu maksimum. Takođe ćemo videti i uticaj izbora apriornih raspodela parametara na njihovu ocenu.

§2 Slučajni procesi

Slučajni (stohastički) procesi predstavljaju matematičke modele procesa čija je evolucija opisana zakonima verovatnoće. Teorija slučajnih procesa, najpre razvijana radi modelovanja fluktuacija i šumova u fizičkim sistemima, svoju primenu danas nalazi u raznovrsnim disciplinama kao što su: statistička fizika, telekomunikacije, automatsko upravljanje, teorija pouzdanosti i u mnogim drugim.

2.1 Uvod u slučajne procese

Definicija 3.1. *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ *i neka je dat skup T, beskonačan skup parametara* $t \in T$. *Posmatrajmo familiju slučajnih promenljivih* $\{X_t\}$, *definisanih na prostoru verovatnoće* $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$. *Ukoliko je skup parametara T podskup skupa R,* $\{X_t\}$ *se naziva slučajni proces, a ukoliko je skup parametara T podskup nekog višedimenzionalnog skupa,* $\{X_t\}$ *se naziva slučajno polje.*

Parametar $t \in T$ se u slučaju da je $T \subset R$ obično interpretira kao vreme. Ukoliko je T diskretan podskup, tada imamo slučajni proces sa diskretnim vremenom a ukoliko je T neprebrojiv skup, imamo slučajni proces sa neprekidnim vremenom.

Podrazumevaćemo da za $\forall t \in T$ sve slučajne promenljive X_t uzimaju vrednosti iz skupa S koji ćemo zvati skup stanja. Za svaku fiksiranu vrednost parametra $t \in T$, dobijamo vrednost slučajne promenljive X_t. Ukoliko parametar $t \in T$ interpretiramo kao vreme, i ukoliko vrednost slučajne promenljive X_t opisuje stanje nekog sistema u trenutku t, tada za svaku fiksiranu n-torku parametara $(t_1, t_2, t_3, ..., t_n)$, $t_i \in T$ $(i = 1, 2, .., n)$ dobijamo odgovarajući slučajan vektor $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, ..., X_{t_n}\right)$ koji predstavlja vektor stanja sistema u odgovarajućim vremenskim trenucima. Ukoliko važi da je $t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$, tada vrednosti $X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, ..., X_{t_n}$ predstavljaju evoluciju sistema u vremenu.

Ukoliko posmatramo evoluciju sistema u kontinualnom vremenu, izborom odgovarajućih vremenskih trenutaka $t_1, t_2, t_3, ... \in T$ možemo od slučajnog procesa sa kontinualnim vremenom dobiti slučajni proces sa diskretnim vremenom koji je daleko jednostavniji za računarsku analizu.

Raspodele slučajnih vektora $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, ..., X_{t_n}\right)$ nazivaju se konačno-dimenzionalne raspodele slučajnog procesa $\{X_t\}$:

$$F(t_1, t_2, t_3, ..., t_n; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = P\left(X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2, X_{t_3} \le x_3, ..., X_{t_n} \le x_n\right),$$

gde su $(t_1, t_2, t_3, ..., t_n)$, $t_i \in T$ $(i = 1, 2, .., n)$ fiksirane vrednosti parametara, a $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, $x_i \in R$ $(i = 1, 2, .., n)$ promenljive.

Može se pokazati da pod određenim uslovima (uslovima kompatibilnosti) važi da za svaki skup konačno-dimenzionalnih raspodela postoji skup čije su to raspodele, što je i tvrđenje sledeće teoreme.

Teorema 2.1. *Neka je data familija funkcija*
$\left\{F_n\left(t_1,t_2,t_3,...,t_n,x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)\right\}$, $n=1,2,3,...$; $t_1,...,t_n\in T$, $x_1,...,x_n\in R$ *i*
neka su ispunjeni sledeći uslovi:
(i)
$$(\forall(t_1,...,t_n)\in T)\ (\exists(X_{t_1},...,X_{t_n}))(x_1,...,x_n)\to F_n\left(t_1,t_2,t_3,...,t_n,x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)=$$
$$=P\left(X_{t_1}\le x_1,X_{t_2}\le x_2,X_{t_3}\le x_3,...,X_{t_n}\le x_n\right)$$
(ii)
Za svaku permutaciju $\left(j_1,...,j_1\right)$ *skupa* $(1,...,n)$ *važi da je:*
$$F_n\left(t_{j_1},...,t_{j_n},x_{j_1},...,x_{j_n}\right)=F_n\left(t_1,...,t_n,x_1,...,x_n\right)$$
(iii)
$$(\forall n\in N)\lim_{x_n\to\infty}F_n\left(t_1,t_2,t_3,...,t_n,x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)=F_{n-1}\left(t_1,t_2,t_3,...,t_{n-1},x_1,x_2,x_3,...,x_{n-1}\right)$$
Tada postoji slučajni proces $\left\{X_t\right\}$, $t\in T$ *takav da su funkcije* F_n *njegove konačne jednodimenzione raspodele.*

2.2 Primeri slučajnih procesa

Definicija 3.2. *Slučajni proces čije su sve konačnodimenzionalne raspodele normalne nazivamo Gauss-ovim procesom.*

Kako je višedimenzionalna normalna raspodela određena svojom kovarijansom i vektorom matematičkog očekivanja može se zaključiti da je Gauss-ov slučajni proces X_t određen pomoću funkcija:
$$b(t)=EX_t \text{ i } C(s,t)=E\left(X_s-b(s)\right)\left(X_t-b(t)\right)$$
Funkcija $C(s,t)$ se naziva korelacionom funkcijom Gaussovog slučajnog procesa X_t. Funkcija $C(s,t)$ je korelaciona funkcija nekog Gauss-ovog procesa ako i samo ako je pozitivno definitna, odnosno, ako važi da je:
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_iC\left(t_i,t_j\right)a_j\ge 0$$

Definicija 3.3. Neka je $T=[0,+\infty]$ i neka za $\left(\forall s,t\in T\right)$ važi:
$$X_0=X_{t_0},\ b(t)=EX_t=0 \text{ i}$$
$$C(s,t)=E\left(X_s-b(s)\right)\left(X_t-b(t)\right)=EX_sX_t=\min(s,t)$$
Gauss-ov slučajni proces koji je određen ovim parametrima naziva se proces Brown-ovog kretanja ili Wiener-ov proces.

Trajektorije Brown-ovog kretanja su neprekidne funkcije ali nisu diferencijabilne ni u jednoj tački. Može se pokazati da za proces Brown-ovog kretanja važi:

$$E\left(X_t - X_s\right)\left(X_v - X_u\right) = E\left(X_t - X_s\right)E\left(X_v - X_u\right)$$

Ovo se dokazuje na sledeći način:

$$\begin{aligned} E\left(X_t - X_s\right)\left(X_v - X_u\right) &= EX_tX_v - EX_sX_v - EX_tX_u + EX_sX_u = \\ &= \min\left(t,v\right) - \min\left(s,v\right) - \min\left(t,u\right) + \min\left(s,u\right) = \\ &= t - s - t + s = 0 \end{aligned}$$

Definicija 3.4. *Slučajni proces definisan na* $T = [0, +\infty)$ *nazivamo Poisson-ovim procesom ako važi sledeće:*

I. $P\left(X_0 = 0\right) = 1$

II. Priraštaji $X_t - X_s$ i $X_v - X_u$ su nezavisni $\left(\forall s < t \le u < v\right)$

III. $\left(\forall s, t\right) s < t$ priraštaj $X_t - X_s$ ima Poisson-ovu raspodelu sa parametrom $\lambda\left(t - s\right)$, gde je $\lambda = const$

Poisson-ovi procesi imaju primene u modeliranju tzv. retkih događaja, odnosno, događaja koji su takvi da se u kratkim vremenskim intervalima može dogoditi samo jedan.

2.3 Markov-ski procesi

Definicija 3.4. *Slučajni proces* $\left\{X_t\right\}$ $t \in T$ *naziva se Markov-ski proces ako* $\left(\forall n \in N\right)$ *i za svaki niz tačaka iz skupa T,* $s_1 < s_2 < \ldots < s_n < t$ *važi sledeće tvrđenje:* $P\left(X_t \in B \mid X_{s1,} X_{s2}, \ldots, X_{sn}\right) = P\left(X_t \in B \mid X_{sn}\right)$*, za svaki Borel-ov skup B.*

Ako se trenutak t_n interpretira kao sadašnjost, smisao navedene definicije je da budućnost zavisi od prošlosti samo preko sadašnjosti. Drugim rečima, celokupna informacija iz prošlosti procesa X_t koja utiče na budućnost tog procesa, sadržana je u sadašnjosti. Ako se zna sadašnja vrednost, tada poznavanje prethodne istorije procesa nije neophodno.

Svaki niz slučajnih promenljivih sa nezavisnim priraštajima je Markov-ski proces. Npr. Poisson-ov i proces Brown-ovog kretanja su Markov-ski.

Ako je T skup sa početnom tačkom t_0, za opisivanje Markov-skih procesa dovoljno je poznavanje uslovnih raspodela $P\left(X_t \in B \mid X_s\right)$ za $s < t$ i početne raspodele $P\left(X_{t0} \in B\right)$. Ovo je zbog toga što se pomoću njih mogu naći konačnodimenzionalne raspodele. Postupak nalaženja konačnodimenzionalnih raspodela je opisan sledećom teoremom kada su X_t diskretne slučajne promenljive. Analogan postupak važi i u neprekidnom slučaju.

Teorema 2.2. *Neka je* $\{X_t\}$, $t \in T$ *Markov-ski proces, pri čemu su* X_t *diskretne slučajne promenljive. Neka je* t_0 *početna tačka skupa T, odnosno,* $(\forall t \in T)$ $t \geq t_0$. *Tada važi:*

$$P\left(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, ..., X_{t_n} = x_n\right) = \sum_j P\left(X_{t_0} = x_j\right) P\left(X_{t_1} = x_1 \mid X_{t_0} = x_j\right) P\left(X_{t_2} = x_2 \mid X_{t_1} = x_1\right)$$
$$P\left(X_{t_3} = x_3 \mid X_{t_2} = x_2\right) \cdot ... \cdot P\left(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right)$$

gde je $t_1 < t_2 < ... < t_n$ i $t_i \in T$ za i=1,2,...,n, a x_j, j=1,2,... su dozvoljene vrednosti slučajne promenljive $X_0 = X_{t_0}$.

§3 Markov-ski lanci

U prethodnom poglavlju smo rekli da su Markov-ski procesi slučajni procesi sa osobinom da sledeće stanje procesa zavisi samo od sadašnjeg stanja. Markov-ski lanci su posebna vrsta Markov-skih procesa gde se proces može nalaziti samo u konačnom broju stanja. Markovski lanci predstavljaju korisne alatke u statističkom modelovanju u praktično svim poljima primenjene matematike. U ovoj glavi izlažemo neke njihove osobine.

3.1 Osnovne osobine Markov-skih lanaca

Najjednostavniji Markov-ski proces je onaj sa diskretnim vremenom koji može uzimati samo konačno mnogo različitih vrednosti. Ovakvi procesi se nazivaju Markov-ski lanci i imaju veliku primenu u opisivanju ponašanja sistema. Posmatraćemo sistem koji se u vremenskim trenucima t_0, t_1,... može nalaziti u nekom od mogućih n stanja. Ako se u trenutku t_k sistem nalazi u stanju i, definišemo $X_k=i$. Slučajni proces $\{X_k\}$ je Markov-ski lanac ako važi sledeće tvrđenje:

$$P(X_{k+1}=j \mid X_0, X_1, ..., X_k) = P(X_{k+1}=j \mid X_k)$$

Za opisivanje Markov-skog lanca, dovoljno je poznavati početnu raspodelu $P_0(i)=P(X_0=i)$, kao i verovatnoće prelaza iz stanja i u vremenu t_k u stanje j u vremenu t_l, odnosno, $p_{ij}(k,l)=P(X_l=j \mid X_k=i)$, za i,j=1,2,...,n i za $(\forall k<l)$. Izučavanje Markov-skog lanca postaje posebno jednostavno ako je on homogen, odnosno, ako verovatnoće prelaza $p_{ij}(k,l)$ ne zavise od vremena t_k i t_l već samo od razlike l-k. U tom slučaju dovoljno je posmatrati verovatnoće prelaza u jednom koraku, odnosno verovatnoće:

$$p_{ij}=P(X_{k+1}=j \mid X_k=i),\ k=0,1,...,\ i,j=1,2,...,n$$

Matrica $\Pi=\|p_{ij}\|$ se naziva matrica prelaza Markov-skog lanca. Neka je $p^{(0)}=\left(p_1^{(0)},...,p_n^{(0)}\right)$ vektor početnih verovatnoća, $p_i^{(0)}=P(X_0=i)$. Vektor $p^{(0)}$ i matrica $\Pi=\|p_{ij}\|$, određuju ponašanje Markov-skog lanca u svakom koraku, kao što tvrdi sledeća teorema.

Teorema 3.1 *Neka je $p^{(0)}$ vektor početnih verovatnoća i neka je Π matrica prelaza Markov-skog lanca X_k. Tada se vektor verovatnoća u k-tom koraku nalazi po formuli*

$$p^{(k)}=p^{(0)}\Pi^k,\ k=1,2,...$$

gde je $p^{(k)}=\left(p_1^{(k)},...,p_n^{(k)}\right)$ i $p_i^{(k)}=P(X_k=i),\ i=1,2,...,n$

Primer 3.1 Imamo dve bele i dve crne kuglice koje su raspoređene u dve kutije. U svakom koraku uzimamo po jednu kuglicu iz svake kutije i stavljamo je u drugu kutiju. ovim je definisan jedan sistem i način kako se on menja u diskretnim vremenskim trenucima (koracima). Ovaj sistem može da se nalazi u jednom od tri stanja:

1. Dve crne kuglice u kutiji I, dve bele u kutiji II
2. Jedna crna i jedna bela i u kutiji I i u kutiji II
3. Dve bele kuglice u kutiji I i dve crne kuglice u kutiji II

neka je X_n stanje sistema posle n koraka. Ovaj slučajni proces uzima vrednosti iz skupa $\{1,2,3\}$. Kako stanje sistema u sledećem koraku zavisi samo od stanja u prethodnom koraku, proces je Markov-ski. Verovatnoće prelaza ne zavise od vremena pa je ovaj lanac homogen.

Odredimo verovatnoće prelaza. Iz stanja 1, sistem može da pređe samo u stanje 2, razmenom dve kuglice različitih boja. Pretpostavimo da je sistem u stanju 2. Razmenom bele kuglice iz prve i crne kuglice iz druge kutije, sistem prelazi u stanje 1 (verovatnoća 1/4). Razmenom crne kuglice iz prve kutije i bele kuglice iz druge, prelazi se u stanje 3 (verovatnoća 1/4), a razmenom kuglica istih boja sistem ostaje u stanju 2 sa verovatnoćom 1/2. Ako je sistem u stanju 3, on može da pređe samo u stanje 2. matrica prelaza u jednom koraku je:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Pretpostavimo da se sistem u početku nalazi u stanju 2. Naći ćemo verovatnoće stanja posle trećeg koraka. Na osnovu teoreme 3.1, imamo da je $p^{(3)} = p^{(0)}\Pi^3$, gde je $p^{(0)}$ vektor početnih verovatnoća koji je po pretpostavci jednak (0,1,0). Izračunavanjem matrice Π^3 dobijamo da je:

$$p^{(3)} = (0,1,0)\cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{Vmatrix} = \left(\frac{3}{16}, \frac{5}{8}, \frac{3}{16}\right)$$

§4 Monte Carlo metode

U ovom poglavlju su date osnove metoda računarske simulacije tzv. Monte Carlo metoda. Ove metode su u stvari klase algoritama koji se koriste za razna izračunavanja kada je komplikovano ili čak nemoguće doći do rešenja nekog problema na drugi način. Iako je koncept na kome se zasnivaju Monte Carlo metode veoma jednostavan, sve do pojave računara one su bile praktično neupotrebljive. Mi ćemo ih koristiti za generisanje uzoraka slučajnih promenljivih sa željenom raspodelom.

4.1 Osnove Monte Carlo metoda

Monte Carlo metode su počele da se razvijaju sredinom 20. veka kada su fizičari u laboratoriji Los Alamos ispitivali zaštitu od zračenja i prosečnu vrednost razdaljine koju neutron prelazi u raznim materijalima. Iako su raspolagali brojnim relevantnim podacima, nisu uspeli da reše problem analitičkim proračunima. Tada su John von Neumann i Stanislaw Ulam predložili da se problem reši pomoću računarske simlacije. Pošto je njihov rad bio pod velom tajne, morao je da dobije šifrovano ime. John von Neumann je predložio ime Monte Carlo po kockarnicama u prestonici Monaka

Osnovna pretpostavka za primenu Monte Carlo metoda je da je moguće generisati niz slučajnih brojeva, odnosno, niz nezavisnih slučajnih promenljivih na intervalu [0,1]. Polazeći od niza slučajnih brojeva, moguće je generisati niz sa proizvoljnom raspodelom.

Pravi niz slučajnih brojeva je moguće dobiti samo iz izvora koji generiše brojeve bez ikakve zakonitosti. Jedan primer za generisanje niza slučajnih brojeva je niz nula i jedinica koji se dobija bacanjem novčića. Usvajanjem određenog broja bitova koji određuju jedan broj u intervalu [0,1]. odredili bismo koliko decimala bi imao naš slučajni broj. Međutim ovakav način generisanja slučajnih brojeva je praktično neupotrebljiv u primenama. Mnogo praktičnije je koristiti deterministički niz dobijen pomoću računara ali sa takvim osobinama da prolazi testove slučajnosti.

Definicija 4.1 *Niz brojeva konstruisan pomoću nekog determinističkog algoritma sa ciljem da se koristi kao zamena pravih slučajnih brojeva naziva se pseudoslučajni niz.*

Jedan od algoritama za dobijanje pseudoslučajnih brojeva je linearni kongruentni metod. Pseudoslučajni niz generisan pomoću linearnog kongruentnog metoda je određen sledećom rekurentnom formulom:

$$N_k = a \cdot N_{k-1} + b \pmod{c}$$

Brojevi a, b i c se biraju da budu jako veliki kako bi se dobio što duži niz bez ponavljanja, odnosno, kako bi se što bolje simulirao slučajni niz. Na ovaj način dobijamo niz brojeva u intervalu [0,c-1]. Ako sve brojeve koje smo dobili podelimo sa c, dobićemo niz brojeva na intervalu [0,1).

4.2 Generisanje raspodela pomoću Monte Carlo metoda

Neka je U oznaka za slučajnu promenljivu sa uniformnom raspodelom na intervalu [0,1] i neka je $\{U_n\}$ niz slučajnih promenljivih sa pomenutom raspodelom. Polazeći od niza slučajnih promenljivih $\{U_n\}$ moguće je generisati niz slučajnih promenljivih sa proizvoljnom raspodelom. Od velike pomoći će nam biti sledeća teorema:

Teorema 4.1 *Ako je* $U \sim Unif(0,1)$ *tada je i* $(1-U) \sim Unif(0,1)$.

4.2.1 Generisanje diskretnih raspodela

Ukoliko je raspodela koncentrisana na konačnom skupu, generisanje raspodele se vrši jednostavno. Pretpostavimo da slučajna promenljiva koju treba generisati uzima *k* vrednosti $x_1, x_2, ..., x_k$ sa verovatnoćama. $p_1, p_2, ..., p_k$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Definisaćemo *k* intervala:

$$A_1 = [0, p_1), A_2 = [p_1, p_1 + p_2), A_3 = [p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3), ...$$

Vidi se da interval A_i ima dužinu p_i. Definišimo sada $X = x_i$ ako $U \in A_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Tada slučajna promenljiva X ima traženu raspodelu jer važi da je $P(U \in A_i) = p_i$.

Ukoliko je slučajna promenljiva X definisana na beskonačnom prebrojivom skupu, postupak je sličan ali nešto komlikovaniji. Neka je $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, ...$, pri čemu je $\sum_i p_i = 1$. Polazeći od generisane slučajne promenljive $U \sim Unif(0,1)$, definišemo:

$$X = x_k \text{ ako je } \sum_{i=0}^{k-1} p_i \le U < \sum_{i=0}^{k} p_i \quad (p_0 = 0)$$

Tada slučajna promenljiva *X* ima traženu raspodelu.

4.2.2 Generisanje neprekidnih raspodela

Primer 4.1 Neka je $U \sim Unif(0,1)$ i neka je *F* monotono rastuća i neprekidna funkcija raspodele neke slučajne promenljive. Naći raspodelu sučajne promenljive $Y = F^{-1}(U)$.

Pošto je $U \sim Unif(0,1)$ važi da je $P(U \le t) = t,\ t \in [0,1]$. odavde sledi da je:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F^{-1}(U) \le y) = P(U \le F(y)) = F(y)$$

Rezultat ovog primera ima veliku primenu u računarskom generisanju slučajnih promenljivih jer pokazuje da je za generisanje proizvoljne slučajne promenljive *Y* sa monotono rastućom i neprekidnom funkcijom raspodele *F*, dovoljno generisati slučajnu promenljivu *U* a zatim uzeti da je $Y = F^{-1}(U)$.

Generisanje raspodele pomoću inverzne funkcije raspodele je praktično u primenama samo kada znamo analitički oblik inverzne funkcije. U mnogim slučajevima to nije moguće pa se tada moraju koristiti drugi metodi. Jedan od njih je i metod odbacivanja.

Teorema 4.2 Neka je $U \sim Unif\left(0,1\right)$ *i neka je Y slučajna promenljiva koncentrisan na nekom skupu D na kome ima pozitivnu funkciju gustine verovatnoće g, i neka su U i Y nezavisne. Neka je f gustina neke slučajne promenljive koja je takođe koncentrisana na skupu D. Ako postoji c>0 tako da važi* $\left(\forall y \in D\right) f\left(y\right) \le cg\left(y\right)$, *tada je:*

$$P\left(Y \le x \,|\, U \le \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)}\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(y\right)dy$$

$\square$

Primetimo sledeće:

$$P\left(U \le \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)}\right) = \int_D \int_0^{f(y)/cg(y)} g\left(y\right)dudy = \int_D \frac{f\left(y\right)}{c}dy = \frac{1}{c}$$

za fiksirano *x*, neka je $D_x = \left\{y \in D \,|\, y \le x\right\}$. Imamo da je

$$P\left(Y \le x \,|\, U \le \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)}\right) = cP\left(Y \le x, U \le \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(y\right)}\right) =$$

$$= c\int_{D_x} \int_0^{f(y)/cg(y)} g\left(y\right)dudy = \int_{-\infty}^{x} f\left(y\right)dy$$

$\square$

Neka je *Y* slučajna promenljiva sa gustinom *g* i neka je *f* raspodela koju treba generisati, takva da su *f* i g koncentrisane na istom skupu *D* i da je $\left(\forall y \in D\right) f\left(y\right) \le cg\left(y\right)$ i za neku pozitivnu konstantu *c*. Algoritam metoda odbacivanja za generisanje raspodele sa funkcijom gustine verovatnoće *f* se sastoji iz sledećih koraka.

(I) Generisati *Y* sa gustinom *g* i generisati slučajan broj *U*.

(II) ako je $U \le \dfrac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)}$, tada usvojiti *X*=*Y*. U suprotnom ponoviti korak (I)

Iz teoreme 4.2 sledi da slučajna promenljiva dobijena opisanim algoritmom zaista ima raspodelu *f*:

$$P\left(X \le x\right) = P\left(Y \le x \,|\, U \le \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)}\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(y\right)dy$$

Da bi se metod odbacivanja mogao primeniti, potrebno je najpre naći slučajnu promenljivu Y koju umemo da generišemo i takvu da za njenu gustinu važi da je $f(y) \le cg(y)$ za neku pozitivnu konstantu c.

§5 MCMC metode

Markov Chain Monte Carlo (MCMC) metode predstavljaju klasu algoritama koji se koriste za generisanje uzoraka slučajnih promenljivih sa željenom raspodelom. MCMC metodama se konstruišu Markov-ski lanci koji kao svoju ravnotežnu raspodelu poseduju željenu raspodelu iz koje se uzima uzorak. Najčešća primena ovih metoda je u izračunavanju višedimenzionalnih integrala matematičkih modela u statističkoj fizici, biologiji i lingvistici. Ovde će biti predstavljena primena MCMC metoda u kontekstu Bayes-ovskog ocenjivanja nepoznatih parametara modela finansijske matematike. Konkretni primeri primene koji su i predmet ovog master rada su detaljno objašnjeni u poglavlju br. 7.

5.1 MCMC simulacija i ocenjivanje

Metoda Markov Chain Monte Carlo (MCMC) je metoda generisanja Markov-skih lanaca koji imaju osobinu da im je ravnotežna raspodela jednaka nekoj raspodeli čiji uzorak želimo da generišemo. Pretpostavimo da želimo da generišemo uzorak raspodele, u opštem slučaju, nekog slučajnog vektora. Može se pokazati da nam za generisanje uzorka ovakve raspodele nije neophodno da generišemo ceo slučajni vektor odjednom, već da nam je dovoljno da u jednom trenutku generišemo samo jednu komponentu slučajnog vektora. Ovo tvrđenje je iskazano u sledećoj teoremi:

Teorema 5.1. *(Clifford-Hammersley-eva teorema) Neka je data zajednička funkcija raspodele* $f(\theta, X \mid Y)$. *Tada je ova raspodela u potpunosti određena tzv. potpunim uslovnim raspodelama* $f(\theta \mid X, Y)$ *i* $f(X \mid \theta, Y)$ *(eng. complete conditionals).*

Značaj tvrđenja ove teoreme je u tome što je po pravilu mnogo lakše generisati uzorak slučajne promenljive sa zadatom raspodelom, nego slučajnog vektora. U mnogim slučajevima $f(\theta, X \mid Y)$ može biti izuzetno komplikovana visokodimenzionalna i praktično je neizvodljivo direktno generisati uzorke iz ove raspodele. Međutim, na osnovu Clifford-Hammersley-eve teoreme MCMC algoritmi rešavaju ovaj problem tako što razbijaju zajedničku funkciju raspodele na njene potpune uslovne raspodele. Ovo je velika prednost MCMC metoda u odnosu na druge metode koji ne mogu da se uspešno nose sa ovim problemom.

U slučaju da ovakvo razbijanje zajedničke funkcije raspodele nije dovoljno, odnosno, u slučajevima kada npr. θ predstavlja vektor, Clifford-Hammersley-eva teorema se može ponovo primeniti. Neka je $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$. Primenom Clifford-Hammersley-eve teoreme dobijamo sledeći skup potpunih uslovnih raspodela:

$$\begin{array}{l} \theta_1 \mid \theta_{2,} \theta_3, ..., \theta_k, X, Y \\ \theta_2 \mid \theta_{1,} \theta_3, ..., \theta_k, X, Y \\ \vdots \\ \theta_k \theta_{1,} \theta_3, ..., \theta_{k-1}, X, Y \end{array}$$

MCMC algoritmi za generisanje Markov-skog lanca sa željenom raspodelom slučajnog vektora se uopšteno sastoje od sledećih koraka:

(i) Usvojimo inicijalne vrednosti slučajnih promenljivih koje su komponente slučajnog vektora, odnosno X_1 i θ_1.

(ii) Koristeći MCMC metode nastavljamo da generišemo slučajne promenljive po pravilu $X_i \sim f(X \mid \theta_{i-1}, Y)$ i $\theta_i \sim f(\theta \mid X_i, Y)$.

Na ovaj način dobijamo Markov-ski lanac $\{X_i, \theta_i\}_{i=1}^{n}$ čija raspodela konvergira ka željenoj raspodeli.

2.2 Vrste MCMC algoritama

MCMC algoritmi se mogu grubo podeliti na dve grupe. To su Gibbs-ovi algoritmi i Metropolis-Hastings algoritmi.

Ako su potpune uslovne raspodele poznate u zatvorenoj formi i ako se iz njih mogu direktno uzimati uzorci koristi se Gibbs-ov algoritam. Gibbs-ov algoritam je vrlo jednostavan i definiše se pomoću sledeća dva koraka pod uslovom da su nam poznate inicijalne vrednosti parametara X_1 i θ_1.

(i) Uzeti uzorak $X_i \sim f\left(X \mid \theta_{i-1}, Y\right)$.

(ii) Uzeti uzorak $\theta_i \sim f\left(\theta \mid X_i, Y\right)$

U mnogim situacijama, bar jedna od potpunih uslovnih raspodela se neće moći birati direktno. Tada se mora primeniti Metropolis-Hastings algoritam. Ovaj algoritam predlaže kandidata za izbor iz predložene raspodele, a zatim se kandidat prihvata kao uzorak ili ne prihvata, na osnovu definisanog kriterijuma.

Posmatrajmo slučaj gde se jedna od potpunih uslovnih raspodela nekog parametra $\pi(\theta_i) = p\left(\theta_i \mid \theta_{(-i)}, X, Y\right)$ može proceniti ali da se iz nje ne mogu direktno birati uzorci. Možemo pretpostaviti bez smanjena opštosti da je ova raspodela jednodimenziona. Da bismo generisali uzorke iz ove raspodele, najpre je potrebno da definišemo tzv. predloženu raspodelu $q\left(\theta^{(g+1)} \mid \theta^{(g)}\right)$ (*eng. proposal density*) iz koje se mogu direktno uzimati uzorci. Ono što je još potrebno za primenu Metropolis-Hastings algoritma je da je moguće bez teškoća odrediti količnik $\pi\left(\theta^{(g+1)}\right) / \pi\left(\theta^{(g)}\right)$. Ovaj uslov je ispunjen u većini slučajeva.

Metropolis-Hastings algoritam dalje slično Gibbs-ovom algoritmu uzima uzorke ali na taj način što najpre izvlači kandidate koji se prihvataju ili odbacuju na osnovu definisanog kriterijuma. Metropolis-Hastings algoritam se sastoji iz sledećih koraka:

(i) Uzeti uzorak $\theta^{(g+1)}$ iz predložene raspodele $q\left(\theta^{(g+1)} \mid \theta^{(g)}\right)$

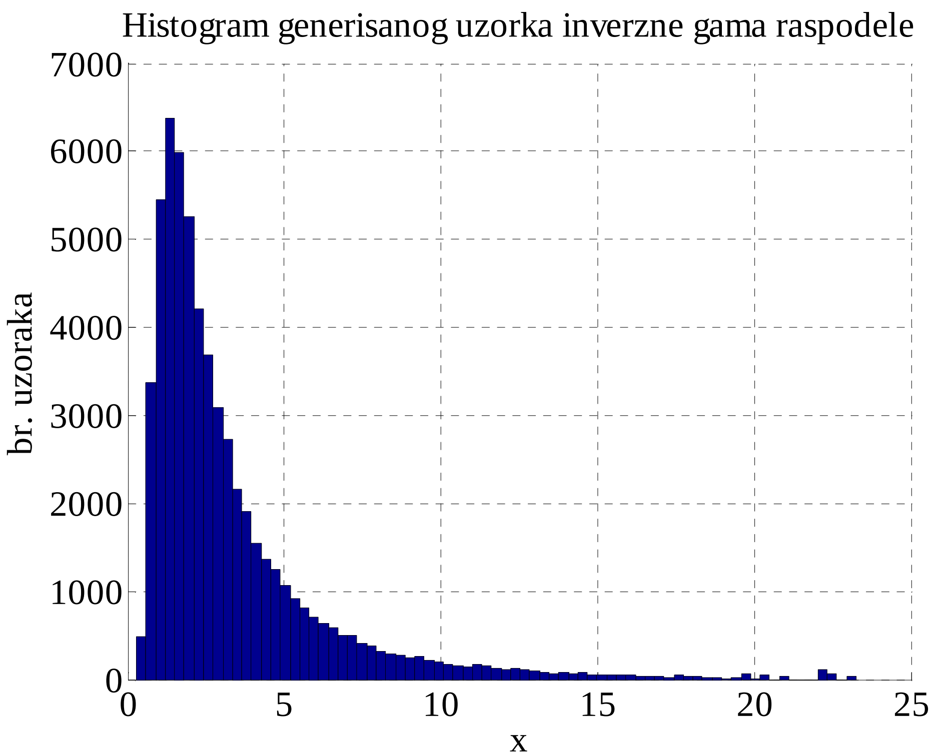
(ii) Prihvatiti uzorak $\theta^{(g+1)}$ sa verovatnoćom $\alpha\left(\theta^{(g)}, \theta^{(g+1)}\right)$, gde je

$$\alpha\left(\theta^{(g)},\theta^{(g+1)}\right)=\min\left(\frac{\dfrac{\pi\left(\theta^{(g+1)}\right)}{q\left(\theta^{(g+1)}\mid\theta^{(g)}\right)}}{\dfrac{\pi\left(\theta^{(g)}\right)}{q\left(\theta^{(g)}\mid\theta^{(g+1)}\right)}},1\right)$$

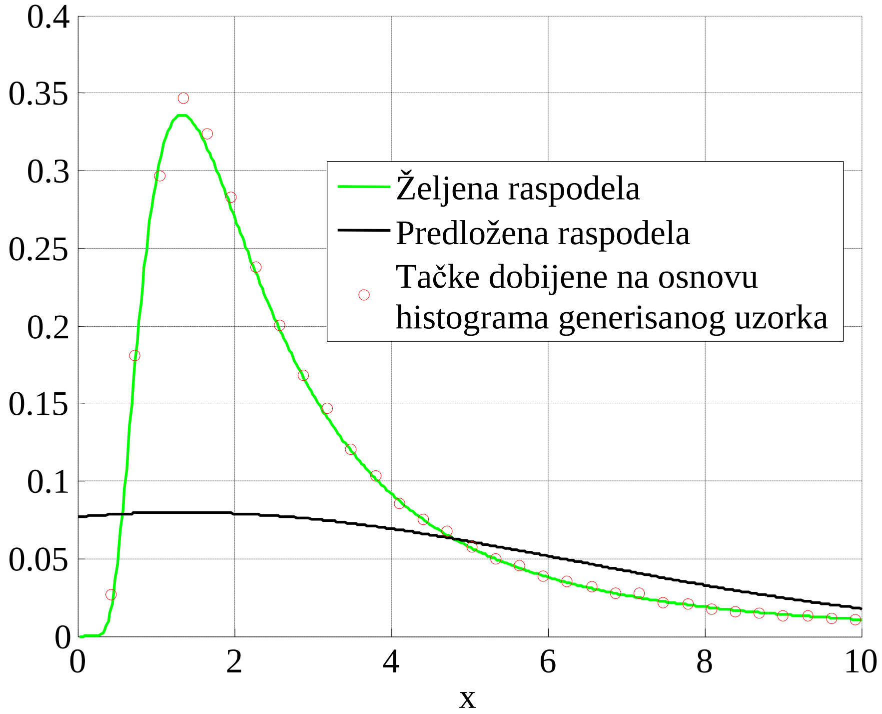
Ukoliko se uzorak ne prihvata, tada važi da je $\theta^{(g+1)}=\theta^{(g)}$

Implementacija Metropolis-Hastings algoritma zahteva jedino uzimanje uzorka iz predložene raspodele, iz uniformne raspodele i izračunavanje verovatnoće kojom se kandidat prihvata. Ovaj algoritam razbija raspodelu iz koje je nemoguće uzeti uzorak na dva dela. Prvi deo je predložena raspodela iz koje se izvlače kandidati a drugi je deo je određivanje verovatnoće prihvatanja kandidata za šta se koristi i originalna raspodela iz koje želimo da generišemo uzorak.

Na slikama 5.1 i 5.2 možemo videti rezultate primenjenog MCMC algoritma za generisanje uzorka inverzne gama raspodele. Iako se inverzna gama raspodela može dobiti i Gibbs-ovim algoritmom, radi ilustracije primenjen je Metropolis-Hastings algoritam. Kao predložena raspodela upotrebljena je Gauss-ova raspodela na pozitivnom delu *x* ose jer je inverzna gama funkcija definisana samo na pozitivnom delu *x* ose.

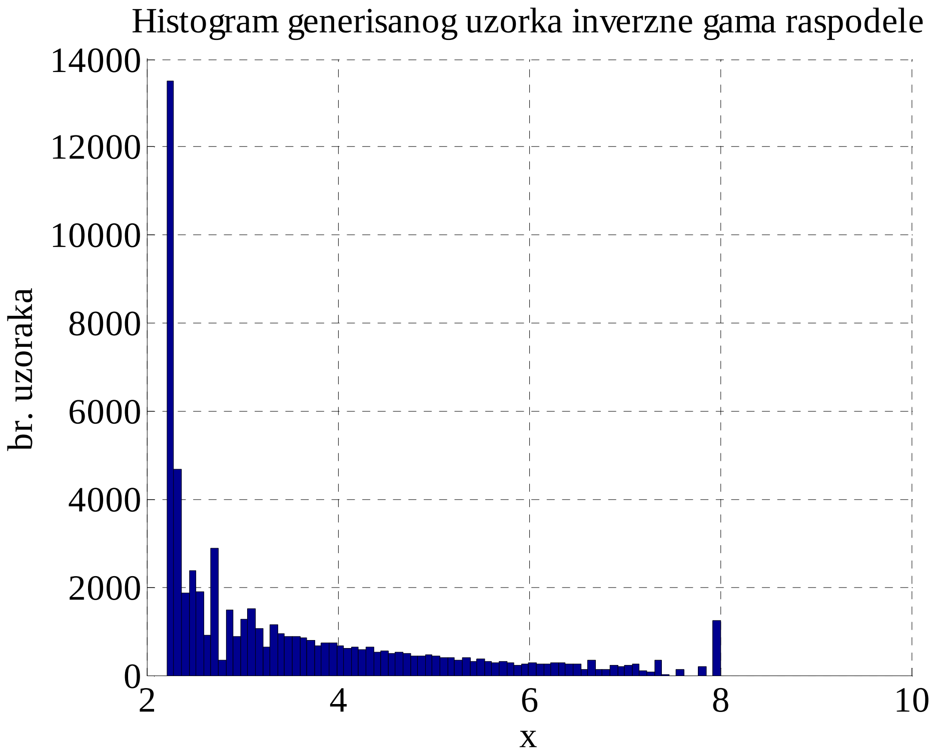


Slika 5.1 *Histogram generisanog niza slučajnih promenljivih sa inverznom gama raspodelom (slučaj 1)*

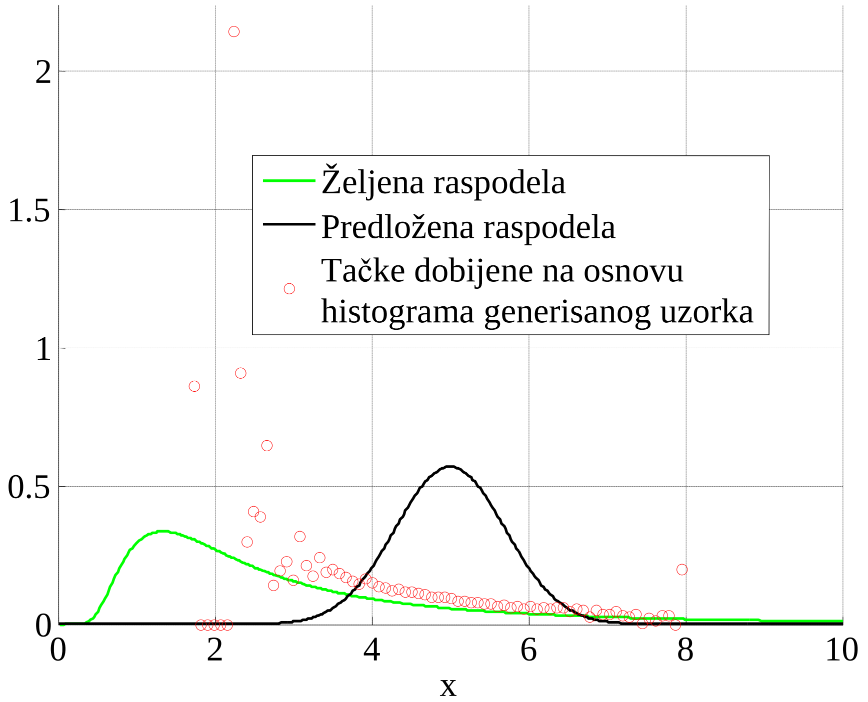


Slika 5.1 *Grafički prikaz željene inverzne gama raspodele, predložene raspodele i vrednosti generisane raspodele u tačkama koje odgovaraju srednjim tačkama intervala histograma sa slike 5.1 (slučaj 1)*

Sa grafika se vidi da je generisani uzorak prilično dobar međutim ne mora uvek biti tako. Pogledajmo šta će se desiti ako malo izmenimo predloženu raspodelu.



Slika 5.3 *Histogram generisanog niza slučajnih promenljivih sa inverznom gama raspodelom (slučaj 2)*



Slika 5.4 *Grafički prikaz željene inverzne gama raspodele, predložene raspodele i vrednosti generisane raspodele u tačkama koje odgovaraju srednjim tačkama intervala histograma sa slike 5.3 (slučaj 2)*

Sa grafika se vidi da generisani uzorak i nije baš najbolji. Ovo je posledica toga što smo izmenili predloženu raspodelu, odnosno, promenili smo joj parametre. Povećali smo srednju vrednost i smanjili smo varijansu. Predložena raspodela sada izvlači kandidate koji ne odgovaraju raspodeli koju želimo da generišemo. Kada se u retkom slučaju desi da se iz predložene raspodele izvuče kandidat koji je blizak vrednosti u kojoj željena inverzna gama raspodela ima maksimum, ovaj kandidat se prihvata sa velikom verovatnoćom. Nakon toga prođe dosta iteracija pre nego što algoritam prihvati sledećeg kandidata jer ovakva predložena raspodela uglavnom izvlači kandidate u kojima željena raspodela ima male vrednosti pa se ti kandidati odbacuju i algoritam se zadržava u istoj tački veliki broj puta. Otuda nerealno veliki broj generisanih uzoraka u tačkama bliskim maksimalnoj vrednosti željene raspodele koju treba generisati.

Iz navedenog primera se može zaključiti da je izbor predložene raspodele veoma važna stvar o kojoj se mora voditi računa. Generalni savet je da predložene raspodele trebaju što više da „liče“ na raspodele koje želimo da generišemo. Takođe je preporučljivo da predložene raspodele imaju veliku varijansu.

Script kodovi pisani u programskom paketu Matlab® pomoću koga su i urađeni navedeni primeri, dati su u prilogu A.

§6 Modeli cena akcija i opcija na finansijskom tržištu. Black-Scholes-ova formula

U ovom poglavlju su date osnove matematičkih modela određivanja vrednosti cena akcija i opcija na finansijskom tržištu. Cilj ovog poglavlja nije da pruži iscrpne informacije o pomenutim modelima već da ih na jednostavan način približi čitaocu koji možda nije upoznat sa njima, kako bi se moglo bolje shvatiti sledeće poglavlje u kome se primenom MCMC metoda određuju vrednosti nepoznatih parametara pomenutih modela. Ukratko su opisana dva modela i to: model određivanja samo cena akcija i model određivanja cena i akcija i opcija prema Black-Scholes-ovoj formuli. Takođe su data i kratka objašnjenja nekih pojmova iz ekonomije.

6.1 Finansijsko tržište i osnovni pojmovi vezani za finansijsko tržište

Pre nego što predstavimo matematičke modele određivanja cena akcija i opcija na finansijskom tržištu, navešćemo opisne definicije nekoliko ekonomskih pojmova koji bi trebali da čitaocima koji se možda prvi put sreću sa takvom terminologijom bliže objasne koja je svrha pomenutih matematičkih modela.

Definicija 6.1 *Finansijsko tržište je pojam koji se odnosi na mesto gde kupci i prodavci učestvuju u trgovini imovine, kao što su akcije, obveznice, valute i derivati.*

Finansijska tržišta su najčešće definisana tako da imaju transparentne trgovinske propise, troškove i načine utvrđivanja cena hartija od vrednosti kojima se trguje. Učešće na nekim finansijskim tržištima je dozvoljeno samo određenim učesnicima koji ispunjavaju određene kriterijume. Neki od njih su npr. posedovanje određene količine novca, geografska lokacija investitora, poznavanje tržišta, profesija učesnika itd.

Definicija 6.2 *Akcije su jedinice vlasništva određene korporacije.*

Posedovanje akcija ne mora značiti da akcionar ima direktnu kontrolu nad poslovanjem korporacije, ali akcionar ima pravo na ravnopravnu raspodelu profita u obliku dividendi.

Definicija 6.3 *Derivat je finansijski instrument, odnosno, sporazum između dve strane čija vrednost je određena cenom nečega drugog.*

Derivati su u stvari finansijski ugovori čija je vrednost korelisana sa očekivanim budućim kretanjima cena neke imovine npr. akcija. Postoje razne vrste derivata, a najpoznatiji su zamene, ugovori za budućnost (eng. *futures contracts*) i opcije.

Definicija 6.4 *Opcija je vrsta derivata, odnosno finansijski ugovor između dve strane u vezi kupovine ili prodaje imovine (npr. akcije) po referentnoj ceni u toku određenog vremenskog okvira. Tokom ovog vremenskog okvira, vlasnik opcije stiče pravo ali ne i obavezu, da vrši određene transakcije.*

Cena opcije zavisi od više faktora od kojih su najznačajniji: cena imovine, referentna cena po kojoj vlasnik opcije ima pravo da nešto kupi ili proda i vreme važenja opcije. Cena opcije se tokom definisanog vremenskog okvira važenja menja, a nakon njegovog isteka opcija je bezvredna. Opcija koja svom vlasniku daje pravo da nešto kupi naziva se „pozvati“ (eng. *call*), dok se opcija koja svom vlasniku daje pravo da nešto proda zove „staviti“ (eng. *put*). Referentna cena je ugovorena cena po kojoj se nešto može kupiti ili prodati (eng. *strike price*). Većina opcija ima svoj datum isteka nakon koga postaje bezvredna. Razlika opcija od ugovora za budućnost, je u tome što vlasnik opcije nema obavezu da je izvrši.

Definicija 6.5 *Evropska opcija (eng. European option) je vrsta opcije koja svom vlasniku daje pravo ali ne i obavezu da u tačno definisanom vremenskom trenutku kupi ili proda određenu imovinu.*

Vlasnik Evropske opcije ne može izvršiti opciju u bilo kom vremenskom trenutku već samo u vremenskom trenutku koji je definisan ugovorom i tada joj vrednost pada na nulu.

U nastavku teksta dajemo opis dva matematička modela. Prvi model ćemo koristiti za određivanje samo cena akcija, dok ćemo drugi model koristiti za određivanje cena i akcija i opcija.

6.2 Model cena akcija (Geometrijsko Brown-ovo kretanje)

Najjednostavniji model cena akcija predstavlja model geometrijskog Brown-ovog kretanja. Geometrijsko Brown-ovo kretanje je određeno stohastičkom diferencijalnom jednačinom:

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dt + \sigma S_t dt dW_t ,$$

gde S_t predstavlja vrednost akcija. Međutim, umesto vrednosti akcija, u praksi je od većeg interesa poznavati promenu vrednosti akcija u zavisnosti od vremena. Iako je geometrijsko Brown-ovo kretanje slučajan proces u neprekidnom vremenu, cene akcija se menjaju u diskretnim vremenskim trenucima. Bez smanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da su vremenski trenuci u kojima se beleže vrednosti akcija ekvidistantni.

Neka je data vrednost akcije u početnom trenutku $S(t=0)=S_0$, i neka su $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$ zabeležene vrednosti akcija u diskretnim vremenskim trenucima $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, \ldots, t_n = n$, $(n \in \mathrm{N})$, respektivno. Posmatrajmo slučajnu promenljivu $Y_t = \log(S_t) - \log(S_{t-1}) = \log\left(S_t / S_{t-1}\right), t \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ova slučajna promenljiva se naziva obrt i predstavlja razliku prirodnih logaritama vrednosti akcija, odnosno prirodni logaritam količnika cena akcija. Razlozi za uvođenje ove slučajne promenljive su to što se posmatranjem vrednosti obrta automatski dobija informacija o promeni cena akcija (iz osobina logaritamske funkcije sledi da ukoliko vrednost akcija raste obrt je pozitivan, ukoliko nema promene vrednosti obrt je jednak 0, a ukoliko vrednost akcije pada obrt je negativan). Drugi razlog za posmatranje upravo ovako definisane slučajne promenljive je to što ona ima normalnu Gauss-ovu raspodelu sa parametrima

μ i σ^2 ($Y \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$), gde su parametri μ i σ^2 pomenuti u jednačini i predstavljaju očekivani obrt i kvadrat volatilnosti, respektivno.

Ukoliko raspolažemo vrednostima pomenutih parametara, možemo odrediti kolike su verovatnoće da se vrednosti obrta nađu u određenim intervalima, međutim, zadatak koji je predmet ovog master rada je upravo suprotno. Zadatak je da na osnovu n poznatih vrednosti obrta ocenimo vrednosti parametara μ i σ^2. Postoje razne metode za rešavanje ovakvih problema od kojih je svakako najpoznatija metoda maksimalne verodostojnosti koja se ovde može lako primeniti. Međutim, cilj ovog rada je prikazivanje MCMC metode u kontekstu ocene nepoznatih parametara što će i biti učinjeno u sledećem poglavlju.

6.3 Model cena akcija i opcija (Black-Scholes-ova formula)

Black-Scholes-ov model je matematički model finansijskog tržišta koji razvija parcijalne diferencijalne jednačine čije rešenje je Black-Scholes-ova formula. Ova formula se koristi za određivanje vrednosti Evropskih opcija. Model su prvi put predstavili Fischer Black i Myron Scholes u svom radu "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*." 1973. god. dok je Robert C. Merton prvi objavio rad kojim je detaljnije razradio matematičke osnove modela i upotrebio termin Black-Scholes-ov model za određivanje cena opcija. Merton i Scholes su za svoj rad 1997 godine dobili Nobelovu nagradu za ekonomiju dok je Fisher Black dve godine ranije preminuo ali je pomenut zbog svog značajnog doprinosa u razvoju modela.

Prema Black-Scholes-ovom modelu, cene akcija su određene stohastičkom diferencijalnom jednačinom koju smo videli u odeljku 6.2, dok se cene *call* i *put* opcija određuju pomoću sledećih formula (Black–Scholes-ovih formula):

$$C_t = S_t N\left(d_1\right) - e^{r(\Delta t)} K N\left(d_1 - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

$$P_t = K e^{-r(\Delta t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

gde su:

$$d_1 = \frac{\log\left(S_t / K\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

Parametri koji se pominju u formulama su sledeći:

- σ - volatilnost, standardna devijacija obrta, mera neodređenosti cena akcija
- Δt - vreme do isteka opcije u godinama

K - referentna cena, cena po kojoj je moguće kupiti akcije u trenutku isteka opcije
r - kamatna stopa po kojoj je u svakom trenutku moguće pozajmiti novac

Funkcija *N(x)* predstavlja integral normalne Gauss-ove raspodele u granicama od $-\infty$ do x (funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom Gauss-ovom raspodelom).

Iz formula se vidi da između cena cene *call* i *put* opcija postoji sledeća zavisnost:

$$P_t = Ke^{-r(\Delta t)} - S_t + C_t$$

Ovaj model uvodi brojna ograničenja npr. kamatna stopa r je konstantna a isto važi i za volatilnost, transakcije se obavljaju bez ikakvih troškova, itd. Tokom vremena Black-Scholes-ov model je doživeo brojna proširenja i modifikacije kojima se neka od ograničenja prevazilaze. Međutim, ovde nam nije cilj da detaljno razrađujemo modifikacije Black-Scholes-ovog modela već ćemo koristiti model koji smo naveli. Usvojićemo određene vrednosti za Δt, K i r, a zatim ćemo na osnovu poznatih vrednosti cena akcija u određenim vremenskim trenucima dobiti vrednosti cena opcija. Zatim ćemo na osnovu ovih vrednosti kao i vrednosti cena akcija (posredno, preko vrednosti obrta) oceniti vrednosti nepoznatih parametara μ i σ^2.

Pošto su formule za određivanje cena *call* i *put* opcija određene istim parametrima, dovoljno je posmatrati samo cene jedne vrste opcija. Mi ćemo posmatrati cene *call* opcija. Međutim ipak ćemo morati da uvedemo jednu modifikaciju. U Black-Scholes-ovu formulu za određivanje cene *call* opcije ćemo dodati određenu grešku koja će imati Gauss-ovu normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću jednakom nuli i sa standardnom devijacijom σ_g. Takođe ćemo oceniti i vrednost parametra σ_g. Razlozi za uvođenje navedene modifikacije i algoritmi za primenu MCMC metode za ocenu nepoznatih parametara za dva modela koje smo naveli, dati su u sledećem poglavlju.

§7 Primena MCMC metoda u finansijskoj matematici

U ovom poglavlju data je primena MCMC metoda u Bayes-ovskom ocenjivanju parametara slučajnih procesa za modele formiranja cena akcija i opcija. Najpre je dat primer primene MCMC metoda u ocenjivanju parametara modela na osnovu posmatranja samo procesa cena akcija, a zatim i na osnovu posmatranja cena akcija i opcija na finansijskom tržištu prema Black-Scholes-ovoj formuli. Takođe je data i analiza osetljivosti MCMC metoda u zavisnosti od usvojenih apriornih raspodela. Dati primeri su rešeni pomoću programskog paketa Matlab®.

7.1 Primena MCMC metode za određivanje parametara modela cena akcija (Geometrijsko Brown-ovo kretanje)

Najpre ćemo rešiti problem određivanja nepoznatih parametara za model cena akcija u obliku geometrijskog Brown-ovog kretanja koji je opisan u prethodnom poglavlju. Kao što smo već rekli, ako su nam poznate cene akcija u određenim vremenskim trenucima, tada su nam poznate i vrednosti obrta. Prema pretpostavci, vrednost obrta je slučajna promenljiva sa Gauss-ovom raspodelom $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, gde se parametri μ i σ^2 nazivaju očekivani obrt i kvadrat volatilnosti, respektivno. Pokušaćemo da na osnovu poznatih vrednosti obrta odredimo nepoznate parametre μ i σ^2.

Posmatrajmo slučajni vektor $\vec{Y} = \left(y_1, y_2, y_3, ..., y_n\right), \left(n \in \mathrm{N}\right)$ čije su vrednosti $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ vrednosti obrta zabeležene u *n* diskretnih vremenskih trenutaka. Pošto su slučajne promenljive $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n$ nezavisne, dobijamo sledeći izraz za zajedničku uslovnu funkciju gustine verovatnoće slučajnog vektora Y.

$$f\left(\vec{Y} \mid \mu, \sigma^2\right) = f\left(Y_1 \mid \mu, \sigma^2\right) \cdot f\left(Y_2 \mid \mu, \sigma^2\right) \cdot ... \cdot f\left(Y_n \mid \mu, \sigma^2\right) \qquad (7.1)$$

$$f\left(\vec{Y} \mid \mu, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (7.2)$$

Kada se posmatra kao funkcija parametara μ i σ^2 pod uslovom da nam je poznat slučajni vektor Y, funkcija (7.2) predstavlja funkciju verodostojnosti:

$$L\left(\mu, \sigma^2 \mid \vec{Y}\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu-y_i)^2}{2\sigma^2}} \qquad (7.3)$$

Ukoliko želimo da ocenimo vrednosti parametara μ i σ^2 mogli bismo to uraditi pomoću metoda maksimalne verodostojnosti ali ćemo umesto toga ovde upotrebiti MCMC metodu.

Poslužićemo se Clifford-Hammersley-evom teoremom koju smo pomenuli u poglavlju 5. Podsetimo se, Clifford-Hammersley-eva teorema kaže da je zajednička uslovna raspodela parametara $f\left(\mu, \sigma^2 \mid \vec{Y}\right)$ u potpunosti određena tzv. potpunim uslovnim raspodelama $f\left(\mu \mid \sigma^2, \vec{Y}\right)$ i $f\left(\sigma^2 \mid \mu, \vec{Y}\right)$. Neka su $f\left(\mu\right)$ i $f\left(\sigma^2\right)$ usvojene apriorne raspodele parametara μ i σ^2

respektivno. Ukoliko pretpostavimo da su ove dve raspodele nezavisne, na osnovu Bayes-ove formule dobijamo sledeće dve relacije:

$$f\left(\mu \mid \sigma^2, \vec{Y}\right) \propto L\left(\mu, \sigma^2 \mid \vec{Y}\right) \cdot f(\mu) \tag{7.5}$$

$$f\left(\sigma^2 \mid \mu, \vec{Y}\right) \propto L\left(\mu, \sigma^2 \mid \vec{Y}\right) \cdot f\left(\sigma^2\right) \tag{7.6}$$

Drugim rečima, potpune uslovne raspodele parametara μ i σ^2 (aposteriorne) su proporcionalne proizvodu funkcije verodostojnosti (7.3) i njihovih apriornih raspodela.

Kao apriornu raspodelu parametra μ, usvojićemo Gauss-ovu rapodelu $\mathcal{N}\left(\mu_\mu, \sigma_\mu^{\,2}\right)$, dok ćemo za apriornu raspodelu parametra σ^2 usvojiti inverznu gama raspogelu $\mathcal{IG}\left(\alpha, \beta\right)$. Može se pokazati da će i aposterione raspodele parametara μ i σ^2 biti takođe Gauss-ova i inverzna gama, respektivno. Ukoliko ove aposteriorne raspodele označimo kao

$$f\left(\mu \mid \sigma^2, \vec{Y}\right) \propto \mathcal{N}\left(\mu_e, \sigma_e^{\,2}\right) \text{ i} \tag{7.7}$$

$$f\left(\sigma^2 \mu, \vec{Y}\right) \propto \mathcal{IG}\left(\alpha_e, \beta_e\right), \tag{7.8}$$

dobijamo sledeće izraze za vrednosti parametara $\mu_e, \sigma_e^{\,2}, \alpha_e \text{ i } \beta_e$:

$$\mu_e = \frac{\sigma^2 \mu_\mu + \sigma_\mu^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sigma^2 + n\sigma_\mu^2}, \sigma_e = \frac{\sigma_\mu^2 \sigma^2}{\sigma^2 + n\sigma_\mu^2} \tag{7.9}$$

$$\alpha_e = \alpha + \frac{n}{2},\ \beta_e = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu - y_i\right)^2}{2} \tag{7.10}$$

Naš zadatak je da konstruišemo Markov-ske lance koji će kao svoje ravnotežne raspodele imati aposteriorne raspodele sa parametrima (7.9) i (7.10).

Algoritam koji ćemo koristiti sastoji se iz sledećih koraka:

I. Generisati slučajni vektor $\vec{Y}$, $\left|\vec{Y}\right| = n \in \mathrm{N}$, $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Ovo je slučajni vektor vrednosti obrta. Parametre μ i σ^2 biramo proizvoljno, a u nastavku zadatka se ponašamo kao da su nam njihove vrednosti nepoznate i pokušavamo da ih ocenimo.

II. Usvojiti parametre apriornih raspodela $f(\mu)$ i $f\left(\sigma^2\right)$, odnosno parametre $\mu_\mu, \sigma_\mu^{\,2}, \alpha \text{ i } \beta$.

III. Usvojiti inicijalne vrednosti parametara μ i σ^2, ($\mu_{(1)}$ i $\sigma^2_{(1)}$, respektivno).

IV. Generisati Markov-ske lance parametara μ i σ^2 na sledeći način:

$$(\forall i)(i \in \mathrm{N}) \wedge (2 \le i \le n) \;\; \mu_{(i)} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{e(i-1)}, \sigma_{e(i-1)}{}^2\right), \text{ gde su}$$

$$\mu_{e(i)} = \frac{\sigma^2_{e(i-1)}\mu_{e(i-1)} + \sigma^2_{(i-1)}\sum_{j=1}^{n} y_j}{\sigma^2_{(i-1)} + n\sigma^2_{e(i-1)}}, \sigma^2_{e(i)} = \frac{\sigma^2_{e(i-1)}\sigma^2_{(i-1)}}{\sigma^2_{(i-1)} + n\sigma^2_{e(i-1)}} \qquad (7.11)$$

$$(\forall i)(i \in \mathrm{N}) \wedge (2 \le i \le n) \;\; \sigma^2_{(i)} \sim \mathcal{IG}\left(\alpha_{e(i)}, \beta_{e(i)}\right), \text{ gde su}$$

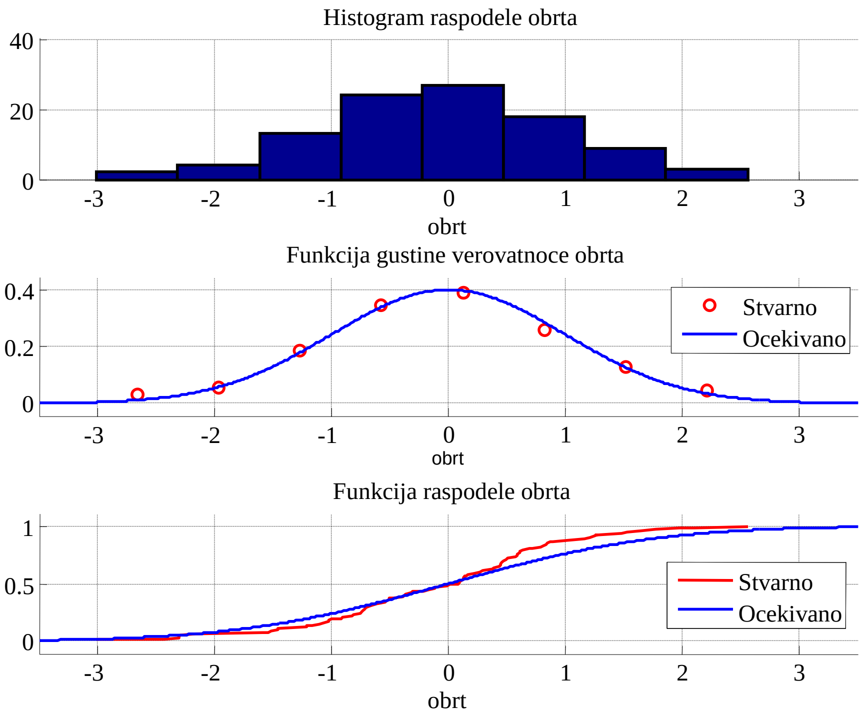
$$\alpha_{e(i)} = \alpha_{e(i-1)} + \frac{n}{2}, \; \beta_{e(i)} = \beta_{e(i-1)} + \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_{(i)} - y_j\right)^2}{2} \qquad (7.12)$$

Obzirom da su raspodele iz kojih je potrebno uzeti uzorke vrednosti parametara Gauss-ova i inverzna gama, uzorci se mogu birati direktno, pa ćemo koristiti Gibbs-ov algoritam.

Problem ćemo rešiti pomoću programskog paketa Matlab®. Najpre je potrebno generisati slučajni vektor obrta ($\vec{Y}$). Za ovo ćemo upotrebiti ugrađenu *Matlab Statistical Toolbox* funkciju *normrnd* koja služi za generisanje konačnog niza slučajnih promenljivih sa Gauss-ovom normalnom raspodelom. Usvojeni su parametri $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$ i usvojeno je da dimenzija vektora $\vec{Y}$ bude jednaka $n = \left|\vec{Y}\right| = 100$. Da bismo bili što sigurniji da će generisani niz zaista imati Gauss-ovu normalnu raspodelu sa zadatim parametrima, koristimo metod χ^2- testiranja. Usvojena je vrednost nivoa značajnosti od 0,99, broj klasa r je određen prema Sturges-ovom pravilu: $r = round(1 + 3.3\log_{10} n)$, gde funkcija round zaokružuje svoj argument na najbliži ceo broj. Ukoliko je izračunata vrednost χ^2 veća od 1,239 hipoteza se odbacuje i postupak generisanja vektora $\vec{Y}$ se ponavlja. Vrednost 1,239 je jednaka vrednosti χ^2 raspodele sa $(r-1) = 7$ stepeni slobode za nivo značajnosti od 0,99. Nakon prihvatanja hipoteze, vrednosti parametara se proveravaju i metodom maksimalne verodostojnosti, a zatim se slučajni vektor $\vec{Y}$ zajedno sa zadatim i sa ocenjenim vrednostima parametara (metodom maksimalne verodostojnosti, koji će nam služiti za procenu tačnosti MCMC metoda) snimaju u datoteku *podaci.mat*. Na kraju se crtaju grafici (slika 7.1).

Na osnovu podataka koje smo generisali, upotrebićemo MCMC metodu da ocenimo vrednosti nepoznatih parametara. Usvojićemo apriorne raspodele nepoznatih parametara a zatim ćemo pomoću Bayes-ove formule formirati aposteriorne raspodele i iz njih ćemo generisati po jedan uzorak. Ove aposteriorne raspodele se kako je navedeno u formulama (7.11) i (7.12) u sledećoj iteraciji uzimaju kao apriorne i postupak se ponavlja zadati broj puta.

Kao rezultat ćemo dobiti vektore vrednosti nepoznatih parametara. Iz ovih vektora ćemo odbaciti određeni broj početnih vrednosti (npr. prvih 10%) jer su početne vrednosti generisane u periodu „uhodavanja“ algoritma. Preostale vrednosti imaju neku aposteriornu raspodelu čije histograme potom crtamo. Na slici 7.1 je prikazan tipičan oblik histograma aposteriornih verovatnoća koji se dobija primenom opisanog algoritma. Kako je već rečeno u poglavlju 1, prema Bayes-ovskoj paradigmi, ocene parametara su one vrednosti u kojima aposteriorne raspodele dostižu svoj maksimum. Kako ovde umesto raspodela imamo histograme čije bi anvelope trebale da teže ka aposteriornim raspodelama sa povećanjem broja uzoraka koje uzimamo, kao ocenu vrednosti parametara usvojićemo srednju vrednost intervala histograma u kome se nalazi najveći broj generisanih vrednosti uzoraka.

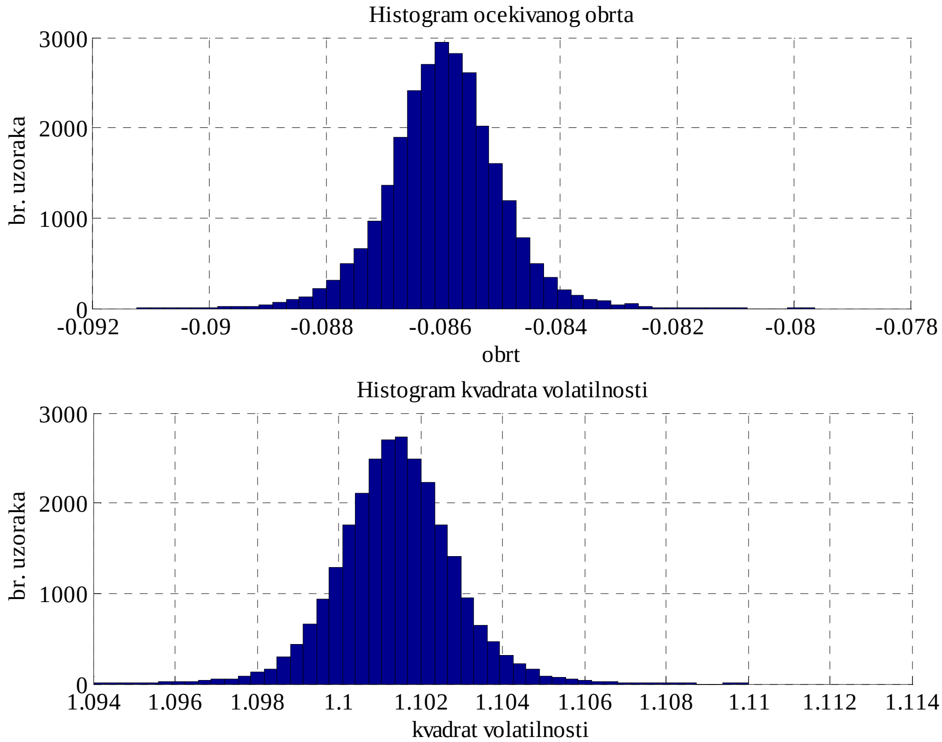


Slika 7.1 *Histogram raspodele, funkcija gustine verovatnoće i funkcija raspodele obrta*

Ono što se može zaključiti iz primene algoritma jeste da povećanjem broja uzoraka, aposteriorne raspodele očekivanog obrta i kvadrata volatilnosti teže ka Dirac-ovim delta funkcijama u tačkama koje odgovaraju ocenama parametara. Ovo se dešava zbog toga što se svakom iteracijom poboljšavaju parametri usvojenih apriornih raspodela, odnosno, njihovi maksimumi konvergiraju ka ocenama koje bi se dobile metodom maksimalne verodostojnosti, dok im se varijanse sve više smanjuju.

Pogledajmo sada kako izbor apriornih raspodela, odnosno, njihovih parametara utiče na primenjeni algoritam. Najpre ćemo ispitati osetljivost metode na promenu apriornih parametara raspodele očekivanog obrta. Za sve ostale parametre ćemo usvojiti određene vrednosti dok ćemo parametre μ_μ i

$\sigma_\mu^{\ 2}$ menjati i posmatrati vrednost ocene nepoznatih parametara. Najpre ćemo usvojiti fiksiranu vrednost parametra μ_μ koja je dosta veća od stvarne vrednosti očekivanog obrta a zatim ćemo menjati parametar $\sigma_\mu^{\ 2}$ i posmatrati ocene parametara. Rezultati su prikazani u tabeli 7.1.



Slika 7.2 *Histogrami aposteriornih raspodela očekivanog obrta i kvadrata volatilnosti*

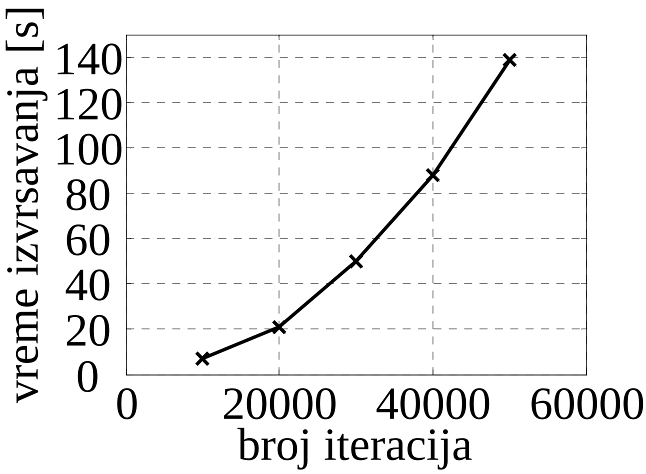
	μ_μ=1000	
	Ocena za μ	Ocena za σ^2
$\sigma_\mu^{\ 2}$=1000	-0,0856	1,1155
$\sigma_\mu^{\ 2}$=100	-0,0863	1,1159
$\sigma_\mu^{\ 2}$=10	-0,0856	1,1729
$\sigma_\mu^{\ 2}$=1	-0,0823	1,7150
$\sigma_\mu^{\ 2}$=0,1	0,0860	7,0524
$\sigma_\mu^{\ 2}$=0,01	3,9971	46,1189
$\sigma_\mu^{\ 2}$=0,001	9,1376	90,5197

Tabela 7.1 *Ocene vrednosti nepoznatih parametara u zavisnosti od varijanse apriorne raspodele očekivanog obrta. (Br. iteracija=10000, odbacivanje početnih 10% uzoraka,* μ_μ*=1000,* $\alpha=1$*,* $\beta=2$*). Ocene dobijene metodom maksimalne verodostojnosti:* μ*=-0,0860 i* σ^2*=1,1125*

Iz tabele 7.1 se vidi da za velike usvojene vrednosti varijanse apriorne raspodele očekivanog obrta, primenjeni algoritam daje zadovoljavajuće rezultate. Ukoliko vrednost varijanse znatno smanjimo, dobijamo pogrešne ocene i očekivanog obrta i kvadrata volatilnosti. Ovo se dešava zbog toga što apriorna raspodela u ovom slučaju ima mnogo veći doprinos u formiranju aposteriorne raspodele parametra μ jer mala vrednost varijanse apriorne raspodele znači da je prema našim apriornim saznanjima praktično nemoguće da parametar μ ima vrednost koja se znatno razlikuje od one koju smo usvojili kao apriornu. Potreban je veliki broj iteracija da bi se postigla zadovoljavajuća tačnost ocene. Ovakva apriorna raspodela utiče i na ocenu kvadrata volatilnosti jer se uzorci kvadrata volatilnosti biraju u zavisnosti od uzoraka očekivanog obrta. Povećanjem broja uzoraka može se povećati tačnost ocene, što je prikazano u tabeli 7.2. Više uzoraka, odnosno, veći broj iteracija međutim znači i sporije izvršavanje algoritma a to je ono što želimo da izbegnemo. Na slici 7.3 je prikazana zavisnost vremena izvršavanja algoritma u funkciji od broja iteracija.

	μ_μ=1000, σ_μ^2=0,001		
	Ocena za μ	Ocena za σ^2	Vreme izvršavanja algoritma [s]
n=10000	9,1376	90,5197	7
n=20000	8,0825	82,8447	21
n=30000	7,3485	75,6503	50
n=40000	6,7563	69,6642	88
n=50000	6,0910	64,4229	139

Tabela 7.2 *Ocene vrednosti nepoznatih parametara u zavisnosti od broja iteracija algoritma. (Odbacivanje početnih 10% uzoraka,* μ_μ=1000, σ_μ^2=0,001, $\alpha = 1$, $\beta = 2$*). Ocene dobijene metodom maksimalne verodostojnosti:* μ=-0,0860 *i* σ^2=1,1125



Slika 7.3 *Vreme izvršavanja algoritma u zavisnosti od broja iteracija*

Sada ćemo usvojiti fiksiranu vrednost parametra σ_μ^2 a menjaćemo vrednost parametra μ_μ i posmatrati ocene parametara. Rezultati su prikazani u tabeli 7.3.

	σ_μ^2=10	
	Ocena za μ	Ocena za σ^2
μ_μ=1000000	9896	97952000
μ_μ=100000	914	900640
μ_μ=10000	1,3174	571,63
μ_μ=1000	-0,0860	1,1715
μ_μ=100	-0,0858	1,1022
μ_μ=10	-0,0860	1,1018
μ_μ=1	-0,0860	1,1012

Tabela 7.3 *Ocene vrednosti nepoznatih parametara u zavisnosti od apriorne srednje vrednosti očekivanog obrta. (Br. iteracija=10000, odbacivanje početnih 10% uzoraka, σ_μ^2=10, $\alpha=1$, $\beta=2$). Ocene dobijene metodom maksimalne verodostojnosti: μ=-0,0860 i σ^2=1,1125*

Iz tabele 7.3 se vidi da za usvojene apriorne srednje vrednosti očekivanog obrta koje se mnogo razlikuju od stvarne vrednosti očekivanog obrta, primenjeni algoritam daje loše ocene. Ocena se može popraviti povećanjem broja iteracija ili povećanjem apriorne vrednosti kvadrata volatilnosti. Drugi način je bolji jer ne utiče na vreme izvršenja algoritma.

Sada ćemo ispitati osetljivost metode na promenu apriornih parametara raspodele očekivanog obrta. Za sve ostale parametre ćemo usvojiti određene vrednosti. Pošto inverzna gama raspodela ima maksimum koji je određen izrazom $x_{\max}=\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, fiksiraćemo vrednost parametra α i menjaćemo parametar β. Rezultati su prikazani u tabeli 7.4.

	α=1	
	Ocena za μ	Ocena za σ^2
β=1000000	-0,0859	3,3216
β=100000	-0,0859	1,3211
β=10000	-0,0864	1,1251
β =1000	-0,0855	1,1039
β =100	-0,0858	1,1023
β =10	-0,0859	1,1010
β =1	-0,0862	1,1009

Tabela 7.4 *Ocene vrednosti nepoznatih parametara u zavisnosti od apriornih parametara inverzne gama raspodele za kvadrat volatilnosti (Br. iteracija=10000, odbacivanje početnih 10% uzoraka, σ_μ^2=10, $\mu_\mu=1$ $\alpha=1$,). Ocene dobijene metodom maksimalne verodostojnosti: μ=-0,0860 i σ^2=1,1125*

Iz tabele 7.4 se vidi da algoritam daje lošu ocenu za očekivani obrt jedino u slučaju kada se parametri α i β izaberu tako da apriori sugerišu da je vrednost kvadrata volatilnosti $\sigma^2 = \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{1000000}{2} = 500000$ što je mnogo veće od stvarne vrednosti koja je približno jednaka 1. Ocene vrednosti očekivanog obrta su u svim slučajevima zadovoljavajuće. Može se zaključiti da je mnogo važnije izabrati odgovarajuću apriornu raspodelu za očekivani obrt.

7.2 Primena MCMC metode za određivanje parametara modela cena akcija i opcija (Black-Scholes-ova formula)

Sda ćemo preći na problem određivanja cena akcija i opcija prema Black-Scholes-ovoj formuli. Osnove ovog modela su date u prethodnom poglavlju. Napišimo ponovo formulu za određivanje vrednosti cena *call* opcije:

$$C_t = S_t N\left(d_1\right) - e^{r(\Delta t)} K N\left(d_1 - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(S_t / K\right) + \left(r + \sigma^2 / 2\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Na kraju prethodnog poglavlja smo nagovestili da ćemo uvesti jednu modifikaciju ove formule. Naime, može se pokazati da je vrednost cene call opcije prema Black-Scholes-ovoj formuli monotona funkcija volatilnosti. Ako je cena call opcije monotona funkcija volatilnosti, tada se može naći i njena inverzna funkcija što znači da bismo znajući vrednost cene call opcije mogli jednoznačno odrediti vrednost volatilnosti. Ovo se naziva stohastička singularnost. Da bismo ovo izbegli, Black-Scholes-ovoj formuli ćemo dodati vrednost slučajne promenljive koja predstavlja grešku određivanja cena call opcije.

$$C_t = S_t N\left(d_1\right) - e^{r(\Delta t)} K N\left(d_1 - \sigma\sqrt{\Delta t}\right) + \varepsilon_t^c$$

Usvojićemo da ova greška ima Gauss-ovu raspodelu, odnosno,

$$\varepsilon_t^c \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_c^2\right).$$

U ovom primeru ocenićemo i vrednost varijanse ove greške, σ_c^2.

Najpre ćemo na osnovu već generisanog vektora obrta (iz prethodnog primera) generisati vektor cena akcija. Ovo ćemo jednostavno uraditi tako što ćemo usvojiti „nultu“ vrednost cene akcije S_0, a zatim ćemo koristiti sledeću formulu:

$$S_t = S_{t-1} \cdot e^{\log\frac{S_t}{S_{t-1}}} = S_{t-1} \cdot e^{y_t}$$

Zatim ćemo na osnovu ovih vrednosti i na osnovu Black-Scholes-ove formule generisati vektor cena opcija. Kada generišemo vektor cena opcija generisaćemo i vektor greške određivanja cena opcija, a zatim ćemo sabrati vrednosti ova dva vektora kako bismo dobili vektor cena opcija sa greškom.

Kada generišemo sve ove podatke imaćemo sve što nam je potrebno za rešavanje problema.

Zajednička funkcija verodostojnosti je proizvod funkcija verodostojnosti cena akcija i cena opcija.

$$L\left(S,C \mid \mu,\sigma^2,\sigma_c^2\right)=\prod_{i=1}^{n} L\left(C_i \mid S_i,\sigma^2,\sigma_c^2\right) L\left(Y_i \mid \mu,\sigma^2\right) \qquad (7.13)$$

Komponenta zajedničke funkcije verodostojnosti koja potiče od cena opcija je proporcionalna sa:

$$L\left(C_i \mid S_i,\sigma^2,\sigma_c^2\right) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma_c^2}\left(C_i - BS\left(\sigma,S_i\right)^2\right)} \qquad (7.14)$$

MCMC algoritam uzima uzorke iz zajedničke funkcije verodostojnosti. Potpune uslovne raspodele su $f\left(\mu \mid \sigma^2, S\right)$, $f\left(\sigma^2 \mid \mu,\sigma_c^2,S,C\right)$ i $f\left(\sigma_c^2 \mid \sigma^2,S,C\right)$. Usvojićemo apriorne raspodele na sledeći način: $f\left(\mu\right) \sim \mathcal{N}$ i $f\left(\sigma_c^2\right) \sim \mathcal{IG}$ i aposteriorne verovatnoće za μ i σ_c^2 će biti iste vrste kao i apriorne. Međutim, zbog Black-Scholes-ove formule za određivanje vrednosti cena opcija, $f\left(\sigma^2 \mid \mu,\sigma_c^2,S,C\right)$ nije raspodela koja se može birati direktno. Zbog toga će se ovde koristiti Metropolis-Hastings-ov. algoritam. MCMC algoritam će ciklično uzimati uzorke iz sledećih raspodela:

$$\begin{aligned}
\mu^{(g+1)} &\sim f\left(\mu \mid \left(\sigma^2\right)^{(g)}, S\right) \sim \mathcal{N} \\
\left(\sigma_c^2\right) &\sim f\left(\sigma_c^2 \mid \left(\sigma^2\right)^{(g)}, S, C\right) \sim \mathcal{IG} \\
\left(\sigma^2\right)^{(g+1)} &\sim f\left(\sigma^2 \mid \mu^{(g+1)},\left(\sigma_c^2\right)^{(g+1)}, S, C\right) : \text{Metropolis-Hastings}
\end{aligned} \qquad (7.15)$$

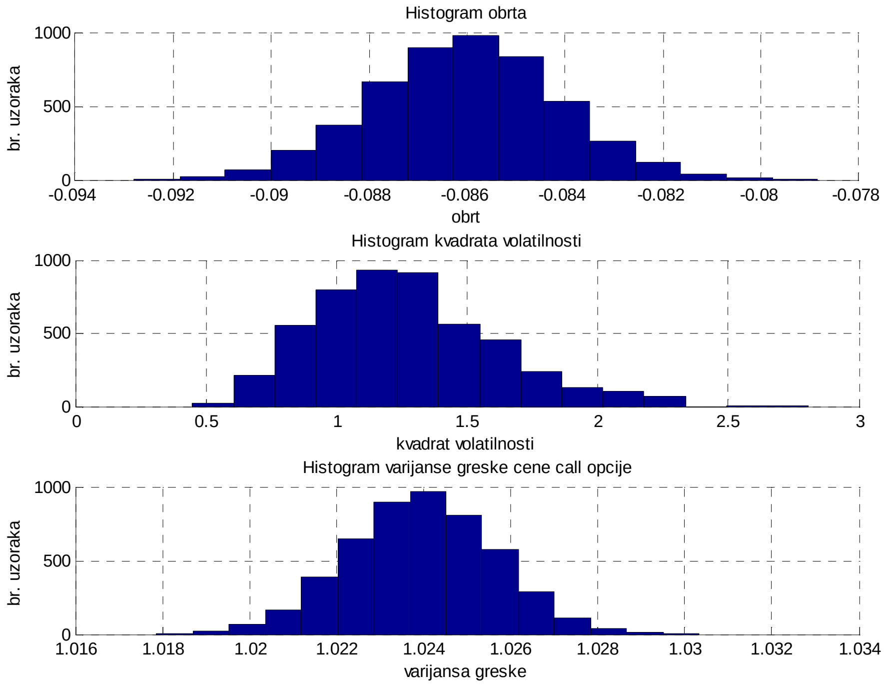
Algoritam za rešavanje problema je sledeći.

I. Generisati slučajni vektor $\vec{S}$, $\left|\vec{S}\right| = n \in \mathrm{N}$, na osnovu generisanog vektora $\vec{Y}$, iz prethodnog primera. Usvojiti parametre apriornih raspodela $f\left(\mu\right)$ i $f\left(\sigma_c^2\right)$ i usvojiti predloženu raspodelu za σ^2

II. Usvojiti inicijalne vrednosti parametara μ, σ^2 i σ_c^2, ($\mu_{(1)}$, $\sigma_{(1)}^2$ i $\sigma_{c(1)}^2$ respektivno).

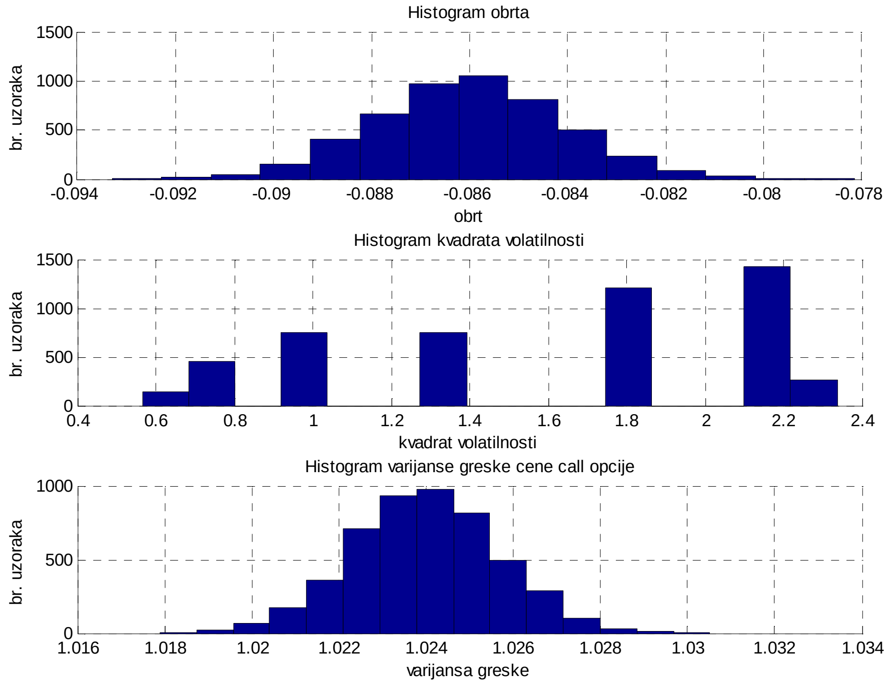
III. Generisati Markov-ske lance nepoznatih parametara na način kako je opisano u (7.15):

Kao predložena raspodela za σ^2 je usvojena Gauss-ova raspodela na pozitivnom delu *x*-ose. Tipični rezultati koji se dobijaju primenom opisanog algoritma su prikazani na slici 7.4. Rezultati su slični kao i u prethodnom slučaju osim što je ovde konvergencija mnogo sporija ukoliko ne usvojimo odgovarajuću predloženu raspodelu.



Slika 7.4 *Histogrami aposteriornih raspodela očekivanog obrta,i kvadrata volatilnosti i varijanse greške određivanja cena opcija (slučaj 1)*

Osetljivost na promenu parametara apriornih raspodela kod Gibbs-ovog algoritma je analizirana u problemu određivanja cena akcija (model geometrijskog Brown-ovog) kretanja. Ovde ćemo proveriti šta se dešava kada promenimo parametre predložene raspodele. Prilikom izvršavanja algoritma kojim je generisana slika 7.4 srednja vrednost i varijansa predložene raspodele za σ^2 su iznosili 1 i 2 respektivno. Ako sada promenimo vrednosti ovih parametara na 5 i 0,75 respektivno, nakon izvršavanja algoritma dobićemo rezultate koji su prikazani na slici 7.5. Vidi se da su ocene očekivane vrednosti obrta i varijanse greške i dalje dobre, međutim, ocena kvadrata volatilnosti je znatno pogoršana. Kao što je već objašnjeno u poglavlju 5, razlog za ovako lošu ocenu i loše generisanu aposteriornu raspodelu je to što predložena funkcija raspodele ima srednju vrednost koja je udaljena od maksimuma raspodele kvadrata volatilnosti i malu varijansu. Povećanjem broja iteracija, rezultati izvršavanja algoritma će biti bolji ali će se znatno povećati i vreme izvršavanja tako da je sa praktičnog stanovišta mnogo bolje rešenje usvojiti predloženu raspodelu koja ima veću varijansu.



Slika 7.4 *Histogrami aposteriornih raspodela očekivanog obrta,i kvadrata volatilnosti i varijanse greške određivanja cena opcija (slučaj 2)*

Zaključak

U radu je prikazana metoda Markov Chain Monte Carlo (MCMC) u kontekstu Bayes-ovskog ocenjivanja parametara slučajnih procesa formiranja samo cena akcija kao i cena akcija i opcija na finansijskom tržištu za klasičan Black-Scholes-ov model. Generisani su vektori cena akcija i opcija i primenjen je MCMC algoritam. Izvršena je i analiza osetljivosti metode na promenu apriornih raspodela.

U slučaju modela samo cena akcija, za usvojene apriorne raspodele dovoljno je primeniti Gibbs-ov algoritam. Primenjeni algoritam daje zadovoljavajuće rezultate u slučaju da se za apriorne raspodele nepoznatih parametara usvoje raspodele sa velikom varijansom. Ukoliko se usvoje raspodele sa malom varijansom, konvergencija je sporija i potreban je veći broj koraka da bi se postigla zadovoljavajuća tačnost, što značajno povećava i vreme izvršenja algoritma.

U slučaju modela i cena akcija i cena opcija po Black-Scholes-ovoj formuli mora se primeniti Metropolis-Hastings-ov algoritam za generisanje Markov-skog lanca kvadrata volatilnosti. Primenjeni algoritam daje zadovoljavajuće rezultate u slučaju da se za predloženu raspodelu (proposal density) usvoji raspodela sa velikom varijansom. Ukoliko se usvoje raspodele sa malom varijansom i srednjom vrednošću koja se značajno razlikuje od srednje vrednosti raspodele koju je potrebno generisati, konvergencija je izuzetno spora.

Ovakvi rezultati su i očekivani sa obzirom da veoma mala vrednost varijanse apriorne raspodele znači da je naše inicijalno ubeđenje u vezi sa vrednostima nepoznatih parametara dominantno u odnosu na informacije koje se dobijaju realizacijom eksperimenata. Samim tim, potreban je veliki broj koraka da bi se uticaj apriornih raspodela smanjio.

Opšti zaključak je da uz odgovarajući izbor apriornih raspodela MCMC metoda predstavlja efikasan alat za ocenjivanje vrednosti nepoznatih parametara na osnovu realizacije slučajnih eksperimenata.

Prilozi

Prilog A: Matlab® Script kodovi

A.1 Gauss-ova funkcija

```
%Gauss bell curve vith parameters mi and sigma
function G = gauss_bell_curve(x,mi,sigma)
G = (1./(sigma*(2*pi)^0.5))*exp(-(x-mi)^2/(2*sigma^2));
```

A.2 Generisanje niza slučajnih promenljivih sa inverznom gama raspodelom pomoću Metropolis-Hastings algoritma

```
clear;
%Parameters of the inverse gamma function
A=2;
B=4;

%Parameters of the proposal density
mi=1;
sigma=3;

%Script parameters
x_start=5;
upper_limit=10;
number_of_samples=75000;
number_of_bins=75;
rejection=15000;

x(1)=x_start;
acceptance_counter=0;
rejection_counter=0;

i=2;

while i<=number_of_samples
   x_candidate=mi+sigma*randn;
   if x_candidate>0
      a=(inverse_gamma(x_candidate,A,B)*gauss_bell_curve(x(i-
         1),mi,sigma)) /(inverse_gamma(x(i-1),A,B)*
         gauss_bell_curve(x_candidate,mi,sigma));
      if a>=1
         x(i)=x_candidate;
         acceptance_counter=acceptance_counter+1;
      else
         a_help=rand;
         if a>a_help
            x(i)=x_candidate;
            acceptance_counter=acceptance_counter+1;
```

```
        else
            x(i)=x(i-1);
            rejection_counter=rejection_counter+1;
        end;
    end;
    i=i+1;
  end;
end;

[frequency, centers]=hist (x,number_of_bins);
delta_x=centers(2)-centers(1);
posterior=(frequency/number_of_samples)/delta_x;

acceptance_counter
rejection_counter

figure (1);
hold on; grid;
hist (x(rejection+1:number_of_samples),number_of_bins);

figure (2);
hold on; grid;
ezplot(@(x)inverse_gamma(x,A,B),[0,upper_limit]);
ezplot(@(x)gauss_bell_curve(x,mi,sigma),[0,upper_limit]);
plot(centers, posterior,'ro');
axis([0 upper_limit 0 max(posterior)+0.1]);
```

A.3 Generisanje vektora vrednosti obrta

```
%==================================================
% Generisanje vektora obrta sa Gauss-ovom raspodelom
%==================================================

%==================================================
%Inicijalizacija
%==================================================
clear; clc;
 %==================================================
%Generisanje vektora obrta dimenzije n uz testiranje hipoteze da je
%raspodela zaista Gauss-ova sa zadatim parametrima
%==================================================
mi = 0; sigma2 = 1; n=100;
indikator=0;
brojac=0;

while indikator==0
  y = normrnd(mi,sqrt(sigma2),n,1);
  r=8;
  [N,x]=hist(y,r);
```

```
    pom=(x(2)-x(1))/2;
    granice(1)=x(1)-pom;
    for i=2:r+1
        granice(i)=x(1)-pom+2*(i-1)*pom;
        p(i-1)=normcdf(granice(i),mi, sqrt(sigma2))-normcdf(granice(i-1),mi,
                sqrt(sigma2));
    end;
    hi_2=sum(((N-n*p).^2)./N);
    if hi_2<=1.239
        indikator=1;
    end;
    brojac=brojac+1;
end;

hist_rasp=N/(2*pom*n);
for i=1:n
    funk_rasp(i)=i/n;
end;

mi_mmv=sum(y)/100;
sigma2_mmv=std(y)^2;

save ('podaci.mat', 'y', 'n', 'mi', 'sigma2', 'mi_mmv', 'sigma2_mmv');

%==============================================
%Crtanje grafika
%==============================================
figure (1);

subplot (3,1,1);
hold on; grid;
hist (y,8);
title('Histogram raspodele obrta');
xlabel('obrt');

subplot (3,1,2);
hold on; grid;
plot (x,hist_rasp,'ro');
ezplot('(1/sqrt((2*pi)))*exp((-(x)^2)/2)',[-3.5,3.5]);
title('Funkcija gustine verovatnoce obrta');
xlabel('obrt');
legend('Stvarno','Ocekivano')

subplot (3,1,3);
hold on; grid;
plot (sort(y), funk_rasp,'r');
ezplot('(1+erf(x/2))/2',[-3.5,3.5]);
title('Funkcija raspodele obrta');
xlabel('obrt');
legend('Stvarno','Ocekivano')
```

A.4 Ocena vrednosti parametara modela cena akcija (geometrijsko Brown-ovo kretanje)

```
%==================================================
% Ocena parametara modela cena akcija na finansijskom tržištu (ocekivani
% obrt i kvadrat volatilnosti) za model geometrijskog Brown-ovog kretanja
%==================================================
 %==================================================
%Inicijalizacija
%==================================================
clear; clc;
 %==================================================
%Ucitavanje generisanog vektora obrta dimenzije n.
%==================================================
load ('podaci.mat');

%==================================================
%Usvajanje inicijalnih parametara apriornih raspodela ocekivanog obrta i
%kvadrata volatilnosti:
%==================================================
mi_a(1) = 1;  sigma2_a(1) = 10;
a(1) = 100000;  b(1) = 1000000;
mi_s(1) = mi_a(1);  sigma2_s(1) = sigma2_a(1);

%==================================================
%Usvajanje ukupnog broja uzoraka, broja prvih uzoraka koji ce biti
%odbaceni.i broja podela histograma
%==================================================
br_uzoraka =10000;  br_odb_uzoraka = round(0.1*br_uzoraka);
br_podela_hist=40;

%==================================================
%Uzimanje uzoraka i formiranje Markov-skih lanaca
%==================================================
for i=2:br_uzoraka

  %Uzimanje uzoraka za obrt
  sigma2_a (i)= ((sigma2_a(i-1)*sigma2_s(i-1))/(sigma2_a(i-
                 1)*n+sigma2_s(i-1)));
  mi_a (i)= ((sigma2_s(i-1)*mi_a(i-1)+sigma2_a(i-1)*sum(y))/(sigma2_s(i-
            1)+n*sigma2_a(i-1)));
  mi_s(i) = normrnd(mi_a(i),sqrt(sigma2_a(i)));

  %Uzimanje uzoraka za kvadrat volatilnosti
  a(i) = a(i-1)+n/2;
  b(i) = b(i-1)+sum((y-mi_s(i)).^2)/2;
  sigma2_s(i) = 1/gamrnd(a(i),1/b(i));

 end
```

```
%=================================================
%Odbacivanje prvih uzoraka i ocena parametara
%=================================================
mi_s = mi_s(br_odb_uzoraka+1:br_uzoraka);
sigma2_s = sigma2_s(br_odb_uzoraka+1:br_uzoraka);
 [mi_help1, mi_help2]=hist(mi_s,br_podela_hist);
[mi_help3,indeks_ocene_mi]=max(mi_help1);
mi_ocena=mi_help2(indeks_ocene_mi);

[sigma2_help1, sigma2_help2]=hist(sigma2_s,br_podela_hist);
[sigma2_help3,indeks_ocene_sigma2]=max(sigma2_help1);
sigma2_ocena=sigma2_help2(indeks_ocene_sigma2);

%=================================================
%Ispitivanje da li postoje visestruki identicni maksimumi
%=================================================
if
max(mi_help1(1:indeks_ocene_mi))==max(mi_help1(indeks_ocene_mi+1:br_
podela_hist))
   sprintf('Histogram raspodele ocekivanog obrta ima dva identicna')
   sprintf ('maksimuma. Ponovite postupak.')
else
   mi_ocena
end;

if
max(sigma2_help1(1:indeks_ocene_sigma2))==max(sigma2_help1(indeks_oc
ene_sigma2+1:br_podela_hist))
   sprintf('Histogram raspodele kvadrata volatilnosti ima dva identicna')
   sprintf ('maksimuma. Ponovite postupak.')
else
    sigma2_ocena
end;

%=================================================
%Crtanje grafika
%=================================================
figure (1);

subplot (2,1,1);
hold on; grid;
title('Histogram obrta');
xlabel('obrt'); ylabel('br. uzoraka')
hist (mi_s,br_podela_hist);

subplot (2,1,2);
hold on; grid;
title('Histogram kvadrata volatilnosti');
xlabel('kvadrat volatilnosti'); ylabel('br. uzoraka')
hist (sigma2_s,br_podela_hist);
```

A.5 Generisanje vrednosti cena akcija i call opcije

```
%===================================================
% Generisanje vektora cena akcija i call opcije.
%===================================================

%===================================================
%Inicijalizacija
%===================================================
clear; clc;

%===================================================
%Formiranje vektora cena akcija
%===================================================
load ('podaci.mat');
s0=1;
s=s0*exp(y);

%===================================================
%Formiranje vektora opcija.
%===================================================
load ('podaci2.mat');
K=1; r=0.05; t=1; sigma=1;
[call, put]=blsprice(s,1,0.05,1,1);
call_g=call+greska_c;

%===================================================
%Snimanje podataka u datoteku.
%===================================================
save('podaci3.mat', 's', 'call_g', 'call','put');
```

A.6 Generisanje greške cena call opcije

```
%===================================================
% Generisanje vektora greske odredjivanja cene call opcije
%===================================================

%===================================================
%Inicijalizacija
%===================================================
clear; clc;
 %===================================================
%Generisanje vektora greske odredjivanja cene call opcije uz testiranje
%hipoteze da je raspodela zaista Gauss-ova sa zadatim parametrima
%===================================================
sigma_c2 = 1; n=100;
indikator=0;
brojac=0;
```

```
while indikator==0
   greska_c = normrnd(0,sqrt(sigma_c2),n,1);
   r=8;
   [N,x]=hist(greska_c,r);
   pom=(x(2)-x(1))/2;
   granice(1)=x(1)-pom;
   for i=2:r+1
      granice(i)=x(1)-pom+2*(i-1)*pom;
      p(i-1)=normcdf(granice(i),0, sqrt(sigma_c2))-normcdf(granice(i-1),0,
               sqrt(sigma_c2));
   end;
   hi_2=sum(((N-n*p).^2)./N);
   if hi_2<=1.239
      indikator=1;
   end;
   brojac=brojac+1;
end;

hist_rasp=N/(2*pom*n);
for i=1:n
   funk_rasp(i)=i/n;
end;

sigma_c2_mmv=std(greska_c)^2;

save ('podaci2.mat', 'greska_c', 'sigma_c2', 'sigma_c2_mmv');

%=================================================
%Crtanje grafika
%=================================================
figure (1);

subplot (3,1,1);
hold on; grid;
hist (greska_c,8);
title('Histogram raspodele greske');
xlabel('greska');

subplot (3,1,2);
hold on; grid;
plot (x,hist_rasp,'ro');
ezplot('(1/sqrt((2*pi)))*exp((-(x)^2)/2)',[-3.5,3.5]);
title('Funkcija gustine verovatnoce greske');
xlabel('greska');
legend('Stvarno','Ocekivano')

subplot (3,1,3);
hold on; grid;
plot (sort(greska_c), funk_rasp,'r');
```

```
ezplot('(1+erf(x/2))/2',[-3.5,3.5]);
title('Funkcija raspodele greske');
xlabel('greska');
legend('Stvarno','Ocekivano')
```

A.7 Ocena vrednosti parametara u modelu cena akcija i opcija po Black-Scholes-ovoj formuli

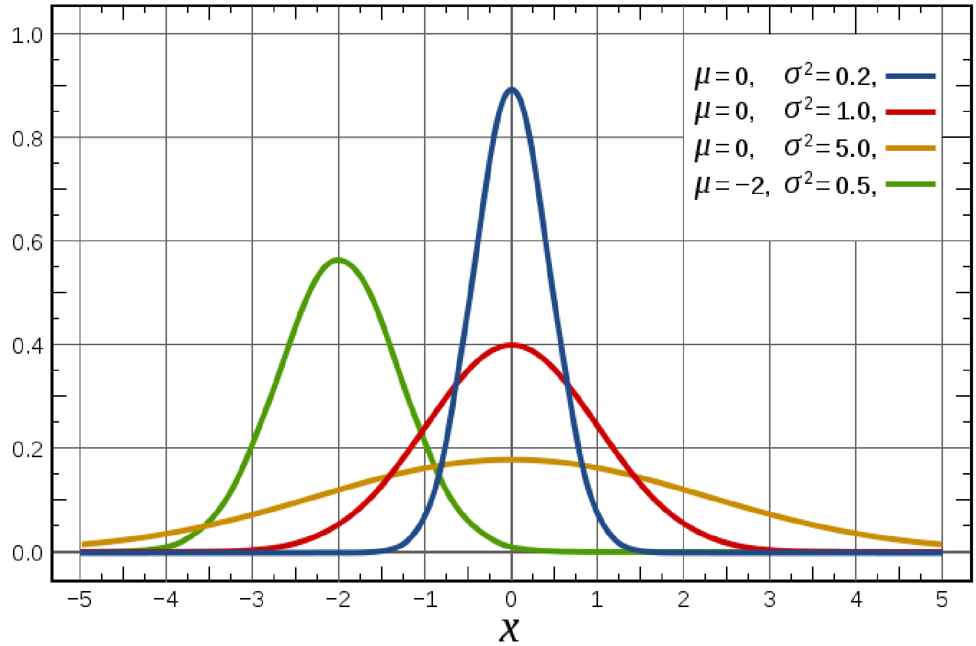
```
%================================================
% Ocena parametara modela cena akcija i opcija na finansijskom trzistu
% (ocekivani obrt , kvadrat volatilnosti i varijansa greske) prema Black-
% Scholes-ovom modelu
%================================================

%================================================
% Inicijalizacija i ucitavanje neophodnih podataka;
%================================================
clear; clc;
load ('podaci.mat'); load ('podaci2.mat'); load ('podaci3.mat');
acceptance_counter=0;
rejection_counter=0;

%===============================================
% Usvajanje inicijalnih parametara apriornih raspodela ocekivanog obrta,
% kvadrata volatilnosti i varijanse greske cene call opcija.
%===============================================
mi_a(1) = 2;  sigma2_a(1) = 10; % ocekivani obrt
a_c(1) = 1;  b_c(1) = 2;            % varijansa greske
mi = 5; sigma = 25;                   % predlozena raspodela za kvadrat vol.
mi_s(1) = 1; sigma2_s(1) = 1; greska_c_s(1)=2;

%===============================================
%Usvajanje ukupnog broja uzoraka, broja prvih uzoraka koji ce biti
%odbaceni.i broja podela histograma
%===============================================
br_uzoraka =10000;  br_odb_uzoraka = round(0.5*br_uzoraka);
br_podela_hist=15;

%===============================================
%Uzimanje uzoraka i formiranje Markov-skih lanaca
%===============================================
for i=2:br_uzoraka

  %Uzimanje uzoraka za obrt
  sigma2_a (i)= ((sigma2_a(i-1)*sigma2_s(i-1))/(sigma2_a(i-
                    1)*n+sigma2_s(i-1)));
  mi_a (i)= ((sigma2_s(i-1)*mi_a(i-1)+sigma2_a(i-1)*sum(y))/(sigma2_s(i-
              1)+n*sigma2_a(i-1)));
  mi_s(i) = normrnd(mi_a(i),sqrt(sigma2_a(i)));
```

```
 %Uzimanje uzoraka za varijansu greske
 a_c(i) = a_c(i-1)+n/2;
 b_c(i) = b_c(i-1)+sum(greska_c.^2)/2;
 greska_c_s(i) = 1/gamrnd(a_c(i),1/b_c(i));

 %Uzimanje uzoraka za kvadrat volatilnosti (Metropolis-Hastings)
 flag=0;
 while flag==0
    kandidat(i)=mi+sigma^2*randn;
    if kandidat(i)>0
       flag=1;
    end;
 end;

 [call_1, put_1]=blsprice(s,1,0.05,1,sigma2_s(i-1));
 [call_2, put_2]=blsprice(s,1,0.05,1,kandidat(i));

 for j=1:n
     a1(j)=(exp(-(call_g(j)-call_2(j))^2/(2*greska_c_s(i)))*exp(-(y(j)-
           mi_a(i))^2/(2*kandidat(i))))/(exp(-(call_g(j)-call_1(j))^2/
           (2*greska_c_s(i)))*exp(-(y(j)-mi_a(i)).^2/(2*sigma2_s(i-1))));
 end;
 a2(i)= gauss_bell_curve(sigma2_s(i-1),1,1)/gauss_bell_curve
          (kandidat(i),1,1);
 a(i)=prod(a1)*a2(i);

 if a(i)>=1
   sigma2_s(i)=kandidat(i);
   acceptance_counter=acceptance_counter+1;
    else
    a_help=rand;
    if a(i)>a_help
       sigma2_s(i)=kandidat(i);
       acceptance_counter=acceptance_counter+1;
    else
    sigma2_s(i)=sigma2_s(i-1);
    rejection_counter=rejection_counter+1;
    end;
 end;

end

%=============================================
%Odbacivanje prvih uzoraka i ocena parametara
%=============================================
mi_s = mi_s(br_odb_uzoraka+1:br_uzoraka);
greska_c_s=greska_c_s(br_odb_uzoraka+1:br_uzoraka);
sigma2_s = sigma2_s(br_odb_uzoraka+1:br_uzoraka);
```

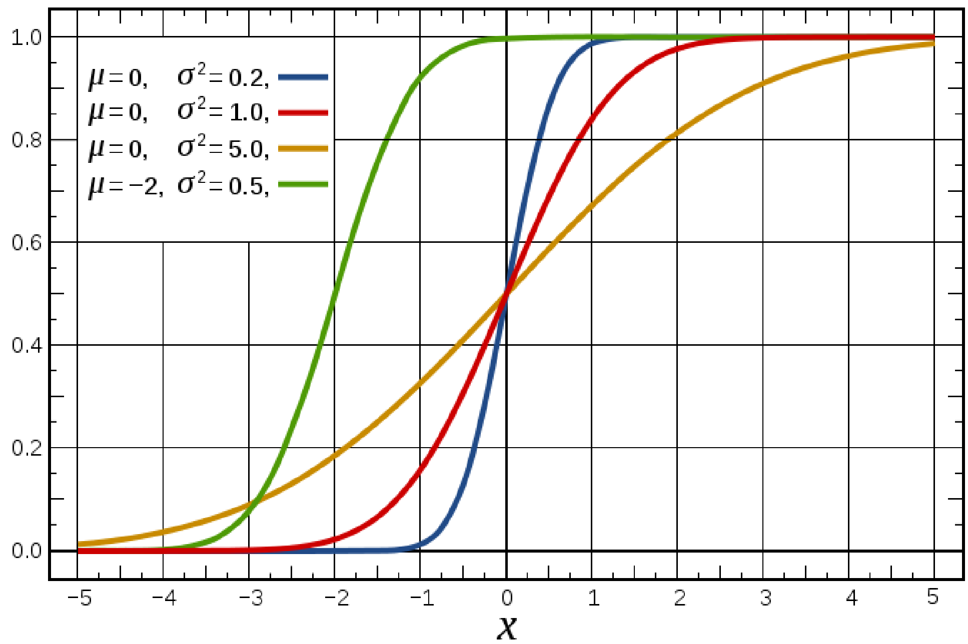
```
[mi_help1, mi_help2]=hist(mi_s,br_podela_hist);
[mi_help3,indeks_ocene_mi]=max(mi_help1);
mi_ocena=mi_help2(indeks_ocene_mi);

[greska_c_help1, greska_c_help2]=hist(greska_c_s,br_podela_hist);
[greska_c_help3,indeks_ocene_greska_c]=max(greska_c_help1);
greska_c_ocena=greska_c_help2(indeks_ocene_greska_c);

[sigma2_help1, sigma2_help2]=hist(sigma2_s,br_podela_hist);
[sigma2_help3,indeks_ocene_sigma2]=max(sigma2_help1);
sigma2_ocena=sigma2_help2(indeks_ocene_sigma2);

%================================================
%Crtanje grafika
%================================================
figure (1);

subplot (3,1,1);
hold on; grid;
title('Histogram obrta');
xlabel('obrt'); ylabel('br. uzoraka')
hist (mi_s,br_podela_hist);

subplot (3,1,2);
hold on; grid;
title('Histogram kvadrata volatilnosti');
xlabel('kvadrat volatilnosti'); ylabel('br. uzoraka')
hist (sigma2_s,br_podela_hist);

subplot (3,1,3);
hold on; grid;
title('Histogram varijanse greske cene call opcije');
xlabel('varijansa greske'); ylabel('br. uzoraka')
hist (greska_c_s,br_podela_hist);
```

Prilog B: Grafički prikazi nekih rapodela

B.1 Gauss-ova raspodela

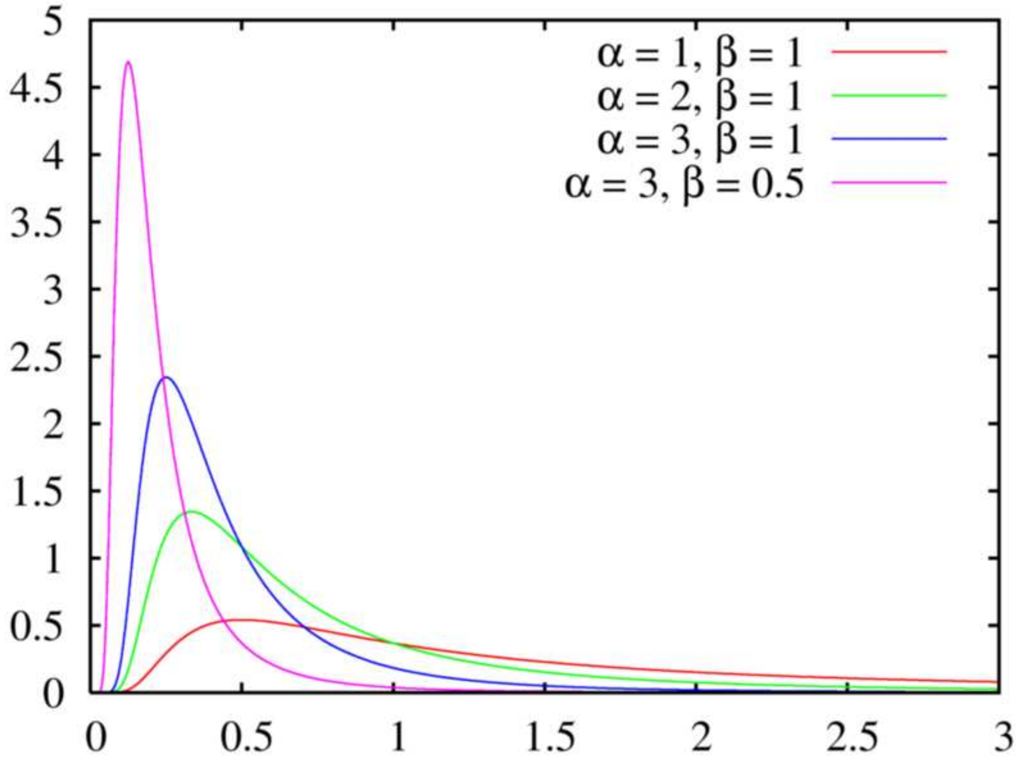


Funkcija gustine verovatnoće

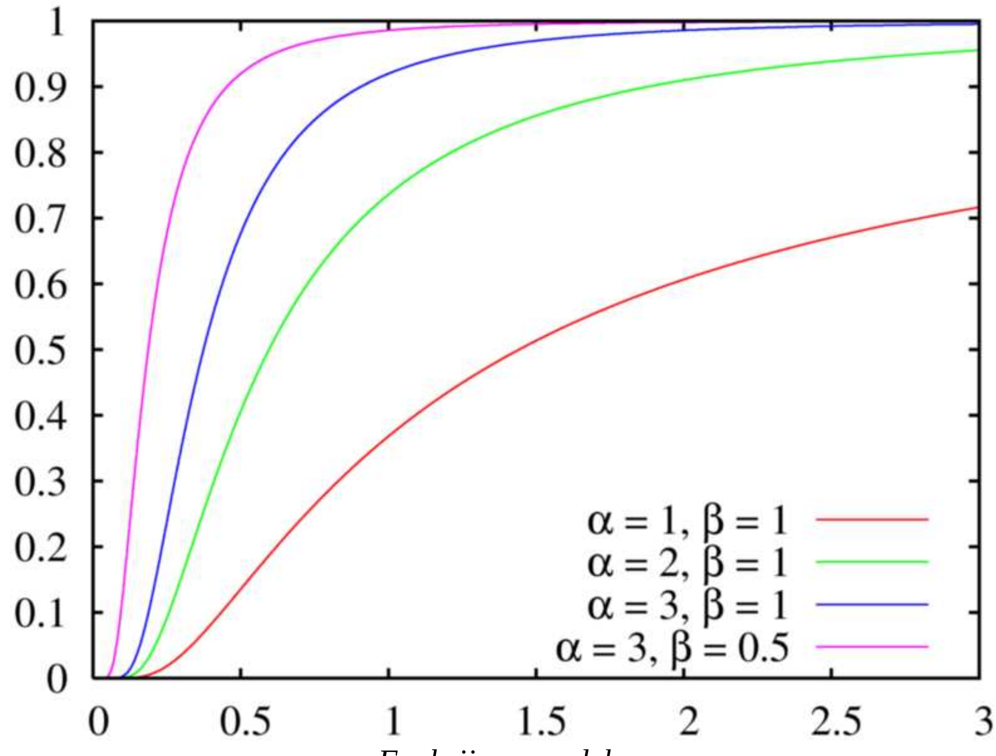


Funkcija raspodele

B.2 Inverzna gama raspodela



Funkcija gustine verovatnoće



Funkcija raspodele

Registar pojmova

Registar imena

L'Hospital, Guillaume de (Guillaume de l'Hôpital) [6], (1661-1704) Francuski matematičar. Njegovo ime je vezano za l'Hospital-ovo pravilo koje se koristi za određivanje graničnih vrednosti oblika 0/0 i ∞/∞.

Markov, Andrey Andreyevich (Андрей Андреевич Марков) [1, 17, 18, 19, 20, 21, 27, 28, 50], (1856-1922), Ruski matematičar. Poznat je po svom radu na teoriji slučajnih procesa. Teorija koja je nastala kao posledica njegovih istraživanja danas se naziva teorija Markov-skih lanaca.

Merton, Robert Carhart [36] (rođ. 1944.), Američki ekonomista i univerzitetski profesor. Dobitnik Nobel-ove nagrade za ekonomiju.

Metropolis, Nicholas Constantine [29, 30, 47, 50], (1915-1999) Američki fizičar. Tokom 50-tih godina 20. veka, grupa naučnika koje je predvodio, razvila je Monte-Carlo metode.

Neumann, John von (Neumann János) [23], (1903-1957) Američki matematičar Mađarskog porekla. Značajno je doprineo razvoju teorije skupova, funkcionalne analize, kvantne mehanike, ergodičke teorije, statistike, teorije igara i dr.

Poisson, Siméon Denis [17], (1781-1840) Francuski matematičar, geometar i fizičar. Objavio više od tri stotine matematičkih radova, uglavnom iz oblasti primenjene matematike i matematičke fizike.

Scholes, Myron [1, 33, 36, 46, 50], (rođ. 1941.) Američki ekonomista Kanadskog porekla. Jedan od autora Black-Scholes-ove jednačine. Dobitnik Nobel-ove nagrade za ekonomiju 1997. god.

Sturges, Herbert A. [1], Američki statitsičar. U svom radu "The choice of a class interval," Journal of American Statisticians Association, vol. 21, 65-66, 1926 predložio način za izbor broja podela histograma.

Ulam, Stanislaw Marcin (Stanisław Marcin Ulam) [23], (1909-1984) Američki matematičar Poljsko-Jevrejskog porekla. Učestovao je u projektu Manhattan. Razvio je mnogobrojne matematičke alate u teoriji brojeva, teoriji skupova, ergodičkoj teoriji i algebarskoj topologiji.

Wiener, Norbert [16], (1894-1964) Američki matematičar. Proučavao je stohastičke procese i šum i doprineo razvoju elektronike, elektronskih komunikacija i upravljačkih sistema.

Literatura

[1] Michael Johannes, Nicholas Polson, *MCMC Methods for Continuous/Time Financial Econometrics*, Columbia University, University of Chicago, 2003.

[2] Milan Merkle, *Verovatnoća i statistika za inženjere i studente tehnike*, Akademska misao, 2002.

[3] K. Dietz, M. Gail, K. Krickeberg, J. Samet, A. Tsiatis, *Statistics for Biology and Health*, Springer , 2002.

[4] Casella G., E. I. George, *Explaining the Gibbs Sampler*, The American Statistician, Vol. 46, No. 3. (Aug., 1992), pp. 167-174

[5] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I*, Springer, 2004.

[6] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer, 2004.

[7] Ethier S. N., Kurtz T. G., *Markov Processes Characterization and Convergence*, Wiley, 2005

[8] Svetlozar T. Rachev, John S. J. Hsu, Biliana S. Bagasheva, Frank J. Fabozzi, *Bayesian Methods in Finance*, Wiley, 2008

[9] Koralov L.B., Sinai Y.G., *Theory of Probability and Random Processes*, Springer, 2007

[10] Samuel Karlin, Howard M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press Inc. 1975.

[11] D. J.White, *Markov Decission Processes*, John Wiley & Sons, 1993

[12] www.wikipedia.org

[13] www.investopedia.org