Milan Merkle

M A T E M A T I K A III

(radni naslov)

Verzija 0 (1999-2003), novembar 2015

Sadržaj:

- Analitička geometrija
- Funkcije više promenljivih
- Integrali (krivolinijski, višetruki, površinski)
- Kompleksna analiza
- Fourierovi redovi
- Laplaceova i Fourierova transformacija

...

Napomena. Ovo je nedovršena radna verzija teksta koji je namenjen studentima tehničkih fakulteta. Nedostaju slike, za koje je samo ostavljeno mesto, a i mnogi delovi teksta za koje je samo napisan naslov. Najkompletniji su delovi iz funkcija više promenljivih i kompleksne analize. Veoma je verovatno da tekst osim grešaka u "kucanju" sadrži i greške materijalne prirode.

Verzija 0, pisana 1999-2003, postavljena novembra 2015

—-

Glava 1

Analitička geometrija

Tema ove glave su vektori i analitička geometrija, klasične oblasti matematike, koje u naše vreme nalaze nove i interesantne primene u računarskoj grafici.

1.1 Vektori

1.1.1 Osnovni pojmovi

Smatrajući da je čitalac već upoznat sa osnovnim geometrijskim činjenicama, kao i da zna definiciju vektorskih prostora, ovde dajemo samo kratak pregled osnovnih pojmova vezanih za algebru trodimenzionalnih vektora.

• Neka su A i B dve tačke u prostoru. Duž AB može biti orijentisana na dva načina: od A ka B ili obrnuto, od B ka A. Orijentisana duž se zove **vektor**. Oznaka za vektor orijentisan od A ka B je $\vec{AB}$. Tačka A je njegova početna, a tačka B krajnja tačka. Orijentacijom je određen smer vektora, a pravac je određen pravom kojoj pripada duž AB (ova prava zove se nosač vektora). Prema tome, vektor je određen ako se zna njegova početna tačka, pravac, smer i dužina (**modul vektora**). Ovako definisani vektori se nazivaju vektorima **vezanim za tačku**.

• Vektori mogu biti i **vezani za pravu**; u tom slučaju, smatramo da su dva vektora međusobno jednaka ako imaju isti pravac, smer i modul. To je isto kao kada bismo dozvolili da vektor može da se kreće duž svog nosača.

• Vektori su **slobodni** ako se dozvoljava da se vektor može translirati (paralelno pomerati) u prostoru. To znači da su dva vektora jednaka ako čine naspramne stranice nekog paralelograma, pri čenu im se smerovi poklapaju. Ako vektore posmatramo kao slobodne, onda možemo da zamislimo da smo ih translacijom doveli u položaj da svi imaju istu početnu tačku, nazovimo je O. Onda se slobodni vektori mogu identifikovati sa svojim krajnjim tačkama, tako da postoji bijekcija između skupa slobodnih vektora i skupa tačaka prostora. U ovom odeljku ćemo smatrati da su svi vektori slobodni.

• Skup svih slobodnih vektora čini jedan vektorski prostor dimenzije 3 nad poljem skalara $\mathbf{R}$. Taj vektorski prostor ćemo označiti sa $\mathbf{R}^3$ i u njemu ćemo po potrebi identifikovati vektore sa njihovim krajnjim tačkama, smatrajući da svi počinju u istoj tački O. Nula u vektorskom prostoru $\mathbf{R}^3$ je vektor čiji je modul jednak nuli, dok pravac i smer nisu određeni. Svi ostali vektori u $\mathbf{R}^3$ imaju određen modul, pravac i smer. U vektorskom prostoru $\mathbf{R}^3$, vektor $\vec{OA}$ zove se i **vektor položaja tačke** A. Vektore ćemo označavati i masnim slovima $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, itd.

• Modul vektora $\boldsymbol{a}$ označava se sa $\|\boldsymbol{a}\|$. Drugi naziv za modul je **norma**, videti XXX (metrički pr.) Za svaki vektor $\boldsymbol{a}$ definiše se **jedinični vektor** $\boldsymbol{a}_0$ kao vektor čiji je pravac i smer isti kao pravac i smer vektora $\boldsymbol{a}$, a modul jednak jedinici.

• U vektorskom prostoru $\mathbf{R}^3$ definišu se operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom, po uobičajenim pravilima vektorske algebre, kao što je prikazano na slici 1.

• Za n vektora $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ kažemo da su **linearno zavisni** ako postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ od kojih je bar jedan različit od nule[1], tako da je

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = 0. \tag{1}$$

U suprotnom slučaju kažemo da je skup vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ linearno nezavisan.

[1] Ovaj uslov se može izraziti i kao $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$.

Slika 1. Zbir vektora i množenje vektora skalarom (zbms)

Ako su vektori linearno zavisni, onda se jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija ostalih.

• U vektorskom prostoru $\mathbf{R}^3$ svaka tri linearno nezavisna vektora $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ čine bazu tog prostora, što znači da se svaki vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ može na jedinstven način izraziti kao linearna kombinacija vektora $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Uređena trojka linearno nezavisnih vektora $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ zove se **trijedar** ili **koordinatni sistem**. Njihova zajednička početna tačka zove se koordinatni početak. Bilo koja data tri linearno nezavisna vektora mogu se urediti tako da čine trijedar desne orijentacije, kao na slici 2a). To znači da je (gledajući u smeru tačke O) vektor $\boldsymbol{b}$ desno od vektora $\boldsymbol{a}$, a vektor $\boldsymbol{c}$ je desno od $\boldsymbol{b}$.

Slika 2. a) Koordinatni sistem desne orijentacije. b) Pravougli koordinatni sistem (koos)

• Ako svaka dva različita koordinatna vektora obrazuju prav ugao, takav koordinatni sistem se zove **pravougli**. Jedinični vektori pravouglog koordinatnog sistema se označavaju sa $\boldsymbol{\imath}$, $\boldsymbol{\jmath}$, $\boldsymbol{k}$. Njihovi nosači zovu se koordinatne ose (x, y, z-osa). Koeficijenti a_1, a_2, a_3 u razlaganju

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{\imath} + a_2\boldsymbol{\jmath} + a_3\boldsymbol{k}$$

zovu se Dekartove (ili pravougle) koordinate vektora $\boldsymbol{a}$. Uobičajeno je da se vektor identifikuje sa uređenom trojkom svojih koordinata: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

• Ukoliko se vektori posmatraju u pravouglom koordinatnom sistemu $(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}, \boldsymbol{k})$, operacije sabiranja vektora i množenja sa skalarom jednostavno se izražavaju preko koordinata. Neka su dati vektori $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Tada je

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

kao i

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),$$

gde je $\lambda \in \mathbf{R}$ proizvoljan skalar.

• U Dekartovim koordinatama, modul vektora $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ izražava se kao

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

a jedinični vektor koji odgovara datom vektoru $\boldsymbol{a} \neq 0$ je

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{\|a\|} \cdot \boldsymbol{a}.$$

• Za vektore kažemo da su **kolinearni** ako pripadaju istoj pravoj, ili su paralelni. Dva vektora su kolinearna ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate proporcionalne.

Za vektore kažemo da su **komplanarni** ako pripadaju istoj ravni ili se translacijom mogu dovesti u istu ravan. Svaka dva vektora su komplanarna. Svaka dva nekolinearna vektora sa početkom u datoj tački određuju jednu ravan. Tri i više vektora su komplanarna ako i samo ako su linearno zavisna.

• Ugao između nekolinearnih vektora $\boldsymbol{a}$i $\boldsymbol{b}$definiše se kao ugao između njihovih orijentisanih nosača u ravni koju oni određuju. Ugao između vektora je u intervalu $[0, \pi]$. Videti sliku 3.

Ugao između kolinearnih vektora je 0 ili π, u zavisnosti od toga da li su istog smera ili suprotnih smerova. Ako je ugao između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ jednak $\pi/2$, kaže se da su vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ **ortogonalni**.

Slika 3. Ugao između vektora (sugao)

• Skup svih vektora u jednoj ravni ravni koja sadrži nulu, obrazuje vektorski prostor dimenzije 2, u oznaci $\mathbf{R}^2$.

• Skup svih vektora na jednoj pravoj koja sadrži nulu, obrazuje vektorski prostor dimenzije 1, u oznaci $\mathbf{R}^1$ ili $\mathbf{R}$.

1.1.2 Skalarni proizvod

Za date vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ definišemo skalarni proizvod $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ pomoću jednakosti

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \cos\varphi, \tag{2}$$

gde je φ ugao između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Skalarni proizvod se može označavati i kao $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Iz definicije možemo zaključiti da je $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ samo ako je jedan od vektora jednak nuli ili je ugao između njih jednak $\pi/2$. Odavde izvodimo sledeće važno svojstvo skalarnog proizvoda.

Uslov ortogonalnosti: Ne-nula vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ ortogonalni su ako i samo ako je $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$.

Ako je ugao između vektora jednak nuli (tj. ako su paralelni i istog smera), onda je skalarni proizvod jednak proizvodu njihovih modula. U posebnom slučaju, skalarni proizvod vektora sa samim sobom jednak je kvadratu njegovog modula:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|^2.$$

Izraz $\|\boldsymbol{b}\| \cdot \cos\varphi$ jednaka je dužini ortogonalne projekcije duži OB na pravu OA (videti sliku 4. Ako ovu dužinu označimo sa $P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})$, skalarni proizvod se može napisati u obliku

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \cdot P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}). \tag{3}$$

Slika 4. Ortogonalna projekcija (proj)

Očigledno je da je skalarni proizvod komutativna operacija:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle. \tag{4}$$

Osim toga, može se dokazati (videti zadatak 6) da važi distributivnost skalarnog množenja u odnosu na sabiranje:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle. \tag{5}$$

Da bismo izveli izraz za skalarni proizvod u koordinatama, primetimo najpre da zbog ortogonalnosti koordinatnih vektora važi da je

$$\langle \boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \rangle = \langle \boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{k} \rangle = \langle \boldsymbol{\jmath}, \boldsymbol{k} \rangle = 0,$$

dok je

$$\langle \boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\imath} \rangle = \langle \boldsymbol{\jmath}, \boldsymbol{\jmath} \rangle = \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \rangle = 1.$$

Odavde, koristeći osobinu distributivnosti, nalazimo da je

$$\boxed{(6) \qquad \langle a_1\boldsymbol{\imath} + a_2\boldsymbol{\jmath} + a_3\boldsymbol{k}, b_1\boldsymbol{\imath} + b_2\boldsymbol{\jmath} + b_3\boldsymbol{k} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.}$$

Primetimo da definicioni izraz (2) za skalarni proizvod ne zavisi od koordinatnog sistema. To znači da pri prelasku na drugi pravougli koordinatni sistem, brojna vrednost izraza sa desne strane u (6) ostaje nepromenjena. Drugim rečima, ako su (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) koordinate vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u nekom pravouglom koordinatnom sistemu, i ako su (a'_1, a'_2, a'_3), (b'_1, b'_2, b'_3) koordinate istih vektora u nekom drugom koordinatnom sistemu, onda je

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a'_1b'_1 + a'_2b'_2 + a'_3b'_3.$$

Zadaci

1. Naći skalarni proizvod $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, gde je $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$; $\boldsymbol{b} = (-3, 1, 2)$.

2. Naći ugao između vektora $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$ i $\boldsymbol{b} = (1, 0, 1)$.

3. Naći koeficijente α, β, γ u razvoju

$$\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c},$$

gde su $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ dati linearno nezavisni vektori.

4. Naći sve vektore $\boldsymbol{x}$ za koje je $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = \beta$, gde je $\boldsymbol{a}$ dati vektor, a β dati skalar.

5. Rešiti jednačinu po $\boldsymbol{x}$:

$$\alpha\boldsymbol{x} + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}.$$

6. a) Dokazati osobinu aditivnosti ortogonalne projekcije:

$$P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) + P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{c}).$$

b) Koristeći se rezultatom izdvedenim pod a), dokazati osobinu (5) distributivnosti skalarnog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora.

7. Naći jedinični vektor $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ koji je normalan na vektorima $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$ i $\boldsymbol{b} = (2, 1, 3)$.

1.1.3 Vektorski proizvod

Vektorski proizvod vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ koji je određen na sledeći način:

- Modul vektora $\boldsymbol{c}$ je određen sa

$$\|\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \sin\varphi,$$

  gde je φ ugao između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

- Nosač vektora $\boldsymbol{c}$ je prava normalna na ravni određenu vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

- Smer vektora $\boldsymbol{c}$ određuje se tako da $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ bude trijedar desne orijentacije.

Slika 5. Vektorski proizvod (vekpro)

Iz definicionog izraza vidimo da je modul vektorskog proizvoda ustvari jednak površini paralelepipeda konstruisanog nad vektorima. Ova površina je jednaka nuli samo ako su vektori kolinearni. Prema tome, imamo sledeći kriterijum kolinearnosti vektora:

Uslov kolinearnosti: Ne-nula vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ kolinearni su ako i samo ako je $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$.

Iz definicije se jednostavno dobija da je

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

Takođe važi i osobina distributivnosti vektorskog proizvoda u odnosu na sabiranje vektora:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}.$$

$\times$	$\boldsymbol{\imath}$	$\boldsymbol{\jmath}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{\imath}$	0	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{\jmath}$
$\boldsymbol{\jmath}$	$-\boldsymbol{k}$	0	$\boldsymbol{\imath}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\jmath}$	$-\boldsymbol{\imath}$	0

Nije teško videti da važi „tablica množenja” kao u tabeli. Odavde se može dobiti izraz za vektorski proizvod preko koordinata. Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dati vektori, $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{\imath} + a_2\boldsymbol{\jmath} + a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{\imath} + b_2\boldsymbol{\jmath} + b_3\boldsymbol{k}$. Tada je, prema tablici, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\imath}(a_2b_3 - a_3b_2) + \boldsymbol{\jmath}(a_3b_1 - a_1b_3) + \boldsymbol{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$, što se može zapisati i u obliku determinante:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{\jmath} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Zadaci

8. Naći vektorski proizvod $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, gde je $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ i $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1)$.

9. Dati su ne-nula vektori $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Polazeći od izraza za vektorski proizvod u koordinatama, dokazati da je $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ ako i samo ako postoji konstanta $k \neq 0$ takva da je $a_i = kb_i$, $i = 1, 2, 3$.

10. (Ponovo zadatak 7). Primenom vektorskog proizvoda naći jedan vektor koji je normalan na vektorima $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$ i $\boldsymbol{b} = (2, 1, 3)$. Zatim naći jedinični vektor koji ispunjava iste uslove.

11. Date su tačke $A(1, 2, 3)$, $B(1, 1, 4)$, $C(3, 1, 7)$. Primenom vektorskog proizvoda naći površinu trougla ABC.

12. Naći sve vektore $\boldsymbol{x}$ za koje važi da je $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gde su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dati vektori. Da li zadatak ima rešenja za proizvoljne vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$?

1.1.4 Mešoviti proizvod

Za tri data vektora $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, bc$, mešoviti proizvod, u oznaci $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ je skalarna veličina definisana sa

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle.$$

Prema definiciji skalarnog proizvoda, imamo da je

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\| \cdot \cos \varphi,$$

gde je φ ugao između vektora $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ i vektora $\boldsymbol{c}$. Pretpostavljajući da su vektori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, nekomplanarni, moguće je konstruisati paralelopiped nad ovim vektorima kao stranicama (videti sliku 6).

Koristeći se definicijom vektorskog i skalarnog proizvoda, nije teško pokazati da je zapremina V ovog paralelepipeda jednaka

$$V = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|.$$

Ako je ova zapremina jednaka nuli, to znači da su vektori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ komplanarni. Prema tome, važi

Uslov komplanarnosti: Vektori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ komplanarni su ako i samo ako je $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 0$.

Slika 6. (parlpd)

Iz ove geometrijske interpretacije izlazi da apsolutna vrednost mešovitog proizvoda ostaje ista pri proizvoljnoj permutaciji vektora (jer je paralelepided isti). Jedino što se može promeniti jeste znak.

Polazeći od izraza za vektorski i skalarni proizvod u koordinatama, može se dobiti sledeća korisna formula:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Iz (7) i osobina determinanti, zaključujemo da pri permutaciji vektora vav ze sledeća pravila:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] = -[bb, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = -[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] \tag{8}$$

Zadaci

13. Dokazati da je zapremina paralelepideda na slici 6 jednaka $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|$.

14. Dokazati formulu (7).

15. Dokazati formulu (8).

16. U pravouglom koordinatnom sistemu dati su vektori $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3), \boldsymbol{b} = (-1, 0, 2), \boldsymbol{c} = (x, 2, 1)$. Odrediti x tako da dati vektori budu komplanarni.

17. Date su tačke $V(0, 0, 1)$, $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(0, 1, 0$. Primenom mešovitog proizvoda, naći zapreminu piramide $VABC$.

1.1.5 Dvostruki vektorski proizvod

Sa vektorima $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, možemo formirati dvostruki vektorski proizvod

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

Ako su vektori $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ kolinearni, onda je $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = 0$, pa je i $\mathbf{v} = 0$. Ako $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ nisu kolinearni, vektor $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ je normalan na ravan π koju određuju vektori $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$, a vektor $\mathbf{v}$ pripada toj ravni (jer je normalan na vektor $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$). Prema tome, vektor $\mathbf{v}$ može se izraziti kao linearna kombinacija vektra $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$. Može se dokazati (videti zadatak 20) da je

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{c}.$$

Zadaci

18. Naći koordinate vektora $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, gde je $\boldsymbol{a} = (1,2,3), \boldsymbol{b} = (1,2,0), \boldsymbol{c} = (3,4,0)$.

19. Ako su $\boldsymbol{a}$ i$\boldsymbol{b}$ dati vektori, naći sve vektore $\boldsymbol{x}$ takve da je $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}) = 0$.

20. **a)** Dokazati da je

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2$$

b) Naći koeficijente β i γ u razvoju

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \beta \cdot \boldsymbol{b} + \gamma \times \boldsymbol{c}.$$

c) Naći koeficijente u razvoju

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \beta \cdot \boldsymbol{b} + \gamma \cdot \boldsymbol{c}.$$

1.2 Ravan i prava u prostoru

1.2.1 Ravan

Iz geometrije znamo da je ravan određena sa tri tačke. Međutim, u analitičkoj geometriji najopštija jednačina ravni se izvodi iz činjenice da je ravan određena svojom normalom i jednom tačkom koju sadrži.

• **Vektor normale i jedna tačka.** Neka je data tačka $M(x_0, y_0, z_0)$ i vektor $\mathbf{n}(A, B, C)$. Označimo sa π ravan koja sadrži tačku M i normalna je na vektor $\mathbf{n}$. Iz geometrijskih činjenica sleduje da tačka (x, y, z) pripada ravni π, ako i samo ako su vektori $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ i $\mathbf{n}$ ortogonalni. Prema tome,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{9}$$

Ovo je jednačina ravni π, odnosno uslov koji zadovoljava svaka tačka $(x, y, z) \in \pi$.

• **Opšta jednačina ravni.** Jednačina (9) može se napisati u obliku

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{10}$$

Ovo je tzv. opšta (ili kanonska) jednačina ravni. Ako je ravan zadata jednačinom (10), onda je (A, B, C) vektor normale, a jedna tačka na ravni može se dobiti tako što se, na primer (pod uslovom $C \neq 0$) u jednačini (10) stavi da je $x = y = 0$, odakle je $z = -D/C$, pa je jedna tačka u ravni $(0, 0, -D/C)$. Svaka jednačina oblika (10), gde je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, određuje jednu ravan. Međutim, , koeficijenti u jednačini ravni nisu jedinstveno određeni, jer se mogu množiti ili deliti proizvoljnim realnim brojem koji nije nula. Na primer, jednačinama $x+2y+3z+4 = 0$ i $2x+4y+6z+8 = 0$ definisana je ista ravan. Opšta jednačina ravni se stoga može uvek napisati u obliku u kome je jedan od koeficijenata jednak 1, pa praktično za određivanje ravni treba naći samo tri koeficijenta.

• **Dve tačke i jedan vektor.** Ravan može biti određena sa svoje dve tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ i vektorom $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ koji pripada (ili je paralelan) ravni, a nije kolinearan sa vektorom $\overrightarrow{M_1M_2}$. Ako je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka te ravni, onda su vektori $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{M_2M_1}$ i $\boldsymbol{a}$ komplanarni, pa je

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ovo je jednačina tražene ravni. Razvijanjem determinante ova se jednačina može dovesti na oblik (10).

• **Tri nekolinearne tačke.** Na kraju, ravan je određena sa tri tačke M_1, M_2, M_3. Ako je M proizvoljna tačka u ravni, onda su $\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_3M_1}$ komplanari vektori, odakle se dobija jednačina ravni u obliku

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

• **Jednačina preko odsečaka na osama.** Ako ravan seče koordinatne ose u tačkama $x = a, y = b, z = c$, jednačina ravni može se napisati u obliku

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ovaj oblik je posebno pogodan ako ravan treba nacrtati u koordinatnom sistemu (videti sliku 7).

Napomenimo da se svaka ravan može predstaviti u bilo kom od navedenih oblika.

Rastojanje tačke od ravni

Data je ravan π svojom jednačinom $Ax+By+Cz+D = 0$ i jedna tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ van te ravni. Rastojanje tačke M_0 od ravni π se geometrijski dobija tako što se kroz tu tačku postavi prava p ortogonalna na ravan π, nađe se presečna tačka M_0' prave p i ravni π (to je projekcija tačke M_0 na ravan π), i zatim se nađe dužina duži M_0M_0'. Jednostavnije rešenje se dobija primenom osobina vektora. Uočimo proizvoljnu tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ u ravni π, kao na slici 8.

Slika 7. Ravan $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ (slrav)

Slika 8. Uz izvođenje formule za rastojanje tačke od prave (raspr)

Traženo rastojanje je tada $d = \|\vec{M_0M_1}\| \cdot \cos\varphi$. S druge strane,

$$\langle \mathbf{n}, \vec{M_0M_1}\rangle = \|\mathbf{n}\| \cdot \|\vec{M_0M_1}\| \cdot \cos\varphi = \sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot d. \tag{11}$$

Ako izrazimo skalarni proizvod preko koordinata, dobijamo da je

$$\langle \mathbf{n}, \vec{M_0M_1}\rangle = A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1) = Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1) = Ax_0+By_0+Cz_0+D, \tag{12}$$

jer je $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, s obzirom da tačka M_1 pripada ravni π. Iz (11) i (12) dobija se da je

$$\boxed{d = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.}$$

1.2.2 Prava

Prava može biti zadata sa dve tačke, ili sa jednom tačkom i jednim vektorom (**vektorom pravca prave**) ili kao presek dve ravni.

• **Tačka i vektor pravca.** Neka je data tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektor $\boldsymbol{l} = (a, b, c)$. Postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku M_0 i kolinearna je sa vektorom $\boldsymbol{l}$. Da bismo našli njenu jednačinu, posmatrajmo proizvoljnu tačku $M(x, y, z)$ na pravoj i uočimo da su vektori $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ i $\boldsymbol{l}$ kolinearni, što znači da su im odgovarajuće koordinate proporcionalne (ili da je vektorski proizvod jednak nuli). Prema tome,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{13}$$

Ovo je opšta (ili kanonska) jednačina prave u prostoru. Napomenimo da vektor pravca prave nije jedinstven, jer se može množiti sa proizvoljnim brojem različitim ¡
od nule.

• **Parametarska jednačina.** Ako se zajednička vrednost jednakosti u (13) označi sa t, dobija se sledeća parametarska jednačina prave:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{14}$$

U jednačini (13) dozvoljeno je da neki od koeficijenata a, b, c budu jednaki nuli; !
to onda znači da odgovarajuća koordinata ima nepromenljivu vrednost. Na primer, jednačinom

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{0} = \frac{z - 5}{6},$$

zadata je prava kod koje je $y = -3$, pa se ona nalazi u ravni koja je paralelna xz-ravni. Odgovarajuća parametarska jednačina ove prave je

$$x = 2t + 1, \quad y = -3, \quad z = 6t + 5, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

• **Dve tačke.** Slučaj kada je prava zadata sa dve tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ svodi se na prethodni, ako se uoči da je vektor $\vec{M_1M_2}$ kolinearan sa pravom. Prema tome, jednačina prave je

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{15}$$

• **Presek dve ravni.** Prava može biti određena i sa dve ravni koje seku:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Iz sistema jednačina (16) može se dobiti jednačina prave u kanonskom obliku (13).

Međusobni položaj dve prave

Dve prave u prostoru mogu se seći u jednoj tački, mogu se poklapati ili biti paralelne i, konačno, mogu biti mimoilazne.

Neka su $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ tačke na pravama i neka su $\boldsymbol{l}_1(a_1, b_1, c_1)$ i $\boldsymbol{l}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ njihovi vektori pravca.

Dve prave koje se seku ili su podudarne, odnosno paralelne, pripadaju istoj ravni; prema tome, vektori $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{l}_1$ i $\boldsymbol{l_2}$ su komplanarni. Prave mimoilazne ako i samo ako ovi vektori nisu komplanarni. Neka je

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{\jmath} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ako je $D_1 \neq 0$, pomenuti vektori nisu komplanarni i prave su mimoilazne. Ako je $D_1 = 0, D_2 \neq 0$, vektori su komplanarni, a vektori $\boldsymbol{l}_1$ i $\boldsymbol{l}_2$ nisu kolinearni, pa se prave seku. Ako je $D_1 = D_2 = 0$, onda se prave poklapaju ili su paralelne, u zavisnosti od toga da li tačke M_1 u M_2 pripadaju obema pracama ili ne.

Jednačina normale na pravu

Data je tačka $M(x_0, y_0, z_0)$ i prava p svojom jednačinom

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Potrebno je naći pravu koja sadrži tačku M i normalna je na pravoj p. Ovaj zadatak može da se reši tako što se konstruiše ravan π_1 koja sadrži tačku M i normalna je na p, i druga ravan π_2, koja sadrži tačku M i pravu p. Presek ove dve ravni je tražena prava. Prema ranije izvedenim formulama, jednačine ove dve ravni su

$$\pi_1 : \quad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

$$\pi_2 : \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

a presek se nalazi na uobičajeni način.

Zajednička normala za dve mimoilazne prave

Za svake dve mimoilazne prave p_1, p_2 postoji jedinstvena prava p koja seče obe prave pod pravim uglom; to je njihova zajednička normala. Neka su M_1, M_2, $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ tačke i vektori datih pravih. Neka je $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$; ovaj vektor je normalan na obe date prave. Prema tome, $\boldsymbol{l}$ je vektor pravca prave p. Ostaje još da se odredi jedna tačka na pravoj p, a to može da se uradi tako što se odredi presek ravni π koja sadrži pravu $\boldsymbol{l}_1$ i komplanarna je vektoru $\boldsymbol{l}$ (ova ravan je određena tačkom M_1 i vektorima $\boldsymbol{l}_1$ i $\boldsymbol{l}$) i prave p_2.

Slika 9. Uz izvođenje formule za rastojanje tačke do prave (rstp)

Rastojanje od tačke do prave

Data je tačka $M(x_0, y_0, z_0)$ i prava p pomoću svog vektora pravca $\boldsymbol{l}$ i jedne tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Rastojanje d tačke M do rave p jednako je dužini odsečka normale spuštene iz tačke M na pravu p (videti sliku 9). Uočimo paralelogram određen tačkama M i M_1, i vektorom $\boldsymbol{l}$. Njegova površina P jednaka je $\|l\| \cdot d$, a sa druge strane, izraženo preko vektorskog proizvoda, imamo da je $P = \|\overrightarrow{MM_1} \times l\|$. Odavde je

$$d = \frac{\|\overrightarrow{MM_1} \times l\|}{\|l\|}.$$

Rastojanje između mimoilaznih pravih

Ovo rastojanje jednako je dužini odsečka zajedničke normale, i tako se i može dobiti. Ali, jednostavnije je da primenimo osobine vektora. Ako su prave određene tačkama M_1, M_2 i vektorima pravca $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$, posmatrajmo paralelepiped čije su stranice M_1M_1, $\boldsymbol{l}_1$ i $\boldsymbol{l}_2$. Traženo rastojanje d između pravih je visina tog paralelepipeda koja odgovara osnovici definisanoj stranicama $\boldsymbol{l}_1$ i $\boldsymbol{l}_2$. Kako je površina te osnove jednaka $\|\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2\|$, zapremina paralelepipeda je $V = \|\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2\| \cdot d$. S druge strane, zapremina se može dobiti i kao $V = |[\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]|$, odakle se dobija da je

$$d = \frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2]|}{\|\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2\|}.$$

1.2.3 Uzajamni položaj dve i više ravni

Neka su date dve ravni sa svojim jednačinama

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Dve ravni mogu imati presek po jednoj pravoj, mogu se poklapati ili biti paralelne.

- Ravni se seku po jednoj pravoj ako je sistem jednačina (17) saglasan, pri čemu je rang matrice sistema jednak 2. Ovim sistemom je ujedno i određena jednačina presečne prave.

- Ravni se poklapaju ako su odgovarajući koeficijenti dve ravni proporcionalni, tj. ako postoji konstanta k takva da je $A_2 = kA_1, B_2 = kB_1, C_2 = kC_1, D_2 = kD_1$. U tom slučaju je sistem (17) saglasan, sa rangom 1.

- Ravni su paralelne i ne poklapaju se ako postoji konstanta k takva da je $A_2 = kA_1, B_2 = kB_1, C_2 = kC_1$, pri čemu je $D_2 \neq kD_1$. U ovom slučaju, sistem (17) je nesaglasan.

Posmatraćemo sada treću ravan, datu jednačinom

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \tag{18}$$

i ispitaćemo moguće položaje ove ravni u odnosu na prve dve.

- Ako sistem jednačina (17)-(18) nije saglasan, onda tri ravni nemaju zajednički presek. Dalje se može ispitati uzajamni položaj parova ravni, na isti način kao u prethodnom slučaju dve ravni.

- Sve tri ravni se seku u jednoj tački ako je sistem jednačina (17)-(18) saglasan, sa rangom 3. Koordinate prečne tačke dobijaju se kao rešenje ovog sistema.

- Ako se prve dve ravni seku po jednoj pravoj, treća ravan može takođe da sadrži ovu pravu. U tom slučaju kažemo da ravan (18) pripada **pramenu ravni** koji je određen presečnom pravom prve dve ravni. Ovo je moguće ako i samo ako je sistem (17)-(18) saglasan, sa rangom 2. Ekvivalentno, jednačina (18) je linearna kombinacija prve dve jednačine, odnosno, postoje realni brojevi α i β takvi da je

  $$A_3x+B_3y+C_3z+D_3 = \alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2).$$

  Pretpostavljajući da je treća ravan različita od prve, možemo da usvojimo da je $\alpha \neq 0$, pa deljenjem sa α, uz oznaku $\lambda = \beta/\alpha$, dobijamo jednačinu treće ravni u obliku

  $$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0. \tag{19}$$

  Jednačina (19) je opšta jednačina ravni koja pripada datom pramenu.

- Konačno, ako je sistem (17)-(18) saglasan sa rangom 1, sve tri ravni se poklapaju, i tada su im odgovarajući koeficijenti proporcionalni.

1.2.4 Zadaci

21. Naći jednačinu normale iz tačke $M(2,3,1)$ na ravan $3x+y+2z-11=0$.

22. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku $(1,2,-1)$, a komplanarna je vektorima $(1,7,0)$ i $(4,3,2)$.

23. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku $M(3,2,1)$ i pravu

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

24. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačke $M_1(2,5,1)$, $M_2(6,3,2)$, $M_3(1,1,1)$.

25. Naći jednu tačku koja pripada ravni $2x+3y+z-6=0$.

mod4b **26*.** Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačke $M_1(3,1,2)$, $M_2(4,3,5)$ i $M_3(6,7,11)$.

Rešenje. Date tačke su kolinearne, pa je determinanta iz koje se inače dobija jednačina ravni identički jednaka nuli. Zadatak ima beskonačno mnogo rešenja; to su sve ravni koje sadrže pravu kojoj pripadaju date tačke. Da bismo odredili jednačinu takvih ravni, primetimo da svaka takva ravan seče z-osu (jer z-osa nije paralelna sa pravom M_1M_2); presečna tačka $(0,0,c)$ zajedno sa tačkama M_1 i M_2 (ili bilo koje dve od date tri tačke) u potpunosti određuje ravan. Prema tome, jednačina svake ravni koja ispunjava dati uslov je

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & c-2 \end{vmatrix}=0.$$

Primedba. U navedenom rešenju ravan je određena tačkom na z-osi, čime se u jednačini ravni pojavljuje jedan slobodan parametar. Međutim, da smo uzeli proizvoljnu tačku (a,b,c) u prostoru, kojom je ravan takođe određena, jednačina bi imala tri parametra. Objasniti.

27. Napisati jednačinu ravni koja sadrži koordinatni početak i normalna je na pravoj

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+7}{4}=\frac{z+3}{1}.$$

28. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku $(3,1,1)$ i normalna je na ravnima $3x-y+2z+4=0$ i $x+2y-z+5=0$.
Uputstvo. Tražena ravan je komplanarna sa vektorima normala na date ravni.

29. Naći presek prave i ravni

30. Naći projekciju tačke $M(1,2,5)$ na ravan $\pi:\ 2x+y-z=0$.
Uputstvo. Naći presek ravni π i prave kroz M koja je normalna na π.

31. Naći projekciju tačke $M(3,2,1)$ na pravu $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{2}$.
Uputstvo. Naći presek prave i ravni kroz M koja je normalna na tu pravu.

32. Naći potreban i dovoljan uslov da prave

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{i} \quad \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{3} = \frac{z-z_0}{4}$$

pripadaju istoj ravni.

Rešenje.

Prave pripadaju istoj ravni ako i samo ako nisu mimoilazne. Prema uslovu na strani 14, to će biti ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 - 1 & z_0 - 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

33. Ispitati da li se seku prave

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{i} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} fracz - 1 - 2,$$

i ako se seku, naći tačku preseka.

Rešenje. Kako je (videti stranu 14)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{\jmath} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{\imath} + 16\boldsymbol{\jmath} + 13\boldsymbol{k} \neq 0,$$

zaključujemo da se prave seku.

Presečnu tačku dobijamo iz parametarskog oblika pravih:

$$x = 2s+1, \quad y = -3s-2, \quad z = 4s+5,$$

$$x = 3t+7, \quad y = 2t+2, \quad z = -2t+1,$$

odakle izlazi da je

$$\begin{aligned} 2s+1 &= 3t+7 \\ -3s-2 &= 2t+2 \\ 4s+5 &= -2t+1. \end{aligned} \tag{20}$$

Sistem jednačina (20) ima jedinstveno rešenje $s = 0, t = -5$, pa se smenom u jednoj od parametarskih jednačina dobija da je $x = 1, y = -2, z = 5$. Prema tome, date prave se seku u tački $M(1, -2, 5)$.

34. Odrediti projekciju prave

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}$$

na ravan $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Uputstvo. Naći ravan koja sadrži datu pravu i normalna je na datu ravan.

35. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $A(3,2,1)$ i normalna je na pravoj $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+1}{3}$.

Rešenje. Tražena prava seče datu pravu u nekoj tački $B(2t, 4t, 3t-1)$. Skalarni proizvod vektora $\vec{AB} = (2t-3, 4t-2, 3t-2)$ i vektora $(2,4,3)$ jednak je nuli, odakle je $t = \frac{20}{33}$. Time je prava AB određena.

Jednačina prave se može na drugi način dobiti i kao presek dve ravni: jedne koja sadrži tačku A i datu pravu, i druge, koja sadrži tačku A i normalna je na datoj pravoj.

36. Data je prava l_0 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ i ravan $\pi:\ x + 2y - z = 0$. Naći jednačinu prave l koja pripada ravni π, normalna je na pravoj l_0 i sadrži njihovu tačku preseka.

Uputstvo. Vektor pravca tražene prave je vektorski proizvod vektora pravca prave l_0 i vektora normale ravni π.

37. Naći pravu koja sadrži tačku $A(2,1,0)$ i preseca prave

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3} \quad \text{i} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}.$$

Uputstvo. Vektor pravca tražene prave možemo naći iz dva uslova preseka dve prave (videti stranu 14).

38. Da li je postoji prava koja seče prave

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1} \quad \text{i} \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$$

pod pravim uglom?

Rešenje. Date prave su mimoilazne, pa imaju zajedničku normalu, koja se dobija kao presek ravni $5x - 11y + 4z + 5 = 0$ i ravni $x + y = 0$.

39. Naći tačku simetričnu tački $A(2,7,1)$ u odnosu na ravan $\pi:\ x - 4y + z + 7 = 0$.

Uputstvo. Neka je p prava koja sadrži tačku A i normalna je na ravan π, i neka je $A_0(x_0, y_0, z_0)$ presečna tačka te prave sa ravni π. Ako je $A'(x', y', z')$ tačka koja je simetrična tački A u odnosu na ravan π, onda je

$$x_0 = \frac{2+x'}{2}, \quad y_0 = \frac{7+y'}{2}, \quad z_0 = \frac{1+z'}{2}.$$

Iz ovih jednakosti možemo odrediti koordinate x', y', z' tačke A'.

40. Data su dva temena trougla ABC: $A(-4,-1,2)$ i $B(3,5,-16)$. Naći treće teme C, znajući da središte stranice AC pripada y-osi, a središte stranice BC pripada ravni xz.

1.3 Krive i površi

1.3.1 Uvod

U ovom odeljku izučavaćemo razne načine predstavljanja krivih u ravni i prostoru i površi u prostoru. Upoznaćemo se sa tipičnim vrstama krivih i površi, koje imaju važnu ulogu u matematici i njenim primenama.

Pod krivom u ravni $\mathbf{R}^2$ podrazumevamo jednodimenzionalni skup tačaka, odnosno podskup $S \subset \mathbf{R}^2$ takav da postoji bijektivno preslikavanje $D \mapsto S$, gde je $D \subset \mathbf{R}$. Kaže se i da tačka koja se kreće po krivoj ima jedan **stepen slobode**, što znači da se položaj tačke na krivoj može odrediti pomoću jednog realnog parametra.

Kriva u ravni može biti zadata u eksplicitnom, implicitnom i parametarskom obliku. U eksplicitnom obliku može biti zadata kriva koja predstavlja grafik neke funkcije u pravouglom koordinatnom sistemu, tj. skup tačaka $(x, f(x))$, $x \in D$, gde je f funkcija sa domenom $D \subset \mathbf{R}$. Za razliku od funkcije, kod koje jednom x odgovara samo jedno y, kod krive to ne mora biti. Kriva u implicitnom obliku se zadaje pomoću neke relacije oblika $F(x, y) = 0$, gde je F proizvoljna funkcija dve promenljive. Kriva u ovom slučaju bi bila skup svih tačaka (x, y) za koje je $F(x, y) = 0$. Konačno, kriva u parametarskom obliku zadaje se pomoću dve jednačine $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in D$, gde je $D \subset \mathbf{R}$.

Primer 1. Kružnica sa centrom u $(0, 0)$ i poluprečnikom 1 je jedna kriva u ravni. Njen implicitan oblik je $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ovom jednačinom nije definisana funkcija, jer za jedno x imamo dva rešenja za y. Međutim, gornja polovina kružnice, na primer, može se izraziti u eksplicitnom obliku $y = \sqrt{1 - x^2}$, a donja u obliku $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Kružnica se može izraziti i u parametarskom obliku, $x = \cos t,\ y = \sin t$, gde je t ugao između pozitivnog dela x-ose i vektora (x, y).

Površ u prostoru je skup tačaka sa dva stepena slobode. Ona može biti zadata takođe u eksplicitnom obliku (na primer, $z = f(x, y)$), implicitnom ($F(x, y, z = 0)$ ili parametarskom obliku sa dva parametra ($x = x(s, t),\ y = y(s, t),\ z = z(s, t)$). Najjednostavnija površ je ravan, koja se, kao što znamo, predstavlja svojom opštom jednačinom oblika $Ax + By + Cz + D = 0$.

Kriva u prostoru je skup tačaka sa jednim stepenom slobode. U prostoru, kriva se može zadati kao presek dve površi, ili u parametarskom obliku, sa jednim parametrom.

Primer 2. Jednačine

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$$

određuju pravu sa vektorom pravca $\boldsymbol{l} = (1, 2, 3)$, koja sadrži tačku $M(1, 1, 1)$. Prava je ovde u stvari određena kao presek ravni π_1 i π_2, gde je

$$\pi_1 : \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2}, \quad \text{tj.} \quad 2x - y - 1 = 0,$$

$$\pi_2 : \quad \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}, \quad \text{tj.} \quad 3y - 2z - 1 = 0.$$

U parametarskom obliku, jednačine ove prave su

$$x = t + 1, \quad y = 2t + 1, \quad z = 3t + 1, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

1.3.2 Neke krive u ravni i u prostoru

Svaka kriva može se predstaviti u parametarskom obliku. Jednačine

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in D,$$

čine jednu **parametrizaciju** krive. Svaka kriva ima beskonačno mnogo parametrizacija, jer se uvek parametar t može zamenti sa drugim parametrom $s = g(t)$, gde je g neko bijektivno preslikavanje. Ovde ćemo u obliku primera navesti neke krive u ravni i u prostoru, i njihove uobičajene parametrizacije.

Primer 3. Posmatrajmo ponovo pravu iz primera 2, čije su parametarske jednačine

$$x = t + 1, \quad y = 2t + 1, \quad z = 3t + 1, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Za $t = 1$, dobijamo tačku $(2, 3, 4)$ na pravoj, pa je još jedna parametrizacija iste prave data sa

$$x = s + 2, \quad y = 2s + 3, \quad z = 3s + 4, \qquad -\infty < s < +\infty.$$

Ovo je isto kao da smo u prethodnoj parametrizaciji uveli smenu $s = t + 1$.

Ako se parametar ograniči na neki interval, dobija se jedan deo prave. Na primer, jednačinama

$$x = t + 1, \quad y = 2t + 1, \quad z = 3t + 1, \qquad 0 \le t < +\infty$$

definisana je poluprava sa početkom u $(1, 1, 1)$, dok je istim jednačinama ali uz ograničenje $0 \le t \le 1$ definisana duž koja spaja tačke $(1, 1, 1)$ i $(2, 3, 4)$.

Primer 4. Kanonska jednačina elipse je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gde su a i b pozitivni brojevi (poluose elipse). Elipsa ima osobinu da je zbir rastojanja svake njene tačke do dve fiksne tačke (žiže ili fokusi elipse) konstantan. Ako je $a > b$, žiže elipse su tačke na x-osi, sa koordinatama $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, a zbir rastojanja svake tačke od žiža jednak je $2a$. Tačka

Jednačina

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

takođe određuje elipsu, ali sa centrom u tački (x_0, y_0). U posebnom slučaju kada je $a = b = r$ elipsa je kružnica sa centrom u (x_0, y_0) i poluprečnikom r.

Uobičajeno je da se elipsa parametrizuje uzimajući za parametar ugao t između vektora položaja tačke na elipsi i pozitivnog dela x-ose:

$$x = x_0 + \cos t, \quad y = y_0 + \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Slika 10. Elipsa (elips)

Primer 5. Kvadratnom funkcijom

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0, \tag{21}$$

definisana je kriva koja se zove parabola. Kao što znamo, ona je konveksna ako je $a > 0$ i konkavna za $a < 0$; seče x-osu u dve tačke ako je $D = b^2 - 4ac > 0$, dodiruje je ako je $D = 0$ i nema preseka sa x-osom ako je $D < 0$.

U jednačini (21), x i y mogu da zamene mesta; tako dobijena kriva se takođe zove parabola.

Slika 11. Parabole $y = x^2 + 4x + 7$ i $x = y^2 + 2y - 1$. (parab)

Primer 6. Hiperbola je kriva čija je implicitna jednačina data sa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{22}$$

Ova kriva ima asimptote $y = \pm(b/a)x$ i seče x-osu u tačkama $\pm a$. Hiperbola je i kriva

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{23}$$

ali u drugačijem položaju; ona seče y-osu u tačkama $\pm b$.

Slika 12. Hiperbole $x^2/9 - y^2/4 = 1$ i $(y-1)^2/9 - (x-1)^2/4 = 1$, sa svojim asimptotama. (hiperb)

Kriva $xy = 1$ je takođe hiperbola, čije su asimptote koordinatne ose.

Hiperbola se može parametrizovati na dva načina. Posmatrajmo, na primer, hiperbolu u obliku (22). Polazeći od relacije $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$, odgovarajuća parametrizacija krive (22) je

$$x = \pm a \,\mathrm{ch}\, t, \quad y = b \,\mathrm{sh}\, t, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Hiperbola se može parametrizovati i pomoću trigonometrijskih funkcija:

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \,\mathrm{tg}\, t, \qquad t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2).$$

Hiperbola ima osobinu da je apsolutna vrednost razlike rastojanja njenih tačaka od dve fiksne tačke (fokusa) konstantna. Koordinate fokusa hiperbole u jednačini (23) su $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$.

Primer 7. Posmatrajmo jednu tačku M na kružnici koja rotira bez klizanja duž jedne prave. Kriva koju pri tome opisuje tačka M zove se cikloida.

Slika 13. Cikloida (ciklo)

Za parametar se može uzeti ugao t koji tačka M opiše po kružnici. Ako je početni položaj bio u koordinatnom početku, tada je (videti sliku 13):

$$x(t) = Rt - R\sin t, \quad y(t) = R - R\cos t, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Primer 8. Kriva u prostoru čije su parametarske jednačine

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \qquad -\infty < t < +\infty,$$

zove se zavojnica. Grafik je prikazan na slici 14.

Slika 14. Zavojnica (zavoj)

Primer 9. Rotacijama i translacijama krivih koje smo uveli u prethodnim primerima, dobijaju se krive čije x-y jednaˇine mogu da postanu komplikovane. Postoji teorija tzv. krivih drugog reda, iz koje proizilazi da svaka jednačina oblika

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

predstavlja prabolu, hiperbolu, elipsu, dve prave koje se seku, jednu pravu ili jednu tačku. Ne ulazeći u detalje te teorije, pokazaćemo kako se može odrediti koja kriva je zadata jednačinom

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 6y = 0.$$

Dovođenjem izraza na potpuni kvadrat, nalazimo da je

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 6y = (x+1)^2 - 1 + 4(y - 3/4)^2 - 9/4,$$

tako da se data jednačina može napisati u obliku

$$\frac{(x+1)^2}{13/4} + \frac{(y-3/4)^2}{13/16} = 1,$$

a to je jednačina elipse.

Zadaci

41. Skicirati krive u ravni i napisati njihove $x - y$ jednačine (eksplicitne ili implicitne):

a) $x = -1 + t,\ y = 2 - t,\ t \in \mathbf{R}$,

b) $x = -1 + t^2,\ y = 2 - t^2,\ t \in \mathbf{R}$,

c) $x = \cos^2 t,\ y = \sin^t,\ t \in \mathbf{R}$,

d) $x = t^2,\ y = t^3,\ t \in \mathbf{R}$,

e) $x = t^2 - 4,\ y = 1 - t,\ t \in \mathbf{R}$,

f) $x = \sin t,\ y = \cos 2t,\ t \in [0, 2\pi)$,

g) $x = \cos t,\ y = -3 + \sin t,\ t \in [0, 2\pi)$,

h) $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [0, 2\pi)$,

i) $x = 1/\cos t,\ y = \mathrm{tg}\, t,\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$

42. Parametrizovati krive:

a) $2x - 3y = 6$,

b) $x^2 = 4ay,\ a > 0$,

c) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$,

d) $x^2/9 + y^2/25 = 1,\ x \geq 3$,

e) $x^2/9 - y^2/25,\ x \leq 3$,

f) Duž koja spaja tačke $A(-1, 0, 2)$ i $B(2, 3, 3)$.

43. Nacrtati krive u prostoru zadate parametarskim jednačinama:

a) $x(t) = 2,\ y(t) = 1,\ z(t) = t,\ t \in \mathbf{R}$,

b) $x(t) = t,\ y(t) = t,\ z(t) = t,\ t \in [-1, 1]$,

c) $x(t) = 2\cos t,\ y(t) = 3\sin t,\ z(t) = 5,\ t \in [0, 2\pi)$.

1.3.3 Neke površi u prostoru

Cilindrične površi

Najjednostavnija površ u prostoru je cilindrična površ ili **cilindar**. Cilindar se obrazuje tako što se pođe od jedne krive u nekoj ravni (**direktrisa** ili **osnovica** cilindra) i jedne prave linije (**generatrisa** ili **izvodnica**). Cilindrična površ je skup tačaka pravih konstruisanih kroz svaku tačku osnovice, paralelno izvodnici. Najjednostavnija jednačina cilindra dobija se kada se koordinatni sistem postavi tako da je jedna koordinatna osa paralelna izvodnici. U tom slučaju, jednačina cilindra ima samo dve promenljive, a ne sadrži promenljivu čija je koordinatna osa paralelna izvodnici. !

Primer 10. Jednačinom

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z \in \mathbf{R},$$

određen je jedan kružni cilindar čija je osnovica kružnica u xy-ravni, a izvodnice su paralelne z-osi. Na slici 15 prikazan je ovaj cilindar, zajedno sa cilindrima

$$|z| + |y| = 1, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{i} \quad z = x^2, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Slika 15. Cilindrične površi (cili)

Rotacione površi

Rotaciona površ nastaje kada neka ravna kriva rotira oko neke fiksirane prave. Najjednostavniji oblik dobija se kada je ta prava jedna od koordinatnih osa, a kriva pripada jednoj od koordinatnih ravni. Na primer, ako oko ose y rotira kriva data jednačinom $z = f(y)$, dobiće se rotaciono telo čija svaka tačka (x, y, z) zadovoljava jednačinu $x^2 + z^2 = f^2(y)$.

Primer 11. Na slici 16 predstavljene su tri rotacione površi:

- Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ dobija se kada kriva $z = \sqrt{R^2 - y^2}$ rotira oko y-ose;
- Rotacijom krive $x = 1/z$, $z > 0$, oko z-ose, dobija se rotaciona površ $x^2+y^2 = 1/z^2$;
- Rotacijom poluprave $y = x/3$ oko x-ose dobija se rotaciona površ $y^2+z^2 = \frac{x^2}{9}$.

Slika 16. Tri rotacione površi (rotpov)

Zadaci

44. Skicirati cilindre:

a) $z^2 = 4y^2$;

b) $z = \log x$;

c) $y^2 - x^2 = 16$;

d) $y = |z|$.

45. Naći jednačine rotacione površi i skicirati je je, ako:

a) $x^2 = 4y$ rotira oko y-ose;

b) $z = e^{x^2}$ rotira oko x-ose;

c) $y^2 z = 1$ rotira oko z-ose.

46. Skicirati rotacione površi i naći jednačinu krive koja rotira:

a) $x^2 + z^2 - y^2 = 0$, $x^2 + z^2 \leq 4$;

b) $x^2 + z^2 = |y|$;

c) $x^2 + y^2 = -\log z$;

d) $z^4 - 16x^2 = 16y^2$.

Površi drugog reda

Opšta jednačina površi drugog reda glasi

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Ezx + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0.$$

U nastavku ovog odeljka ćemo, u obliku primera, uvesti neke od ovih površi, u položajima u kojima imaju jednostavne jednačine.

Primer 12. Površ zadata jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c > 0$$

zove se **elipsoid**. Iz ove jednačine izlazi da je $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ i $|z| \leq c$ (inače bi leva strana jednačine bila veća od 1). Osim toga, presek ove površi sa bilo kojom ravni (u okviru navedenih ograničenja za x, y, z) koja je paralelna nekoj od koordinatnih ravni je elipsa. Na osnovu toga se može videti da elipsoid izgleda kao na slici 17.

Primer 13. Jednostrani hiperboloid je površ zadata jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c > 0.$$

Na ovom primeru ćemo detaljno pokazati kako se površ može nacrtati na osnovu preseka.

- Preseci sa osama: Ako stavimo $x = 0, y = 0$, vidimo da površ nema preseka sa z-osom. Presek sa x-osom je u tačkama $x = \pm a$, a sa y-osom u tačkama $y = \pm b$.

Slika 17. Elipsoid (elipsd)

- Preseci sa ravnima $z = K$ su elipse, za svako $K \in \mathbf{R}$.
- Presek sa ravni $x = K$ je kriva

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{K^2}{a^2}.$$

  Za $|K| < a$ ovo je hiperbola koja seče y-osu.
  Za $|K| > a$, dobija se hiperbola koja seče z-osu.
  Ako je $K = \pm a$, ovo su dve prave $z = \pm \frac{c}{b} y$.

- Zbog simetrije, preseci sa ravni $y = K$ su iste vrste kao sa ravni $y = K$.

Slika 18. Jednostrani hiperboloid (hiperb1)

Na slici 18 predstavljena je površ jednostranog hiperboloida, zajedno sa nekim njegovim presecima. Ova površ ima zanimljivu osobinu da se može konstruisati samo od pravih linija, što se i u praksi koristi za konstrukciju objekata ovog oblika.

Primer 14. Dvostrani hiperboloid je površ zadata jednačinom

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Iz ove jednačine dobija se da je $y^2/b^2 \geq 1$, što znači da je površ razdvojena na dva dela duž y-ose, za $y < -b$ i za $y > b$. Preseci sa ravnima $x = K$ i $z = K$ su hiperbole, a preseci sa ravnima $y = K$ su elipse. Na osnovu toga, možemo zaključiti da ova površ izgleda kao na slici 19.

Slika 19. Dvostrani hiperboloid (hiperb2)

Primer 15. Konusna površ je data jednačinom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Preseci sa ravni $z = K$ su elipse ili tačka $(0,0)$ za $K = 0$, a preseci sa ravnima $x = K$ ili $y = K$ su hiperbole ili dve prave (za $K = 0$).

Slika 20. Konusna površ (konus)

Primer 16. Eliptički paraboloid je površ zadata jednačinom

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Preseci sa ravnima $z = K > 0$ su elipse, a preseci sa ravnima $x = K$ i $y = K$ su parabole.

Slika 21. Eliptički paraboloid (elparb)

Primer 17. Hiperbolički paraboloid je zadat jednačinom

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Preseci sa ravnima $z = K > 0$ su hiperbole koje seku y-osu, a za $K < 0$ to su hiperbole koje seku x-osu. Preseci sa ravnima $x = K$ ili $y = K$ su parabole. Zbog svog oblika, ova površ se zove i sedlasta površ.

Slika 22. Hiperbolički paraboloid (hiparb)

!

Naravno, u svim navedenim primerima, koordinate x, y, z mogu se proizvoljno permutovati; vrsta i oblik površi ostaju isti. Prema tome, površ oblika

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

biće elipsoid ako su svi znaci $+$, jednostrani hiperboloid ako ima jedan znak $-$ a dvostrani sa dva znaka $-$. Površ

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$$

je konus ako ima jedan ili dva znaka $-$, i tačka $(0,0,0)$ ako su svi znaci $+$ ili svi $-$. Konačno, površi obika

$$z = \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ili} \quad y = \pm\frac{z^2}{c^2} \pm \frac{x^2}{a^2} \quad \text{ili} \quad x = \pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2}$$

su paraboliodi; eliptički sa oba ista znaka, i hiperbolički sa različitim znacima.

Zadaci

47. Ispitati koja je površ zadata sledećim jednačima i skicirati je:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \leq 0$;
b) $9x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$;
c) $4x^2 - 9y^2 + 9z^2 = 36$;
d) $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$;
e) $x^2 + 5y^2 = 8z^2$;
f) $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$;
g) $x^2 + z^2 = 1$, $0 \leq y \leq 1$;
h) $z^2 = 1 - 2y + y^2$;
i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2x + 1 = 0$;
j) $x^2 + y^2 - z^2 - 4y = 0$;
k) $x^2 - y^2 + z^2 + 2y + 3 = 0$.

48. Napisati jednačinu skupa tačaka čije rastojanje do ose y je dvostruko veće od rastojanja do ravni xz. Koja je to površ?

49. Naći jednačinu cilindra čija je osnovica kriva C koja se dobija kao presek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i ravni $y + z = 0$, a izvodnica paralelna z-osi. Zatim naći projekciju krive C na ravan xy.

Rešenje. Jednačina cilindra se dobija kada se eliminiše z iz jednačina kojima se definiše kriva C: $x^2 + 2y^2 = 1$, $z \in \mathbf{R}$. Projekcija krive C na xy-ravan je presečna kriva ovog cilindra i ravni xy, tj. elipsa $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 0$.

50. Površi $z = 1 - x^2$ i $z = x^2 + y^2$ seku se po krivoj C. Naći Da li je C kriva u jednoj ravni? Naći projekciju te krive na ravan xy.

1.3.4 Krivolinijske koordinate

1.3.5 Polarne kooordinate u ravni

1.3.6 Cilindrične koordinate u prostoru

1.3.7 Sferne koordinate u prostoru

1.3.8 Parametrizacija površi u prostoru

Glava 2

Funkcije više promenljivih

U matematičkim modelima koji se koriste u fizici i tehnici, funkcije jedne promenljive nisu dovoljne za opisivanje zavisnosti između fizičkih veličina. Čak i u najjednostavnijim relacijama kao što je na primer Ohmov zakon $U = RI$ ili formula za izračunavanje pređenog puta $s = vt$, pojavljuju se funkcije više promenljivih. U ovoj glavi, pored funkcija više promenljivih, izučavamo i njima srodne jednačine krivih i površi.

2.1 Uvod

Jedan deo materijala koji izlažemo u ovoj glavi je preuzet iz $\mathcal{M}2$ i ovde je uključen radi kompletnosti.

Najpre dajemo definicije osnovnih pojmova.

- Označimo sa $\mathbf{R}^n$ skup svih uređenih n-torki realnih brojeva oblika
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x_i \in \mathbf{R}, \quad 1 \le i \le n.$$
Uvodimo konvenciju da ako $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, onda je x_i oznaka za i-tu komponentu uređene n-torke $\boldsymbol{x}$.

- Skup $\mathbf{R}^n$ čini vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{R}$, ako se uvedu operacije sabiranja i množenja skalarom na uobičajeni način:
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \qquad \alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$
Pod **vektorom** podrazumevamo svaki element $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, a x_i je **i-ta koordinata vektora $\boldsymbol{x}$**.

- Euklidska metrika, odnosno norma, na $\mathbf{R}^n$ se definišu sa
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$
Skup $\mathbf{R}^n$ sa euklidskom metrikom (normom) zove se i n-dimenzionalni euklidski metrički (normirani) prostor. Izbor euklidske metrike uslovljen je prirodnom percepcijom prostora $\mathbf{R}^3$, koji je model našeg "običnog" prostora u kome živimo i u kome važi Pitagorina teorema.

Pod **funkcijom n promenljivih** podrazumevamo preslikavanje f nekog skupa $D \subset \mathbf{R}^n$ (domena funkcije f) u skup realnih brojeva $\mathbf{R}$. Prema tome, funkcija f dodeljuje svakoj tački $\boldsymbol{x} \in D$ jednu i samo jednu vrednost $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Koordinate tačke $\boldsymbol{x} \in D$ zovu se (nezavisne) promenljive, dok se dodeljena vrednost y zove zavisna promenljiva. U fizici i tehnici, funkcije više promenljivih imaju primenu u matematičkim modelima realnih sistema.

Primer 18. NEWTONov zakon gravitacije utvrđuje izraz za silu F gravitacionog privlačenja dva tela masa m_1 i m_2 koja se nalaze na međusobnom rastojanju r:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\ , \tag{1}$$

gde je γ gravitaciona konstanta, $\gamma \approx 6.7 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$. U jednakosti (1), nezavisne promenljive su m_1, m_2 i r, a zavisna promenljiva je sila F, koja je, prema izloženom, funkcija tri nezavisne promenljive. Napomenimo da su termini

„nezavisne" i „zavisne" promenljive stvar konvencije, jer se (1) može napisati i u obliku

$$Fr^2 - \gamma m_1 m_2 = 0, \tag{2}$$

u kome su sve promenljive ravnopravne.

Primer 19. Ako se dva otpornika, otpornosti R_1 i R_2 povežu redno, efekat je isti kao da imamo jedan otpornik sa otpornošću

$$R = R_1 + R_2,$$

a ako se povežu paralelno, efektivna otpornost je

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

U opštem slučaju, ako imamo otporničku šemu sastavljenu od n otpornika sa otpornostima $R_1, \ldots, R_n$, ukupna otpornost je neka funkcija n promenljivih,

$$R = f(R_1, \ldots, R_n).$$

Primer 20. Pri određivanju domena funkcije koja je zadata analitičkim izrazom, rukovodimo se pravilima koja važe i za funkcije jedne promenljive. Ilustrovaćemo postupak na nekoliko primera.

Domen funkcije

$$f_1(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

je $\mathbf{R}^2$ bez prave $x = y$ (deljenje sa nulom nije definisano).

Funkcija

$$f_2(x, y) = \sqrt{x - y}$$

definisana je u poluravni $x \geq y$ (koren negativnog broja nije realan).

Za funkciju

$$f_3(x, y) = x^y,$$

oblast definisanosti je desna poluravan, tj. $x > 0, y \in \mathbf{R}$. Ovo je delimično konvencija, jer je vrednost x^y definisana i u nekim tačkama van ovog domena, na primer za $x \in \{-1, -2, \ldots\}, y \in \mathbf{Z}$. Međutim, jedino na navedenom domenu važi da je

$$x^y = e^{y \log x},$$

što se uklapa u opštu šemu definisanja funkcija pomoću eksponencijalne i logaritamske funkcije. □

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, funkcija više promenljivih može biti zadata eksplicitno, implicitno ili parametarski. Dok je eksplicitnom relacijom uvek zadata jedna funkcija (jednoj uređenoj n-torki vrednosti nezavisnih promenljivih dodeljuje se najviše jedna vrednost funkcije), implicitnom ili parametarskom jednačinom može biti zadata i proizvoljna kriva ili površ, odnosno u opštem slučaju neki skup tačaka u $n+1$-dimenzionalnom prostoru (jednoj uređenoj n-torki vrednosti nezavisnih promenljivih može odgovarati više vrednosti zavisne promenljive).

U eksplicitnom obliku $y = f(x_1, \dots, x_n)$ promenljive $x_1, \dots, x_n$ su nezavisne, dok je y zavisna promenljiva čija je vrednost jednoznačno određena u svakoj tački $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$. Na primer, relacijom $y = \ln(e^{x_1} + x_2)$ definisana je jedna funkcija u eksplicitnom obliku, na domenu D na kome je $e^{x_1} + x_2 > 0$.

U implicitnom obliku promenljive su simetrične, tako da zavisna promenljiva nije unapred izdvojena. Na primer, jednakošću

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{3}$$

definisan je skup tačaka jedinične sfere u prostoru. Fiksiranom paru (x, y) odgovaraju dve, jedna ili nijedna vrednost z tako da važi jednakost (3). Stoga ovom relacijom nije definisana funkcija. Ako se uzme da su x, y nezavisne promenljive u oblasti u kojoj je $x^2 + y^2 \leq 1$, onda za svaki par (x, y) postoji samo jedno $z \geq 0$ takvo da tačka (x, y, x) pripada jediničnoj sferi; na taj način je definisana funkcija $z(x, y)$, koja odgovara nenegativnom rešenju jednačine (3) po z.

Parametarski oblik se uglavnom koristi za opisivanje krivih i površi. Međutim, svaka funkcija n promenljivih se formalno može napisati i u parametarskom obliku, uvođenjem n parametara. Parametri se obično uvode sa ciljem da se pojednostave jednačine kojima je funkcija zadata.

Funkciju jedne promenljive obično predstavljamo u obliku grafika u xy-ravni. Za predstavljanje funkcije dve promenljive služimo se „grafikom” u xyz-prostoru, odnosno projekcijom ovog trodimenzionalnog objekta na papir ili ekran računara. Funkcije tri i više promenljivih ne mogu se predstaviti na analogan način, jer bi to zahtevalo geometriju prostora dimenzije veće od 3. Ipak, delimična vizuelna predstava se može ostvariti pomoću trodimenzionalnih "preseka", kao na slici 24.

Slika 23. 3D grafika. (3dgraf)

Tradicionalno se u kursevima kao što je ovaj, detaljno izučavaju uglavnom funkcije dve promenljive, i u tome ovaj udžbenik neće biti izuzetak. Razlog takvom pristupu je jednostavnost pisanja formula i geometrijska očiglednost. S druge strane, veliki broj osobina se analogno prenosi na slučaj više od dve dimenzije, tako da se ograničenjem na dve dimenzije ne gubi mnogo. Ipak, čitalac treba da

Slika 24. 4D grafika. (4dgraf)

zna da se u više dimenzija mogu pojaviti neočekivane teškoće; na neke od njih će biti upozoren u tekstu.

2.2 Granični procesi i neprekidnost

S obzirom da skup $\mathbf{R}^n$ sa euklidskom metrikom čini metrički prostor, odnosno normirani vektorski prostor sa euklidskom normom, definicija granične vrednosti se uklapa u opšti pojam granične vrednosti operatora u metričkim prostorima.

Definicija 2.1 *Neka je f funkcija koja preslikava skup $D \subset \mathbf{R}^n$ u skup realnih brojeva i neka je $\boldsymbol{a}$ tačka nagomilavanja skupa D. Kažemo da je realan broj L granična vrednost funkcije f kad $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ ako važi:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \boldsymbol{x} \in D) \quad 0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - L| < \varepsilon,$$

pri čemu je sa d označena euklidska metrika. Ako je L granična vrednost funkcije f kad $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, pišemo $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$.

Specijalno, u slučaju funkcije dve promenljive, $f(x, y) : (x, y) \in D \mapsto \mathbf{R}$ realan broj L je granična vrednost funkcije f kad $(x, y) \to (a, b)$ ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in D) \quad 0 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon,$$

gde je $D \subset \mathbf{R}^2$ domen posmatrane funkcije.

Umesto euklidske metrike, u definiciji 2.1 može se uzeti svaka metrika koja je ekvivalentna euklidskoj. Navodimo dve takve metrike

$$d_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n\}; \tag{4}$$

$$d_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \tag{5}$$

! Kakvu god metriku uzeli, definicijom 2.1 granična vrednost funkcije $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ kad $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ definiše se kao realan broj L koji ima osobinu da se u svakoj njegovoj ε-okolini nalaze slike svih tačaka neke δ-okoline tačke $\boldsymbol{a}$, izuzev eventualno slike same tačke $\boldsymbol{a}$.

Primer 21. Ako se umesto euklidske metrike na skupu $\mathbf{R}^2$ posmatra njoj ekvivalentna metrika d_m, dobija se ekvivalentna definicija granične vrednosti funkcije $f(x,y)$ kad $(x,y) \to (a,b)$:

$$\begin{aligned}&(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in D)\\ &|x-a| < \delta \ \wedge \ |y-b| < \delta \ \wedge \ (x,y) \neq (a,b) \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Sa metrikom d_s dobija se još jedna ekvivalentna definicija:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in D) \quad 0 < |x-a| + |y-b| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Umesto $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, kod funkcija dve promenljive obično se upotrebljava oznaka $\lim\limits_{\substack{x \to a\\ y \to b}} f(x,y)$.

Primer 22. Ispitajmo da li postoji

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^3}{x^3 + y^2}\ .$$

Neka je $f(x,y)$ funkcija čiji se limes traži. Ako postoji limes, recimo L, onda je i $\lim f(x_n, y_n) = L$ za svaki niz tačaka $\{(x_n, y_n)\}$ koji konvergira ka $(0,0)$. To onda znači da je $\lim f(x_n, kx_n) = L$ za svako k i za svaki niz $\{x_n\}$ takav da je $\lim x_n = 0$. Iz toga zaključujemo da je i $\lim\limits_{x\to 0} f(x, kx) = L$. Drugim rečima, limes je jednak L po svakoj pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak. Ova činjenica omogućava da se ispitaju granične vrednosti funkcija dve promenljive: Stavi se $y = kx$ i za razne vrednosti k nađe se limes tako dobijene funkcije jedne promenljive. Ako se dobijaju različite vrednosti, granična vrednost ne postoji; ako uvek dobijamo istu vrednost L, onda je to indikacija da limes postoji i da je jednak L, pa onda to pokušavamo i da dokažemo po definiciji.

U datom primeru, ako stavimo da je $y = x$, imamo da je $f(x,x) = (x^2 - x^3)/(x^3 + x^2)$ i i $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1$. Ako je, na primer, $y = 2x$, dobija se da je $f(x, 2x) = (x^2 - 8x^3)/(x^3 + 4x^2) \to 1/4$ kad $x \to 0$. Kako se po različitim pravama dobijaju različiti limesi, zaključujemo da granična vrednost funkcije $f(x,y)$ kad (x,y) teži ka $(0,0)$ ne postoji.

Primer 23. Ispitajmo graničnu vrednost

$$L = \lim_{\substack{x \to 0\\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}.$$

Nije teško videti da je granična vrednost po svim pravama $y = kx$ jednaka nuli. Ovo još nije dokaz da je i $L = 0$, ali je indikacija da je to možda tako. Proverimo da li je ispunjen uslov iz definicije. Kako je

$$|f(x,y)| = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = \frac{x^2}{|x| + |y|} + \frac{y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{x^2}{|x|} + \frac{y^2}{|y|} = |x| + |y|,$$

važi implikacija

$$d_s((x,y),(0,0)) = |x| + |y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon,$$

odakle sleduje da je $L = 0$.

Primer 24. Odredimo

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin|xy|}{|x|+|y|}.$$

Jednostavnim transformacijama dobijamo

$$\frac{\sin|xy|}{|x|+|y|} = \frac{\sin|xy|}{|xy|} \cdot \frac{|xy|}{|x|+|y|} = \frac{\sin|xy|}{|xy|} \cdot \frac{1}{\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}}.$$

Prema poznatim rezultatima iz funkcija jedne promenljive, prvi faktor ima graničnu vrednost 1, a drugi teži ka nuli, pa je i tražena granična vrednost jednaka nuli. □

Ako se granična vrednost definiše pomoću okolina (videti primedbu iza definicije 2.1), onda nije teško definisati graničnu vrednost funkcije u slučaju da neke (ili sve) kordinate teže ka $\pm\infty$. Naime, okolina $+\infty$ definiše se kao interval $(K, +\infty)$, tako da je, na primer, $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to +\infty}} f(x,y) = L$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\exists K > 0)(\forall (x,y) \in D) \quad |x-a| < \delta \wedge y > K \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Na sličan način definiše se beskonačna granična vrednost funkcije: $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} = +\infty$ ako i samo ako

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \boldsymbol{x} \in D) \quad 0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) > K\ .$$

Slika 25. Okoline tačaka $(a, +\infty)$ i $(+\infty, b)$. (sokobes)

Primer 25. Odredićemo

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}\ .$$

Primetimo najpre da je

$$x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy \geq xy,$$

odakle nalazimo da je (za pozitivne x i y)

$$0 \leq \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

pa je tražena granična vrednost jednaka nuli. $\square$

Kao i u opštem metričkom prostoru, pojam neprekidnosti se zasniva na pojmu granične vrednosti.

Definicija 2.2 *Funkcija $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ neprekidna je u tački $\boldsymbol{a}$ ako je*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(x) = f(\boldsymbol{a}).$$

Pri tome se pretpostavlja da tačka $\boldsymbol{a}$ pripada domenu funkcije f i da je njegova tačka nagomilavanja.

Sve funkcije više promenljivih koje se izražavaju pomoću konačno mnogo elementarnih funkcija jedne promenljive, neprekidne su u svakoj tački svog domena. To praktično znači da funkcije koje su zadate analitičkim izrazima, kao one u primeru 20, mogu imati prekide samo na granici domena. !

2.3 Diferencijabilnost i parcijalni izvodi

2.3.1 Diferencijal i parcijalni izvodi prvog reda

Ako je $x \mapsto f(x)$ realna funkcija jedne promenljive, njen izvod u tački x se definiše kao

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ovaj izraz se ne može generalisati na dve promenljive, jer bi u tom slučaju h trebalo da bude dvodimenzionalna promenljiva, pa količnik ne bi imao smisla. Ipak, moguća je generalizacija na drugi način. Glavno svojstvo diferencijabilne funkcije jedne promenljive da se ona može linearizovati u nekoj okolini tačke x_0 u kojoj je diferencijabilna. To znači da postoji realan broj A takav da je

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0).$$

Dakle, priraštaj funkcije se za dovoljno malo Δx može aproksimirati linearnom funkcijom od Δx; pokazuje se da je u tom slučaju $A = f'(x_0)$ i da je ta linearna funkcija u stvari diferencijal.

Ovu osobinu ćemo generalisati za slučaj funkcije više promenljivih i uzeti je za definiciju diferencijabilnosti. Neka je $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Za dati vektor priraštaja argumenata $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n)$, dobija se priraštaj funkcije $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})$. Linearnu funkciju $A\Delta x$ treba zameniti linearnim operatorom koji preslikava vektor $\boldsymbol{h}$ u skup realnih brojeva. Jedini takav operator jeste preslikavanje definisano skalarnim proizvodom $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{h}\rangle$, gde je $\boldsymbol{A}$ neki konstantni vektor iz $\mathbf{R}^n$. Na taj način dolazimo do sledeće definicije.

Definicija 2.3 *Neka je funkcija n promenljivih $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ definisana u nekoj okolini tačke $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Kažemo da je funkcija f* **diferencijabilna** *u tački $\boldsymbol{a}$ ako postoji konstantan vektor $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^n$ takav da je*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{h}\rangle + o(\|\boldsymbol{h}\|), \qquad (\boldsymbol{h} \to 0), \tag{6}$$

odnosno, u razvijenom obliku

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + o(\|\boldsymbol{h}\|).$$

U definiciji 2.3 podrazumeva se da je $\|h\|$ euklidska ili njoj ekvivalentna norma. Da bismo razjasnili osnovne pojmove, posmatrajmo slučaj funkcije dve promenljive.

Prema definiciji 2.3, funkcija dve promenljive $(x, y) \mapsto f(x, y)$ diferencijabilna je u tački (x_0, y_0) ako i samo ako je

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|) \quad (\Delta x \to 0, \Delta y \to 0).$$

Stavimo da je $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ i podelimo obe strane poslednje jednakosti sa Δx:

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A_1 + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \qquad (\Delta x \to 0).$$

Odavde se vidi da postoji limes količnika $(f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0))/\Delta x$ kad $\Delta x \to 0$ i da je taj limes jednak A_1. Kako smo ovde fiksirali drugu promenljivu $y = y_0$ i posmatrali limes količnika priraštaja funkcije jedne promenljive $x \mapsto f(x, y_0)$ i priraštaja argumenta Δx, dobili smo u stvari izvod funkcije $x \mapsto f(x, y_0)$; to je tzv. **parcijalni izvod** funkcije $f(x, y)$ po argumentu x, u oznaci $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$A_1 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Big|_{x = x_0,\, y = y_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Na analogan način definiše se parcijalni izvod po argumentu y:

$$A_2 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Big|_{x = x_0,\, y = y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Dakle, ako je funkcija f diferencijabilna u (x_0, y_0), onda postoje parcijalni izvodi po obe promenljive i kad $|\Delta x| + |\Delta y| \to 0$ imamo da je

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Opisani postupak može se bez teškoća preneti i na slučaj funkcije više od dve promenljive. Neka je $f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ funkcija n nezavisnih promenljivih koje posmatramo kao vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. **Parcijalni izvod** po promenljivoj x_i u nekoj tački $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ definiše se sa

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\Big|_{\boldsymbol{x}\,=\,\boldsymbol{a}} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h}.$$

Formalno, nema razlike u nalaženju „običnih" izvoda jedne promenljive i parcijalnih izvoda više promenljivih, jer u poslednjem slučaju tražimo takođe izvod funkcije jedne promenljive - to je funkcija f kod koje su sve promenljive osim jedne fiksirane.

Primer 26. 1° Ako je $f(x, y) = x^2y^3$, onda je

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^3, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^3.$$

Dakle, pri nalaženju $\frac{\partial f}{\partial x}$ smatramo da je $y =$const, dok pri nalaženju $\frac{\partial f}{\partial y}$ smatramo da je $x =$const.

2° Za $f(x, y, z) = e^z \sin xy$ imamo da je

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = ye^z \cos xy, \qquad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = xe^z \cos xy, \qquad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = e^z \sin xy. \quad \square$$

Za fiksirane vrednosti priraštaja nezavisnih promenljivih definišemo **diferencijal** funkcije $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ u tački $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ pomoću

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})\,\big|_{\boldsymbol{x}\,=\,\boldsymbol{a}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\ ,$$

gde je, kao i u jednodimenzionalnom slučaju, $\mathrm{d}x_i = \Delta x_i$.

Na primer, za funkciju dve promenljive diferencijal u tački (x_0, y_0) definisan je sa

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Prema definiciji 2.3, funkcija dve promenljive je diferencijabilna u tački (x_0, y_0) i njen diferencijal je $A_1\Delta x + A_2\Delta y$ ako i samo ako je

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - A_1\Delta x - A_2\Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0.$$

Analogno tvrđenje važi i za više od dve promenljive.

Vektor čije su komponente parcijalni izvodi funkcije u datoj tački nazivamo **gradijentom funkcije** u toj tački, u oznaci **grad** f:

$$\mathbf{grad}\ f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{grad}\ f(\boldsymbol{x})\,|_{\boldsymbol{x}\,=\,\boldsymbol{a}} \ = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right).$$

Primer 27. Neka je $f(x, y) = x \log y$. Diferencijal ove funkcije u proizvoljnoj tački (x, y) je

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y = \log y \cdot \Delta x + \frac{x}{y}\Delta y.$$

Diferencijal u tački $\boldsymbol{a} = (2, 3)$ je

$$\mathrm{d}f(2, 3) = \log 3 \cdot \Delta x + \frac{2}{3}\Delta y.$$

Gradijent u proizvoljnoj tački (x, y) je

$$\mathbf{grad}\ f(x, y) = \left(\log y, \frac{x}{y}\right),$$

a gradijent u tački $\boldsymbol{a} = (2, 3)$ je

$$\mathbf{grad}\ f(2, 3) = \left(\log 3, \frac{2}{3}\right). \quad \square$$

Uvođenjem pojma gradijenta, diferencijal se može napisati u obliku skalarnog proizvoda vektora gradijenta i vektora priraštaja argumenata:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = \langle \mathbf{grad}\ f, \Delta \boldsymbol{x}\rangle.$$

Odavde vidimo da gradijent u višedimenzionalnom slučaju ima isto značenje kao izvod u jednodimenzionalnom.

Na isti način kao u slučaju dve promenljive, pokazuje se da važi sledeća teorema.

Teorema 2.1 *Ako je funkcija $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ diferencijabilna u tački $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, tada ona u toj tački ima konačne parcijalne izvode po svim promenljivim i važi da je*

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) + o(\|\boldsymbol{h}\|) \qquad (\boldsymbol{h} \to 0). \quad \square \tag{7}$$

Prema formuli (7), priraštaj diferencijabilne funkcije se, isto kao i u jednodimenzionalnom slučaju, može aproksimirati diferencijalom.

Teorema 2.1 tvrdi da je diferencijabilnost funkcije dovoljan uslov za postojanje konačnih parcijalnih izvoda po svim promenljivim. Za razliku od jednodimenzionalnog slučaja, to nije i potreban uslov: konačni parcijalni izvodi mogu postojati iako funkcija nije diferencijabilna. To pokazuje sledeći primer.

Primer 28. Neka je $f(x,y) = |x| + |y| - \big||x| - |y|\big|$. Tada je

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \quad \text{i na isti način} \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Prema tome, $\mathrm{d}f(0,0) = 0$. S druge strane,

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \mathrm{d}f(0,0)}{|x| + |y|} = 1 - \left|\frac{|x| - |y|}{|x| + |y|}\right|$$

nema graničnu vrednost kad $|x| + |y| \to 0$, pa funkcija nije diferencijabilna u $(0,0)$. $\square$

Dovoljan uslov diferencijabilnosti dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 2.2 *Ako u nekoj okolini tačke $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ postoje parcijalni izvodi funkcije f po svim promenljivim i neprekidni su (kao funkcije n promenljivih) u tački $\boldsymbol{a}$, tada je funkcija f diferencijabilna u tački $\boldsymbol{a}$.*

2.3.2 Izvod u pravcu

Zamislimo da se penjemo na brdo i da u svim pravcima možemo da se krećemo istom brzinom. Kojom putanjom treba da idemo da bismo najbrže stigli na vrh brda? Očigledno - najkraćom, ali pitanje je kako da odredimo najkraći put, jer brdo je prekriveno šumom i vrh se ne vidi. Onda, logično je da (ako brdo ima samo jedan vrh) u svakom koraku biramo najstrmiji put, dakle onaj pravac u kome visina najbrže raste. Na taj način ćemo najbrže doći do vrha. Deo Zemlje na kojoj se nalazi brdo može se aproksimirati ravni u kojoj svaka tačka ima koordinate (x,y) u odnosu na neki koordinatni početak. Onda svaka tačka na brdu ima koordinate (x,y,z), gde je z visina brda iznad tačke (x,y) u postavljenoj ravni, pri čemu postoji zavisnost oblika $z = f(x,y)$.

Neka je (x_0, y_0) fiksirana tačka. Zadatak koji smo postavili svodi se na određivanje pravca u kome funkcija $z = f(x,y)$ najbrže raste u odnosu na njenu vrednost u tački (x_0, y_0). Neka je $\boldsymbol{l}$ proizvoljni vektor kojim je zadat jedan pravac (videti sliku 26a). Ako su α i β uglovi koje vektor $\boldsymbol{l}$ zaklapa sa koordinatnim osama x i y respektivno, tada pomeranjem za Δr u pravcu vektora $\boldsymbol{l}$ iz tačke (x_0, y_0) dolazimo u tačku $(x_0 + \Delta r\cos\alpha, y_0 + \Delta r\cos\beta)$. Pri tome se funkcija f promeni za $\Delta f = f(x_0 + \Delta r\cos\alpha, y_0 + \Delta r\cos\beta) - f(x_0, y_0)$. Ako je f diferencijabilna funkcija u tački (x_0, y_0), tada je

$$\Delta f = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta r\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta r\cos\beta + o(\|\Delta r\|) \quad (\Delta r \to 0),$$

Slika 26. a) Brdo u koordinatnom sistemu. b) Uz izvođenje izvoda u pravcu. (sbrdo)

odakle je

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta r} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos\beta. \tag{8}$$

Granična vrednost sa desne strane u (8) naziva se **izvodom funkcije f u pravcu vektora $\boldsymbol{l}$** i označava se sa $\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}l$. To je brzina promene (rasta ili opadanja, zavisno od znaka) funkcije f u posmatranom pravcu. Kako je $(\cos\alpha, \cos\beta) = \boldsymbol{l_0}$ jedinični vektor pravca $\boldsymbol{l}$, jednakost (8) može se predstaviti u obliku

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0, y_0)}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}} = \langle \mathbf{grad}\ f(x_0, y_0), \boldsymbol{l_0} \rangle = |\mathbf{grad}\ f(x_0, y_0)| \cos\varphi, \tag{9}$$

gde je φ ugao između vektora $\mathbf{grad}\ f(x_0, y_0)$ i $\boldsymbol{l}$.

Prema tome, izvod je maksimalan u pravcu u kome je $\varphi = 0$ $(\cos\varphi = 1)$, tj. u pravcu gradijenta, i to je pravac najbržeg rasta. Relacije analogne izvedenima važe i u slučaju funkcija sa više od dve promenljive.

2.3.3 Parcijalni izvodi i diferencijal višeg reda

Posmatrajmo najpre funkciju dve promenljive, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Njen parcijalni izvod po svakoj promenljivoj je takođe funkcija dve promenljive, koja može imati svoje parcijalne izvode.

Na primer, parcijalni izvodi funkcije $(x, y) \mapsto x^3 y^4$ su funkcije

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^4 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x^3y^3\ .$$

Parcijalne izvode ovih funkcija nazivamo **parcijalnim izvodima drugog reda**. Kod funkcija dve promenljive imamo 4 parcijalna izvoda drugog reda, koje označavamo na sledeći način:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\ .$$

Parcijalne izvode $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ i $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ nazivamo **mešovitim parcijalnim izvodima**.

Kod funkcije koju smo uzeli kao primer, parcijalni izvodi drugog reda su

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=6xy^4,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=12x^2y^3,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=12x^2y^3,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=12x^3y^2\ .$$

Ovde primećujemo da su mešoviti parcijalni izvodi jednaki. To nije slučajno, jer važi sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 2.3 *Ako su mešoviti parcijalni izvodi*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$$

definisani u okolini tačke (x_0,y_0) *i neprekidni u toj tački, tada važi jednakost*

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\ .$$

Parcijalni izvodi reda višeg od dva definišu se induktivno. Na primer, parcijalnih izvoda reda tri za funkciju $f(x,y)$ ima 8 :

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y\partial x},\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x^2},\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^2\partial x},\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\ .$$

U stvari, ako su ovi parcijalni izvodi neprekidni, ima ih samo 4 različita, jer važi rezultat analogan teoremi 2.3: vrednost parcijalnih izvoda ne zavisi od redosleda diferenciranja.

Diferencijal višeg reda definiše se, isto kao kod funkcija jedne promenljive, induktivno. Pretpostavimo da su $\Delta x=\mathrm{d}x$ i $\Delta y=\mathrm{d}y$ fiksirani, tj. da imaju određenu brojnu vrednost. Diferencijal drugog reda definiše se kao diferencijal funkcije $(x,y)\mapsto \mathrm{d}f(x,y)$. Vodeći računa o činjenici da su $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ konstante (što znači da je $\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=0$), dobijamo sledeći izraz za drugi diferencijal:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f(x,y) &= \mathrm{d}\big(\mathrm{d}f(x,y)\big)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\\ &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(\,\mathrm{d}x)^2+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(\,\mathrm{d}y)^2.$$

Ako su ispunjeni uslovi navedeni u teoremi 2.3, mešoviti parcijalni izvodi su međusobno jednaki i dobijamo da je

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(\,\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(\,\mathrm{d}y)^2\ .$$

Uobičajeno je da se $(\,\mathrm{d}x)^2$ i $(\,\mathrm{d}y)^2$ pišu bez zagrada, tj.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}^2x+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,\mathrm{d}^2y. \tag{10}$$

Napomenimo da je neophodno uočiti razliku između tri slična izraza:

$$\mathrm{d}x^2=(\,\mathrm{d}x)^2,\qquad \mathrm{d}(x^2)=2x\,\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{d}^2x=0.$$

Formula (10) ima strukturu binomnog razvoja i piše se u simboličkom obliku

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^2 f(x,y), \tag{11}$$

što je samo kraći i jednostavniji zapis za (10).

Diferencijal reda $n>2$ definiše se induktivno, pomoću relacije

$$\mathrm{d}^n f(x,y)=\,\mathrm{d}(\,\mathrm{d}^{n-1}f(x,y)).$$

Matematičkom indukcijom dokazuje se da za proizvoljno n važi formula analogna (11):

$$\mathrm{d}^n f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^n f(x,y), \tag{12}$$

pri čemu pretpostavljamo da su svi mešoviti parcijalni izvodi neprekidni. Na primer, formula (12) za $n=3$ glasi

$$\mathrm{d}^3 f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,\mathrm{d}y^3\ .$$

U opštem slučaju, formula (12) u razvijenom obliku glasi

$$\mathrm{d}^n f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial^{n-k}x}\partial^k y\,\mathrm{d}x^{n-k}\,\mathrm{d}y^k.$$

Za slučaj funkcije više od dve promenljive, važe analogni rezultati.

2.3.4 Invarijantnost diferencijala i diferenciranje složenih funkcija

Neka su f_u i f_v parcijalni izvodi funkcije $f(u,v)$. Prema izloženom u 2.3.1, diferencijal ove funkcije je $\mathrm{d}f = f_u\Delta u + f_v\Delta v$, gde su Δu i Δv priraštaji koji se u slučaju nezavisnih promenljivih u i v svode na diferencijale $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$ respektivno, tako da pišemo

(13) $$\mathrm{d}f = f_u\,\mathrm{d}u + f_v\,\mathrm{d}v.$$

Međutim, ako su u i v funkcije jedne ili više nezavisnih promenljivih, recimo x i y, onda f takođe postaje funkcija od x i y, pa je $\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$. Kako $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$ više nisu priraštaji, nego diferencijali, formula (13) ne mora da važi. U sledećoj teoremi dokazaćemo da (13) ipak važi i u ovom slučaju, odnosno da diferencijal ima isti oblik bez obzira da li su u i v funkcije ili nezavisne promenljive. Ova osobina se zove invarijantnost (nepromenljivost) diferencijala prvog reda. Diferencijali reda višeg od 1 nemaju osobinu invarijantnosti.

Teorema 2.4 Invarijantnost diferencijala. *Neka je $(u,v)\mapsto f(u,v)$ diferencijabilna funkcija u nekoj fiksiranoj tački (u_0,v_0). Neka su u i v diferencijabilne funkcije argumenata x i y u tački (x_0,y_0), za koju je $u_0 = u(x_0,y_0), v_0 = v(x_0,y_0)$. Tada je diferencijal u tački (x_0,y_0) koji odgovara priraštajima nezavisnih promenljivih Δx i Δy jednak*

$$\mathrm{d}f(u_0,v_0) = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\,\mathrm{d}v,$$

gde su $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$ diferencijali koji odgovaraju priraštajima Δx i Δy.

Dokaz. Neka su Δx i Δy priraštaji nezavisnih promenljivih i neka su Δu i Δv odgovarajući priraštaji funkcija u i v:

$$\Delta u = u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0), \quad \Delta v = v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)\ .$$

Priraštajima Δu i Δv odgovara priraštaj funkcije f:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - f(u_0,v_0)\\ &= f(u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y), v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)) - f(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)).\end{aligned}$$

Kako je f diferencijabilna funkcija u (u_0,v_0), imamo da je (uzimajući normu $\|\cdot\|_s$ u definiciji diferencijabilnosti)

(14) $$\Delta f = f_u\Delta u + f_v\Delta v + o(|\Delta u| + |\Delta v|), \qquad (\Delta u\to 0, \Delta v\to 0).$$

Dalje, s obzirom da su u i v diferencijabilne funkcije od x i y, važi da je

(15) $$\Delta u = \mathrm{d}u + o(|\Delta x| + |\Delta y|), \quad \Delta v = \mathrm{d}v = o(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

pri čemu je

(16) $$\mathrm{d}u = u_x\Delta x + u_y\Delta y, \quad \mathrm{d}v = v_x\Delta x + v_y\Delta y$$

Smenom (15) u (14) dobijamo da je

(17) $$\Delta f = f_u \,\mathrm{d}u + f_v \,\mathrm{d}v + o(|\Delta x| + |\Delta y|), \qquad (\Delta x \to 0, \Delta y \to 0).$$

Iz (16) dobijamo da je $f_u \,\mathrm{d}u + f_v \,\mathrm{d}v$ oblika $A\delta x + B\delta y$, pa iz (17) zaključujemo da je to diferencijal $\mathrm{d}f$, što je i trebalo dokazati. □

Invarijantnost diferencijala, koja je u teoremi 2.4 dokazana za slučaj funkcije oblika $f(u(x,y), v(x,y))$, važi i u svim analognim slučajevima, na primer za $f(u(x,y,z), v(x,y,z))$, $f(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$, $f(u(t), v(t))$, itd.

Koristeći se invarijantnošću diferencijala, mogu se izvesti formule za nalaženje parcijalnih izvoda složenih funkcija.

Posmatrajmo funkciju $f(u(x,y), v(x,y))$. Iz invarijantosti diferencijala izlazi da je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y \\
&= f_u \,\mathrm{d}u + f_v \,\mathrm{d}v \\
&= f_u(u_x \,\mathrm{d}x + u_y \,\mathrm{d}y) + f_v(v_x \,\mathrm{d}x + v_y \,\mathrm{d}y) \\
&= (f_u u_x + f_v v_x) \,\mathrm{d}x + (f_u u_y + f_v v_y) \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Poređenjem prve i poslednje jednakosti, zbog nezavisnosti priraštaja $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$, zaključujemo da je

(18) $$f_x = f_u u_x + f_v v_x, \qquad f_y = f_u u_y + f_v v_y.$$

U opštem slučaju,

> Ako je $z = f(u_1, \ldots, u_n)$ i $u_i = u_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, \ldots, n$, gde su sve pomenute funkcije diferencijabilne, onda je
>
> $$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Posebno, ako je $z = f(u(t), v(t))$, dobija se funkcija jedne promenljive čiji se izvod po t nalazi iz jednakosti

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial f}{\partial v} v'(t).$$

Primer 29. Prilikom pisanja formula za izvode, treba voditi računa da ne dođe do zabune u vezi sa oznakama promenljivih. Na primer, za funkciju $f(x, x^2 + y^2)$, nije ispravno upotrebiti oznaku $\partial f / \partial x$ za parcijalni izvod po prvoj promenljivoj, jer se x pojavljuje i u drugom argumentu. Ovde bi bilo ispravno uvesti oznake u, v za argumente funkcije f, tako da je onda $u(x,y) = x$, $v(x,y) = x^2 + y^2$ i

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x \ .$$

Parcijalne izvode višeg reda nalazimo ponovljenom primenom formula koje smo naveli, kao i pravila diferenciranja proizvoda. Na primer, u slučaju kada imamo funkciju $f(u(x,y),v(x,y))$, nalazimo da je

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x}(f_u u_x + f_v v_x) \\ &= \frac{\partial f_u}{\partial x} u_x + f_u u_{xx} + \frac{\partial f_v}{\partial x} v_x + f_v v_{xx} \\ &= (f_{uu} u_x + f_{uv} v_x) u_x + f_u u_{xx} + (f_{uv} u_x + f_{vv} v_x) v_x + f_v v_{xx} \\ &= f_{uu} u_x^2 + 2 f_{uv} u_x v_x + f_{vv} v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}, \end{aligned}$$

gde smo $\partial f_u/\partial x$ i $\partial f_v/\partial x$ nalazili po formuli (18) sa f_u, odnosno f_v umesto f. Na isti način dobija se da je

$$f_{xy} = f_{uu} u_x u_y + f_{uv}(u_x v_y + v_x u_y) + f_{vv} v_x v_y + f_u u_{xy} + f_v v_{xy},$$

$$f_{yy} = f_{uu} u_y^2 + 2 f_{uv} u_y v_y + f_{vv} v_y^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}.$$

Ovde smo pretpostavili da su mešoviti parcijalni izvodi jednaki.

2.3.5 Preslikavanja u više dimenzija

U ovom delu izučavamo preslikavanja iz $\mathbf{R}^n$ u $\mathbf{R}^m$. Poseban slučaj, kada je $m = 1$, predstavljaju funkcije više promenljivih.

Neka su $f_1, \ldots, f_m$ funkcije n promenljivih definisane na zajedničkom domenu $D \subset \mathbf{R}^n$. Sistemom jednakosti

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{19}$$

definisano je preslikavanje koje svakoj tački $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ pridružuje jednu tačku $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$. Ako to preslikavanje označimo sa $\boldsymbol{f}$, sistem jednakosti (19) možemo zapisati u kompaktnom obliku

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Ako postoje konačni parcijalni izvodi svih funkcija f_i po promenljivim y_j, matrica tipa $m \times n$

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

zove se JACOBIjeva matrica preslikavanja (19). Ovu matricu označavamo sa

$$\left\|\frac{\mathrm{D}(f_1,\ldots,f_m)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}\right\| \quad \text{ili} \quad \left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\right\| \quad \text{ili} \quad \left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\right\|.$$

JACOBIjeva matrica ima ulogu izvoda preslikavanja $\boldsymbol{f}$. Neka je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ i neka je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$, gde su dimenzije vektora $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}$ redom m, n, k. Nije teško dokazati, koristeći se pravilom množenja matrica i pravilima nalaženja izvoda složenih funkcija, da je

$$\left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}{\mathrm{D}\boldsymbol{t}}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\right\| \cdot \left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}\boldsymbol{t}}\right\| . \tag{20}$$

U slučaju kada su u (19) vektori $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ iste dimenzije, JACOBIjeva matrica je kvadratna; njena determinanta se zove JACOBIan preslikavanja $\boldsymbol{f}$ i označava se sa

$$\frac{\mathrm{D}(f_1,\ldots,f_m)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)} \quad \text{ili} \quad \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}} \quad \text{ili} \quad \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}.$$

U slučaju složenog preslikavanja, za JACOBIjane takođe važi pravilo množenja (20).

Definicija 2.4 *Preslikavanje $\boldsymbol{f}$ oblasti $S \subset \mathbf{R}^n$ u oblast $D \subset \mathbf{R}^n$ je* **difeomorfizam** *ako je $\boldsymbol{f}$ bijekcija $S \mapsto D$ i ako postoje neprekidni parcijalni izvodi funkcija $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{f}^{-1}$ po svim promenljivima.*

Neka je $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{u})$ difeomorfizam oblasti[1] S u oblast D. Tada je, prema opštem pravilu (20),

$$\left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}\right\| \cdot \left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\right\| = I,$$

odnosno, za determinante (JACOBIjane):

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}\boldsymbol{u}} \cdot \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}} = 1.$$

To znači da su oba JACOBIjana različita od nule; kako je $\boldsymbol{f}$ difeomorfizam, onda su oba JACOBIjana neprekidne funkcije, pa stoga ne menjaju znak, odnosno, stalnog su znaka u oblastima S i D respektivno. Dakle, važi sledeća teorema.

Teorema 2.5 *Neka je $\boldsymbol{f}$ difeomorfizam oblasti $S \subset \mathbf{R}^n$ u oblast $D \subset \mathbf{R}^n$, u oznaci $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$. Tada JACOBIjan*

$$J = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}$$

ima isti znak za svako $\boldsymbol{u} \in S$ i različit je od nule.

---

[1] Pretpostavljamo, u skladu sa konvencijom koju smo ranije uveli, da su oblasti povezane.

2.3.6 Implicitno zadate funkcije

Neka je F diferencijabilna funkcija dve promenljive. Jednakošću

$$F(x,y)=0 \tag{21}$$

zadata je veza između x i y u implicitnom obliku. Za svako fiksirano x jednačina (21) ima jedno ili više realnih rešenja po y, ili nema rešenja. Iako se rešenja ne mogu uvek dobiti u eksplicitnom obliku, izvod $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ se može jednostavno odrediti iz (21), doduše u funkciji obe promenljive, x i y. Naime, iz (21) izlazi da je diferencijal funkcije F identički jednak nuli, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y=0,$$

odakle je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{F_x}{F_y}\,. \tag{22}$$

Polazeći od (22) mogu se dalje naći i izvodi višeg reda.

Na sličan način, jednačinom

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0 \tag{23}$$

zadaje se y kao funkcija promenljivih $x_1,\ldots,x_n$. Iz jednakosti $\mathrm{d}F=0$ nalazimo da je

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i+\frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y=0,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i+\frac{\partial F}{\partial y}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i=0.$$

Grupisanjem članova uz $\mathrm{d}x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i=0,$$

odakle, zbog nezavisnosti priraštaja $\mathrm{d}x_i=\Delta x_i$ sleduje da je

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}\,. \tag{24}$$

U najopštijem slučaju, sistemom m jednačina

$$\begin{array}{c}
F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0\\
F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0\\
\vdots\ \vdots\ \vdots\\
F_m(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0
\end{array} \tag{25}$$

zadato je m funkcija od n promenljivih: $y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Da bismo izbegli komplikovane oznake, posmatrajmo slučaj $m = 2, n = 3$:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, u, v) &= 0 \\ G(x, y, z, u, v) &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Ovim jednačinama se u i v definišu kao funkcije nezavisnih promenljivih x, y, z. Stoga je

$$\mathrm{d}u = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y + u_z\,\mathrm{d}z, \qquad \mathrm{d}v = v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y + v_z\,\mathrm{d}z.$$

S druge strane, iz jednačina (26) imamo da je da je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z + F_u\,\mathrm{d}u + F_v\,\mathrm{d}v = 0 \\ \mathrm{d}G = G_x\,\mathrm{d}x + G_y\,\mathrm{d}y + G_z\,\mathrm{d}z + G_u\,\mathrm{d}u + G_v\,\mathrm{d}v = 0, \end{aligned}$$

pa se zamenom izraza za $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$ i grupisanjem članova uz $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ dobija da je

$$\begin{aligned} (F_x + F_u u_x + F_v v_x)\,\mathrm{d}x + (F_y + F_u u_y + F_v v_y)\,\mathrm{d}y + (F_z + F_u u_z + F_v v_z)\,\mathrm{d}z = 0 \\ (G_x + G_u u_x + G_v v_x)\,\mathrm{d}x + (G_y + G_u u_y + G_v v_y)\,\mathrm{d}y + (G_z + G_u u_z + G_v v_z)\,\mathrm{d}z = 0 \end{aligned}$$

Koeficijenti uz $\mathrm{d}x$ u obe jednačine moraju biti jednaki nuli, odakle je

$$\begin{aligned} F_u u_x + F_v v_x &= -F_x \\ G_u u_x + G_v v_x &= -G_x \end{aligned} \tag{27}$$

Iz sistema jednačina (27) nalazimo u_x i v_x:

$$u_x = -\frac{\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(x,v)}}{\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(u,v)}}, \qquad v_x = -\frac{\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(u,x)}}{\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(u,v)}}\,. \tag{28}$$

Na isti način se dobijaju parcijalni izvodi po y i z.

Kao što vidimo, izrazi (22), (24) i (28) imaju sličnu strukturu i nije teško ustanoviti analogije između njih. Zajedničko za sve slučajeve jeste da su izrazi definisani samo ako imenioci nisu jednaki nuli, tj. ako je $F_y \neq 0$ u prva dva slučaja, odnosno ako je $\mathrm{D}(F, G)/\mathrm{D}(u, v) \neq 0$ u trećem slučaju. Ispostavlja se da su ovi uslovi i dovoljni ne samo za nalaženje izvoda već i za postojanje jedinstvene implicitno zadate funkcije. Navodimo bez dokaza rezultat koji se odnosi na najopštiji slučaj (25).

Teorema 2.6 *Neka je dat sistem jednačina (25) i neka je* $T_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *jedno njegovo rešenje. Prepostavimo da su funkcije* $F_1, \ldots, F_m$ *definisane, neprekidne i diferencijabilne u nekoj okolini tačke* T_0*, pri čemu je u svim tačkama te okoline* JACOBIan $\mathrm{D}(F_1, \ldots, F_m)/\mathrm{D}(y_1, \ldots y_m)$ *različit od nule. Tada postoje jedinstveno određene funkcije* $f_1, \ldots, f_m$ *tako da u nekoj okolini tačke* T_0 *važi da je* $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$*,* $i = 1, 2, \ldots, m$*.* $\square$

U posebnom slučaju, za $m = 1$, teorema 2.6 odnosi se na jednakost (23) (ili na (21) ako je i $n = 1$), a uslov koji se navodi u teoremi se svodi na uslov da je $\partial F/\partial y \neq 0$.

Primer 30. Za proizvoljno $x > 0$, jednačina

$$x - y^2 = 0 \tag{29}$$

ima dva rešenja, $y = \pm\sqrt{x}$, pa ovom relacijom nije zadata funkcija. U oznakama koje smo uveli, ovde je $F(x, y) = x - y^2$, pa je $\partial F/\partial y = -2y$, tako da se uslov iz teoreme 2.6 svodi na $y \neq 0$. S obzirom da je funkcija F diferencijabilna u celoj ravni $\mathbf{R}^2$, ostali uslovi teoreme 2.6 zadovoljeni su u svakoj okolini svake tačke $T_0 = (x_0, y_0)$ za koju je $x_0 = y_0^2$. Prema tome, jedinstvena funkcija $y = f(x)$ je određena relacijom (29) u svakoj oblasti koja ne sadrži tačke sa $y = 0$.

Nezavisnost funkcija

U Algebri se definiše pojam linearne nezavisnosti, odnosno zavisnosti skupa funkcija. Zavisnost, međutim, ne mora biti samo linearna. Na primer, funkcije $y_1 = x^2 + y^2$ i $y_2 = e^{x^2+y^2}$ nisu linearno zavisne, ali postoji veza $y_2 = e^{y_1}$, koja nam omogućava da znajući vrednost funkcije y_1 jednoznačno odredimo vrednost funkcije y_2. Za razliku od toga, funkcije $y_3 = e^{x-y}$ i $y_4 = \log(2x + 3y)$ očigledno nisu zavisne, jer za datu vrednost y_3 možemo jednoznačno da odredimo samo $x - y$, dok y_4 nije određeno sa $x - y$.

Definicija 2.5 *Za* m *funkcija definisanih na nekom zajedničkom domenu* $D \subset \mathbf{R}^n$

$$f_1(\boldsymbol{x}), \qquad , f_m(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

kažemo da su **zavisne** *na domenu* D *ako je vrednost bar jedne od njih svakoj tački* $\boldsymbol{x} \in D$ *jednoznačno određena vrednošću ostalih funkcija, tj., ako postoji neka funkcija* $m - 1$ *promenljivih takva da je*

$$f_j(\boldsymbol{x}) = g\big(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{j-1}(\boldsymbol{x}), f_{j+1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})\big) \qquad (\boldsymbol{x} \in D),$$

za neko $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$*.*

Ako funkcije sistema (30) imaju parcijalne izvode, može se definisati JACOBIjeva matrica

$$J = \left\| \frac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_m)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)} . \right\| \tag{31}$$

Teorema 2.7 *Ako su funkcije (30) diferencijabilne i ako je rang* JACOBI*jeve matrice (31) za svako $x \in D$ jednak broju funkcija m, onda su ove funkcije nezavisne.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada se, na primer, vrednosti funkcije f_1 mogu odrediti pomoću vrednosti ostalih funkcija:

$$f_1(\boldsymbol{x}) = g(f_2(\boldsymbol{x}), \dots f_m(\boldsymbol{x})), \tag{32}$$

gde je g neka diferencijabilna funkcija od $m-1$ promenljive, $g = g(u_2, \dots, u_m)$. Diferenciranjem jednakosti (32) po $x_1, \dots, x_n$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\\
&\vdots\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_n} &= \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_n},
\end{aligned}$$

ili, u vektorskom obliku

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{\partial g}{\partial u_2}\boldsymbol{v_2} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_m}\boldsymbol{v_m},$$

gde je

$$\boldsymbol{v_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right),$$

tj. i-ta vrsta JACOBIjeve matrice (31). To znači da su vrste JACOBIjeve matrice linearno zavisne, pa rang ove matrice mora biti manji od m, što je suprotno pretpostavci. □

! Iz dokaza teoreme 2.7 može se videti da proizvoljna nelinearna zavisnost funkcija implicira *linearnu* zavisnost vrsta JACOBIjeve matrice.

Tvrđenje obrnuto teoremi 2.7 važi samo lokalno. Ovaj rezultat navodimo bez dokaza.

Teorema 2.8 *Ako je rang* JACOBI*jeve matrice (31) u nekoj tački $\boldsymbol{x}$ jednak $k < n$, onda postoji okolina tačke $\boldsymbol{x}$ u kojoj se $n-k$ funkcija sistema (30) mogu izraziti pomoću ostalih k funkcija. Drugim rečima, u nekoj okolini tačke $\boldsymbol{x}$ od m funkcija (30) samo je k nezavisnih.*

Primer 31. Neka je $f_1(x,y) = \sin(x+y)$, $f_2(x,y) = \cos(x+y)$. Iako je $\mathrm{D}(f_1,f_2)/\mathrm{D}(x,y) = 0$ u svakoj tački $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, funkcije f_1 i f_2 *nisu zavisne* u celoj ravni $\mathbf{R}^2$, zbog toga što jednoj vrednosti $\sin(x+y)$ odgovaraju dve vrednosti $\cos(x+y) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x+y)}$ i obrnuto. Međutim, za svaku datu tačku (x,y) postoji okolina u kojoj se sinus jednoznačno izražava preko kosinusa ili obrnuto (dokazati).

Primer 32. Ako je $m > n$, odnosno ako je broj funkcija veći od broja promenljivih, rang JACOBIjeve matrice je uvek manji od m. Dakle, u svakom skupu od m diferencijabilnih funkcija n promenljivih, ako je $m > n$ moraju postojati funkcije koje se izražavaju preko ostalih.

2.4 Taylorova formula i ekstremumi funkcija više promenljivih

2.4.1 Taylorova formula za funkcije više promenljivih

Zahvaljujući činjenici da je, za funkciju jedne promenljive, $\mathrm{d}^k f(x) = f^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x$, TAYLORova formula sa ostatkom u LAGRANGEovom obliku može se predstaviti na sledeći način:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(a) + \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(a + \theta(x-a)) \quad (x \to a), \tag{33}$$

gde se uzima da je $\mathrm{d}x = \Delta x = x - a$ u svim diferencijalima koji se pojavljuju u (33). Oblik (33) omogućava jednostavnu generalizaciju na funkcije više promenljivih.

Teorema 2.9 *Neka je $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ funkcija definisana na domenu $D \subset \mathbf{R}^n$ i $n+1$ put diferencijabilna u nekoj okolini[1] tačke $\boldsymbol{a} \in D$. Tada je*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}) + \cdots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n f(\boldsymbol{a}) + R_n, \tag{34}$$

pri čemu se R_n može predstaviti u obliku

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \qquad \theta \in (0,1). \tag{35}$$

Svi diferencijali u navedenim jednakostima se računaju sa priraštajima nezavisnih promenljivih $\mathrm{d}x_i \Delta x_i = x_i - a_i$.

Dokaz. Neka je U okolina tačke a u kojoj je funkcija f $n+1$ put diferencijabilna, i neka je $\boldsymbol{x}$ proizvoljna fiksirana tačka u toj okolini. Definišimo funkciju F jedne realne promenljive t pomoću

$$F(t) = f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})).$$

Očigledno je $F(0) = f(\boldsymbol{a})$; $F(1) = f(\boldsymbol{x})$, a sve tačke oblika $\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ pripadaju "duži" koja spaja tačke $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{a}$, pa stoga pripadaju i okolini U u kojoj su ispunjeni uslovi diferencijabilnosti funkcije f. Kako je f $n+1$ put diferencijabilna, onda funkcija F ima konačne izvode po t do reda $n+1$ u nekoj okolini tačke $t = 0$ koja

[1] Podrazumeva se da je okolina definisana preko euklidske ili njoj ekvivalentne metrike. Za dokaz teoreme je bitno da okolina zajedno sa tačkom $\boldsymbol{x}$ sadrži i duž koja spaja $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{a}$.

sadrži i tačku $t = 1$, pa se na funkciju F može primeniti (jednodimenzionalna) TAYLORova formula u tački $t = 1$, a oko tačke $t = 0$, tj.

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + R_n, \tag{36}$$

gde je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta), \qquad 0 < \theta < 1. \tag{37}$$

Sada ćemo pokazati da je (34) u stvari isto što i (36) i da je ostatak u (35) zapravo isto što i ostatak u (37).

Ako uvedemo oznake $u_i = u_i(t) = a_i + t(x_i - a_i), i = 1, \ldots, n$, imamo da je

$$u'(t) = x_i - a_i = \mathrm{d}x_i,$$

pa je

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\,\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})),$$

odakle je

$$F'(0) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}).$$

Dalje, koristeći se činjenicom da je $u''(t) = 0$, imamo da je

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})),$$

tako da je

$$F''(0) = \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}).$$

Slično tome, pokazuje se da je

$$F^{(k)}(0) = \mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a}), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

kao i da je

$$F^{(n+1)}(\theta) = \mathrm{d}^{(n+1)} f(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})).$$

Smenom izvedenih izraza za izvode funkcije F u (36) i u (37), dobijamo (34), odnosno (35), čime je dokaz završen. □

Primer 33. Napisati MACLAURINov polinom trećeg stepena za funkciju $f(x, y) = \cos(2x + 3y)$.

Rešenje. Potrebni su nam najpre parcijalni izvodi zaključno sa trećim redom. Imamo da je f_x

Pokazaćemo sada da se ostatak u TAYLORovoj formuli može predstaviti i u PEANOovom obliku. Prepostavimo, radi jednostavnosti izvođenja, da imamo funkciju dve promenljive i razvoj u okolini tačke $(0,0)$. Prema (35) u ovom slučaju je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(\theta x, \theta y).$$

Ako sa A_{ij} označimo parcijalni izvod $\partial^{i+1} f/\partial^i x \partial^j y$ u tački $(\theta x, \theta y)$, dobijamo R_n u razvijenom obliku:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} A_{n+1-k,k}\, x^{n+1-k} y^k.$$

Neka je $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ (norma $\|\cdot\|_s$). Pokazaćemo da je

$$R_n = o(\|(x,y)\|^n, \quad \text{odnosno} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{|R_n|}{\|(x,y)\|^n} = 0. \tag{38}$$

Primenom nejednakosti trougla nalazimo da je

$$\frac{|R_n|}{\|(x,y)\|^n} \le \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} |A_{n+1-k,k}| \frac{|x|^{n+1-k}|y|^k}{(|x|+|y|)^n}.$$

Za svako $k = 0, 1, \ldots, n$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{|x|^{n+1-k}|y|^k}{(|x|+|y|)^n} &= \frac{|x|^{n+1-k}|y|^k}{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}|x|^{n-j}|y|^j} \\
&\le \frac{|x|^{n+1-k}|y|^k}{\binom{n}{k}|x|^{n-k}|y|^k} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{k}}|x| \to 0 \quad \text{kad } \|(x,y)\| \to 0,
\end{aligned}$$

a za $k = n+1$, odgovarajući količnik je

$$\frac{|y|^{n+1}}{(|x|+|y|)^n} \le \frac{|y|^{n+1}}{|y|^n} \to 0.$$

Prema tome, svaki pojedinačni član u količniku $R_n/\|(x,y)\|$ teži nuli kad $\|(x,y)\| \to 0$, i relacija (38) je dokazana.

Teorema 2.10 Peano-ov oblik ostatka. *Ako je R_n ostatak u* TAYLOR*ovom razvoju (34) oko tačke $\boldsymbol{a}$, onda je*

$$R_n = o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^n), \qquad (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \to 0).$$

U ovoj relaciji se pod $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ podrazumeva euklidska ili njoj ekvivalentna norma.

2.4.2 Lokalni ekstremumi

Nalaženje ekstremuma (maksimuma i minimuma) funkcije više promenljivih je postupak od izuzetne praktične vrednosti, jer ima brojne primene. Veliki broj problema u primenjenoj matematici može se svesti na ekstremalne probleme. U ovom delu navodimo analitičke metode za nalaženje ekstremuma. Pored ovih, postoje i razne numeričke metode koje se primenjuju kada imamo mnogo promenljivih i kada funkcije nisu diferencijabilne.

Stacionarne tačke

Definicija lokalnih ekstremuma je u slučaju funkcije više promenljivih ista kao i za funkciju jedne promenljive.

Definicija 2.6 *Neka je funkcija* $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ *definisana u nekoj okolini* U *tačke* $\boldsymbol{a}$. *Ako za svako* $\boldsymbol{x} \in U$ *važi da je* $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$, *kažemo da funkcija* f *ima* **lokalni maksimum** *u tački* $\boldsymbol{a}$. *Lokalni minimum se definiše analogno.*

Primer 34. Funkcija dve promenljive $z = x^2 + y^2 - x^3 - y^4$ ima lokalni minimum u tački $(0, 0)$. Naime, kako je

$$z = x^2 + y^2 - x^3 - y^4 = x^2(1 - x) + y^2(1 - y^2),$$

imamo da je $z \geq 0$ za $x < 1$ i $|y| < 1$, što znači da, na primer, u okolini $|x| < 1, |y < 1$ imamo da je $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$.

Pokazaćemo sada da za funkcije više promenljivih važi analogon Fermatove teoreme.

Teorema 2.11 *Ako funkcija* f *ima sve parcijalne izvode u tački* $\boldsymbol{a}$ *u kojoj ima lokalni ekstremum, onda je* **grad** $f(\boldsymbol{a}) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo, određenosti radi, da funkcija f ima u tački $\boldsymbol{a}$ lokalni maksimum. To znači da postoji okolina $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid |x_i - a_i| < \varepsilon\}$ tako da je $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ za svako $\boldsymbol{x} \in U$. Posmatrajmo sada funkciju jedne promenljive definisanu sa

$$g(x) = f(x, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Iz pretpostavke o lokalnom maksimumu funkcije f izlazi da funkcija g ima lokalni maksimum u tački a_1. Pored toga, funkcija g ima izvod u tački a_1 koji je jednak parcijalnom izvodu funkcije f po prvoj promenljivoj, u tački $\boldsymbol{a}$. Dakle, prema Fermatovoj teoremi za funkcije jedne promenljive, zaključujemo da je

$$g'(a_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(\boldsymbol{a}) = 0.$$

Na isti način se dokazuje da su svi parcijalni izvodi funkcije f u tački $\boldsymbol{a}$ jednaki nuli, i teorema je dokazana.

Tačke u kojima je gradijent jednak nuli zovu se **stacionarne tačke**; prema teoremi 2.11 funkcija koja u nekoj oblasti ima parcijalne izvode, može imati lokalne ekstremume samo u stacionarnim tačkama. Dakle, „kandidati” za lokalne ekstremume su one tačke $\boldsymbol{x}$ čije se koordinate $x_1, \ldots, x_n$ dobijaju kao rešenja sistema jednačina

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}.$$

Primer 35. Odrediti lokalne ekstremume funkcije

Primer 36. Odrediti minimum i maksimum funkcije u oblasti

Primer 37. Funkcija $z = y^2 - x^2$ predstavljena je na slici 27. Njen oblik u okolini koordinatnog početka podseća na sedlo. Imamo da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

tako da je $(0, 0)$ stacionarna tačka date funkcje. Međutim, u ovoj tački funkcija nema lokalni ekstremum. Naime, ako se posmatraju samo tačke na zx-ravni (sa $y = 0$), funkcija ima maksimum u $(0, 0)$, dok po yz-ravni (sa $x = 0$) ima minimum u $(0, 0)$. Tačka $(0, 0)$ zove se **sedlasta tačka** za ovu funkciju. Ovo je klasičan primer funkcije više promenljivih sa stacionarnom tačkom koja nije tačka lokalnog ekstremuma.

Slika 27. Grafik funkcije $z = y^2 - x^2$. (sedlo)

Karakter stacionarnih tačaka

U jednostavnijim slučajevima, kao što je primer 34, može se direktno videti kakva je vrsta stacionarne tačke (minimum, maksimum ili tačka u kojoj funkcija nema ekstremuma). TAYLORova formula nam daje mogućnost da ispitamo karakter stacionarne tačke pomoću znaka drugog diferencijala, slično postupku za funkcije jedne promenljive, gde se karakter stacionarne tačke određuje na osnovu znaka drugog izvoda.

Neka je $\boldsymbol{a}$ stacionarna tačka funkcije $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$. Kako su parcijalni izvodi prvog reda jednaki nuli, TAYLORov razvoj u okolini tačke $\boldsymbol{a}$ glasi:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}) + o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2), \qquad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}).$$

U dovoljno maloj okolini tačke $\boldsymbol{a}$, pokazuje se da znak razlike $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})$ zavisi samo od znaka drugog diferencijala $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ ako on nije nula[1]. Na taj način dobijamo sledeće pravilo.

Ako je za svako $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ u dovoljno maloj okolini tačke $\boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}) > 0$, onda funkcija f ima minimum u tački $\boldsymbol{a}$.

Ako je za svako $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ u dovoljno maloj okolini tačke $\boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}) < 0$, funkcija f ima maksimum u tački $\boldsymbol{a}$.

Ako $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ menja znak, tj. ako u svakoj okolini tačke $\boldsymbol{a}$ postoje tačke u kojima je $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}) > 0$, kao i tačke u kojima je $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}) < 0$, funkcija f nema ekstremuma u tački $\boldsymbol{a}$.

Ako u svakoj okolini tačke a postoje tačke u kojima je $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}) = 0$, ne može se izvesti nikakav zaključak bez ispitivanja diferencijala reda višeg od dva, ili direktnog ispitivanja znaka priraštaja funkcije.

Drugi diferencijal je kvadratna forma po priraštajima $\mathrm{d}x_i = x_i - a_i$:

$$d^2 f(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j.$$

Kako su $\mathrm{d}x_i$ nezavisni priraštaji, problem određivanja znaka drugog diferencijala je u stvari (algebarski) problem određivanja znaka opšte kvadratne forme

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j \ . \tag{39}$$

Određivanje znaka kvadratne forme

U slučaju funkcije dve promenljive, ako su mešoviti parcijalni izvodi neprekidni, drugi diferencijal je

$$d^2 f = A(\mathrm{d}x)^2 + 2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C(\mathrm{d}y)^2, \tag{40}$$

gde je $A = f_{xx}, B = f_{xy}, C = f_{yy}$. Posmatraćemo, prema tome, proizvoljnu kvadratnu formu

$$F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{41}$$

[1]Striktan dokaz ovog tvrđenja je nešto teži od odgovarajućeg dokaza za funkcije jedne promenljive, pa ga izostavljamo.

i odredićemo uslove koje treba da ispunjavaju koeficijenti A, B i C da bi ova kvadratna forma bila istog znaka za svako $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Ako je $A = 0, B = 0$, onda je $F = Cy^2$, pa znak kvadratne forme F zavisi od znaka C; pri tome je $F = 0$ za $y = 0$. Ako je $A = 0, B \neq 0$, onda je

$$F(x, y) = y(2Bx + Cy),$$

što znači da forma menja znak. Neka je sada $A \neq 0$. Onda je

$$F(x, y) = Ax^2 \left(1 + \frac{2B}{A}\frac{y}{x} + \frac{C}{A}\frac{y^2}{x^2}\right), \qquad x \neq 0.$$

Uvođenjem smene $t = y/x$ dobijamo da je

$$F(x, y) = Ax^2 \left(\frac{C}{A}t^2 + \frac{2B}{A}t + 1\right).$$

Kvadratna funkcija jedne promenljive

$$\varphi(t) = \frac{C}{A}t^2 + \frac{2B}{A}t + 1$$

nema realnih nula ako je diskriminanta negativna. To znači da je $B^2 - AC < 0$, iz čega izlazi da je $AC > 0$, brojevi A i C su istog znaka, pa je time i $C/A > 0$. Odavde sleduje da je $\varphi(t) > 0$ za svako $t \in \mathbf{R}$. Dakle, znak kvadratne forme F je isti kao znak A, za svako $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x \neq 0$. Za $x = 0$ (u ovom slučaju mora biti $y \neq 0$) iz (41) imamo da je $F(x, y) = Cy^2$, pa je znak F isti kao znak C, odnosno ponovo isti kao znak A.

U slučaju kada je $B^2 - AC > 0$, funkcija φ ima dve realne nule, pa kvadratna forma menja znak u zavisnosti od $t = y/x$. Ako je diskriminanta jednaka nuli, funkcija φ se anulira za neko $t_0 \in \mathbf{R}$, što znači da je na pravoj $y/x = t_0$ kvadratna forma jednaka nuli. U ovom slučaju, znak priraštaja funkcije f zavisi od znaka trećeg diferencijala.

Sumirajmo sada dobijene rezultate u obliku praktičnog pravila.

Ako je $\boldsymbol{a}$ stacionarna tačka funkcije $f(x,y)$ i ako je $A = f_{xx}(\boldsymbol{a}), B = f_{xy}(\boldsymbol{a}), C = f_{yy}(\boldsymbol{a})$, $D = B^2 - AC$, imamo sledeće slučajeve:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & A>0 \to \text{ MIN} \\
 & D<0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & A<0 \to \text{ MAX} \\
A\neq 0 \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[dr] & D>0 \to \text{ N.E.} & \\
 & D=0 \to \ ?? & \\
 & B=0 \to \ ?? & \\
A=0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & B\neq 0 \to \text{ N.E.} &
\end{tikzcd}
$$

N.E.= nema ekstremuma; ?? = potrebno dalje ispitivanje.

Za funkcije više od dve promenljive primenjuje se tzv. SYLVESTERov kriterijum. Za kvadratnu formu (39) kažemo da je **pozitivno definitna** ako je $F(\boldsymbol{x}) > 0$ za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq 0$. Ukoliko je $F(\boldsymbol{x}) < 0$, za kvadratnu formu F se kaže da je **negativno definitna**. Prema SYLVESTERovom kriterijumu, kvadratna forma (39) je pozitivno definitna ako su svi glavni minori determinante $|A_{ij}|$ pozitivni. Kvadratna forma je negativno definitna ako su glavni minori determinante $|A_{ij}|$ alternativnog znaka, s tim da je $A_{11} < 0$.

Za $n = 2$, uvodeći oznake $A_{11} = A, A_{12} = A_{21} = B, A_{22} = C$, dobijamo uslov pozitivne definitnosti:

$$A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0,$$

kao i uslov negativne definitnosti

$$A < 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0,$$

što smo već dobili ranije na drugi način. Za $n = 3$ dobija se uslov pozitivne definitnosti

$$A_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

dok uslov negativne definitnosti glasi

$$A_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Primenjeno na ispitivanje drugog diferencijala, pod pretpostavkom da su parcijalni izvodi drugog reda neprekidni, ovde je

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

i ukoliko je ispunjen uslov pozitivne definitnosti, funkcija f ima minimum u ispitivanoj tački, dok u slučaju negativne definitnosti ima maksimum.

Ako su svi glavni minori determinante $|A_{ij}|$ različiti od nule, ali forma nije definitna ni pozitivno ni negativno, u pozmatranoj tački ne postoji ekstremum. Ukoliko je neki od glavnih minora jednak nuli, SYLVESTERov kriterijum nije odlučiv; u ovom slučaju su potrebna dalja ispitivanja.

2.4.3 Uslovni ekstremumi

Opšti problem uslovnog ekstremuma je: Naći ekstremne vrednosti funkcije $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ u skupu svih tačaka $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ koje zadovoljavaju k datih uslova

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, \varphi_k(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad 1 \le k < n. \tag{42}$$

Za sve pomenute funkcije pretpostavićemo da su diferencijabilne, sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog i drugog reda. Takođe uvodimo pretpostavku da je

$$\operatorname{rang} \left\| \frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)} \right\| = k, \tag{43}$$

što ustvari znači da su jednačine uslova nezavisne.

U prostoru $\mathbf{R}^2$, jedan uslov oblika $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ definiše neku krivu, pa se ustvari traži ekstremum date funkcije po krivoj. Drugim rečima, problem koji rešavamo jeste da među tačkama krive $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ pronađemo one u kojima funkcija $f(\boldsymbol{x})$ dostiže lokalne ekstremume. U prostoru $\mathbf{R}^3$, jedan uslov definiše površ, a dva uslova krivu.

Postoje dva načina rešavanja problema uslovnog ekstremuma, što ćemo objasniti u specijalnom slučaju funkcije dve promenljive. U tom slučaju, treba naći ekstremume funkcije $f(x, y)$ po krivoj $\varphi(x, y) = 0$. Prvi način se primemenjuje ako se uslov $\varphi(x, y) = 0$ može eksplicitno rešiti po y, u obliku $y = g(x)$. Tada se problem svodi na nalaženje ekstremuma funkcije $h(x) = f(x, g(x))$, a dalje se rešava metodima analize funkcija jedne promenljive.

Primer 38. Odrediti minimum funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ pod uslovom $x + y = 2$.

Rešenje. Iz uslova se dobija da je $y = 2 - x$; smenom u funkciji f dobijamo funkciju $h(x) = x^2 + (2 - x)^2$. Iz uslova

$$h'(x) = 2x - 2(2 - x) = 0$$

dobija se stacionarna tačka $x = 1$. Kako je $h''(1) = 4 > 0$, zaključujemo da funkcija h ima minimum u tački $x = 1$, $h(1) = 2$. Za $x = 1$, iz jednačine uslova nalazimo da je $y = 1$. Prema tome, funkcija $f(x, y)$ dostiže uslovni minimum u tački $M(1, 1)$ i $f(1, 1) = 2$.

Postavljeni problem ima i geometrijsko značenje, pa se može i tako rešiti. Naime, $x^2 + y^2$ je kvadrat rastojanja tačke (x, y) do koordinatnog početka, pa smo ovde ustvari našli tačku na pravoj $x + y = 2$ koja je najbliža koordinatnom početku. Minimalna vrednost funkcije f, $f(1, 1) = 2$ je zapravo kvadrat rastojanja koordinatnog početka od date prave. $\square$

Primer 39. Odrediti lokalne ekstremume funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, pod uslovom $x + y + z = 2$.

Rešenje. Ovde se problem sa tri svodi na dve promenljive. Naime, iz uslova dobijamo da je $z = 2 - x - y$, pa tražimo bezuslovni lokalni ekstremum funkcije

$$h(x, y) = f(x, y, 2 - x - y) = x^2 + y^2 + (2 - x - y)^2.$$

Iz sistema jednačina

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x - 2(2 - x - y) = 0,$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y - 2(2 - x - y) = 0,$$

dobijamo $x = y = 2/3$, tako da je $(2/3, 2/3)$ jedinstvena stacionarna tačka funkcije h. Dalje nalazimo da je $A = 2, B = 1, C = 2$, pa je $A > 0$ i $D < 0$ i funkcija h ima minimum u stacionarnoj tački. Nađenim vrednostima x i y odgovara $z = 2 - x - y = 2/3$, što znači da funkcija $f(x, y, z)$ ima minimum u tački $M(2/3, 2/3, 2/3)$, $f(M) = 4/3$.

I u ovom problemu može se dati geometrijska interpretacija: M je tačka na ravni $x + y + z = 2$ koja je najbliža koordinatnom početku, a $f(M)$ je kvadrat rastojanja koordinatnog početka od ravni. $\square$

Čest je slučaj da je uslovom $\varphi(x, y) = 0$ definisana jedna funkcija $y(x)$, ali da se ne može efektivno izraziti u eksplicitnom obliku. Međutim, smatrajući da je y funkcija od x, možemo formalno rešiti problem postupajući u početku isto kao u prethodnom slučaju. Naime, stacionarne tačke funkcije $x \mapsto f(x, y(x))$ dobijaju se kao rešenja jednačine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x)) = 0,$$

odnosno, prema pravilima diferenciranja,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = 0. \tag{44}$$

S duge strane, iz jednačine uslova $\varphi(x, y) = 0$ izlazi da je i

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \text{odnosno}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'(x) = 0. \tag{45}$$

Iz (44) i (45) zaključujemo da, ako je (x, y) stacionarna tačka, onda homogeni sistem algebarskih jednačina po nepoznatima α i β

$$\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\beta = 0$$

ima netrivijalno rešenje $\alpha = 1$, $\beta = y'(x)$. Prema tome, determinanta sistema jednaka je nuli, pa su vrste matrice sistema linearno zavisne. Iz toga izlazi da postoji konstanta λ takva da je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{47}$$

Osim toga, stacionarna tačka zadovoljava i jednačinu uslova, tj.

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{48}$$

Iz jednačina (46)-(48) dobijaju se x, y i λ, pri čemu je λ pomoćni parametar, a (x, y) je tražena stacionarna tačka.

Izloženi način nalaženja uslovne stacionarne tačke može se predstaviti u jednostavnijem obliku, ako se definiše pomoćna funkcija

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y). \tag{49}$$

Leve strane jednačina (46) i (47) su parcijalni izvodi funkcije F po x, odnosno po y, pa je sistem jednačina (46)-(47) isti koji bismo dobili kada bismo tražili stacionarne tačke (bezuslovnog ekstremuma) funkcije F. Jedina razlika je u tome što je λ nepoznato, ali se dodavanjem jednačine (48) mogu istovremeno odrediti x, y i λ.

Ovaj način nalaženja uslovnih stacionarnih tačaka zove se Lagrangeov metod. On se može primeniti i u najopštijem slučaju uslovnog ekstremuma funkcije $f(\boldsymbol{x})$ pod skupom uslova (42). U tom slučaju[1] dodaje se još k pomoćnih parametara $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ i formira se pomoćna funkcija F definisana sa

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_n).$$

[1] Dokaz je u opštem slučaju znatno složeniji od izloženog dokaza za dve promenljive, mada je ideja ista.

Uslovne stacionarne tačke su sada rešenja sistema jednačina koji se dobija kada se svi parcijalni izvodi pomoćne funkcije F izjednače sa nulom, i one se zajedno sa nepoznatim parametrima dobijaju kada se ovom sistemu dodaju još i jednačine uslova. Dakle, za određivanje n koordinata stacionarnih tačaka i k vrednosti parametara $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ imamo $n + k$ jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Karakter stacionarnih tačaka

Ako smo stacionarnu tačku dobili rešavanjem jednačina uslova i zamenom u datu funkciju, onda smo time smanjili broj promenljivih i problem sveli na bezuslovni ekstremum. Karakter stacionarne tačke se onda određuje metodama koje su već izložene za bezuslovne ekstremume.

Za stacionarnu tačku M koja je dobijena LAGRANGEovom metodom, karakter se određuje ispitivanjem znaka drugog diferencijala pomoćne funkcije F:

$$\mathrm{d}^2 F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j, \tag{50}$$

gde su A_{ij} parcijalni izvodi funkcije F izračunati u posmatranoj stacionarnoj tački M. Međutim, između diferencijala $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ postoji k veza koje se dobijaju diferenciranjem jednačina uslova:

$$\mathrm{d}\varphi_j(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(M)}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i = 0, \quad j = 1, \ldots, k \tag{51}$$

Matrica homogenog sistema linearnih jednačina (51) (gde se kao nepoznate posmatraju diferencijali $\mathrm{d}x_i$) je upravo JACOBIjeva matrica (43)

$$\frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)} \|$$

za koju je na početku pretpostavljeno da je ranga k. Stoga je sistemom jednačina (51) određeno k diferencijala u funkciji od preostalih $n - k$; smenom tih rešenja u (51) dobija se kvadratna forma od $n - k$ nezavisnih promenljivih, čiji se znak onda određuje na poznati način.

2.5 Krive i površi u prostoru

Ovaj odeljak je posvećen geometrijskim objektima u prostorima $\mathbf{R}^3$ i $\mathbf{R}^2$.

Tačka koja se slobodno kreće u prostoru $\mathbf{R}^3$ ima sva tri stepena slobode: njene koordinate su međusobno nezavisne. Ako je zadata jedna veza između koordinata, tačka će imati dva stepena slobode i pripadaće površi. Ako postoji još jedna veza između koordinata, tačka opisuje krivu, i ima jedan stepen slobode. Konačno, tri nezavisne veze između koordinata definišu jednu tačku u prostoru, sa nula stepeni slobode. Prema tome, jedna relacija oblika $F(x, y, z) = 0$ definiše površ, a dve relacije ovog oblika definišu krivu, koja se onda može shvatiti i kao presek dve površi. U slučaju kada je uslov oblika $Ax + By + Cz + D = 0$, dobija se ravan, a presek dve ravni je prava, kao poseban slučaj krive u prostoru.

Kao najjednostavniji primer, uzmimo tačku $M(x, y, z)$ kod koje je $z = 0$ - ona pripada xOy ravni. Ako se zada još jedan uslov, recimo $y = 0$, tačka koja zadovoljava oba uslova pripadaće x-osi, a sva tri uslova $x = 0, y = 0, z = 0$ ispunjena su samo u jednoj tački - koordinatnom početku.

2.5.1 Površi u prostoru

Površ u prostoru može biti zadata na sledeće načine:

- **Eksplicitno**, u obliku jednačine $z = f(x, y)$, gde je f data funkcija dve promenljive. Kako funkcija f jednom paru (x, y) pridružuje samo jedno z, sleduje da se u eksplicitnom obliku mogu definisati samo površi sa osobinom da ih svaka prava paralelna z-osi seče najviše u jednoj tački. Analogno, površ može biti zadata eksplicitno i u oblicima $y = f(z, x)$ i $x = f(y, z)$.

- **Implicitno**, u obliku $F(x, y, z) = 0$. Svaka površ može biti zadata u ovom obliku. Kako jednačina $F(x, y, z) = 0$ ne mora imati jedinstveno rešenje po bilo kojoj promenljivoj, u ovom obliku se često zadaju zatvorene površi (tj. površi koje ograničavaju deo prostora).

- **Parametarski**, ako se koordinate x, y, z izraze kao funkcije dva nezavisna parametra u, v: $x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v)$, pri čemu u, v pripadaju određenom domenu $D \in \mathbf{R}^2$. Svaka površ može biti zadata u parametarskom obliku.

Primer 40. Posmatrajmo gornju polovinu sfere sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom 1. Njena „prirodna"jednačina je $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, u implicitnom obliku. Ako se ova relacija reši po z, s obzirom na uslov $z \geq 0$ dobija se eksplicitni oblik $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Konačno, ova jednačina se može iskazati i u parametarskom obliku, i to na različite načine. Uobičajeno je da se uvedu sferne koordinate, tj. uglovi θ i φ, tako da je

$$x = \cos\theta\cos\varphi, \quad y = \cos\theta\sin\varphi, \quad z = \sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Isti sistem parametarskih jednačina opisuje i celu sferu, uz uslov da je $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Međutim, moguće je za parametre uzeti same koordinate x, y, na primer, tako da se dobijaju jednačine

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}, \quad -1 \leq u, v \leq 1;\ u^2 + v^2 \leq 1.$$

Primer 41. Jednačina $x^2 + y^2 = 1$ definiše jednu cilindričnu površ u prostoru. U prostoru $\mathbf{R}^3$ ovo nije jednačina kružnice, kao što se često greši. Jednačina kružnice u ravni $z = 0$ dobija se kao presek ovog cilindra i pomenute ravni; dakle, kružnica je zadata sa $x^2 + y^2 = 1;\ z = 0$. Uopšte, kao što smo već pomenuli, za definisanje krive potrebne su dve jednačine; jednom jednačinom je definisana površ.

2.5.2 Krive u prostoru

Kriva u prostoru može biti zadata na sledeće načine:

- **Kao presek dve površi.** Ako su $F(x, y, z) = 0$ i $G(x, y, z) = 0$ jednačine dve površi (u implicitnom ili eksplicitnom obliku), njihovim presekom je definisana kriva u prostoru.

- **Parametarski.** Ovaj način podrazumeva da su koordinate tačke koja pripada krivoj izražene kao funkcije jedne nezavisne promenljive: $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in I \subset \mathbf{R}$, gde je I neki interval[1].

Primer 42. Jednačinama $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x + y + z = 1$ određena je kriva kao presek sfere i ravni - to je veliki krug sfere (krug u ravni koja prolazi kroz centar sfere).

Primer 43. Jednačinama $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, -\infty < t < +\infty$, definisana je beskonačna zavojnica. Projekcija ove krive na xOy ravan je krug $x^2+y^2 = a^2, z = 0$.

Krivu zadatu parametarskim jednačinama $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$ možemo orijentisati tako što utvrdimo smer obilaska krive u pravcu od tačke sa $t = \alpha$ prema tački sa $t = \beta$ (ili obrnuto). Suprotan smer se može formalno definisati uvođenjem smene promenljive $t = -u$, pri čemu jednačine krive postaju $x = x(-u), y = y(-u), z = z(-u), -\beta \leq t \leq -\alpha$.

Za krivu kažemo da je **prosta kriva** ako različitim vrednostima parametra t odgovaraju različite tačke na krivoj, tj. ako kriva ne preseca samu sebe. U slučaju da početnoj i krajnjoj vrednosti parametra t odgovara ista tačka, kaže se da je kriva **zatvorena**, odnosno da je to **kontura**. **Zatvorena prosta kriva** je ona kod koje se samo početna i krajnja tačka poklapaju, a ostale tačke su međusobno različite za različite vrednosti parametra. Kriva iz primera 42 je prosta zatvorena kriva, a kriva iz primera 43 je prosta kriva koja nije zatvorena.

Pojam krive asocira na geometrijsku interpretaciju linije koja se može grafički predstaviti, ili fizički interpretirati kao zanemarljivo tanka nit u prostoru. Na žalost, iz definicija koje smo do sada dali, takve intuitivne osobine se ne mogu izvesti. Postoje primeri krivih koje se ne mogu nacrtati i čije osobine protivreče intuitivnoj predstavi o krivoj liniji. Analitički opis „geometrijske krive" sadržan je u sledećoj definiciji.

[1] Iako u principu I može biti proizvoljni skup, ograničavamo se na interval, jer dalja razmatranja postaju jednostavnija.

Definicija 2.7 *Za krivu C zadatu parametarskim jednačinama*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad t \in I \tag{52}$$

gde je I interval, kažemo da je **glatka** *ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

1° funkcije x, y, z su neprekidne na I,

2° izvodi $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ postoje i neprekidni su na I,

3° $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 > 0$ za svako $t \in I$.

Ako se interval I može predstaviti kao unija konačno mnogo segmenata I_i na kojima je kriva glatka, a pri tome su funkcije x, y, z neprekidne na I, onda kažemo da je kriva (52) **deo po deo glatka** *na I.*

Razlozi za neke od postavljenih uslova biće čitaocu jasniji u sledećim odeljcima.

Slika 28. Primeri krivih: a) glatka; b) deo po deo glatka; c) nije glatka. (sglatk)

2.5.3 Krive i oblasti u ravni

U dvodimenzionalnom slučaju (krive u $\mathbf{R}^2$), navedene definicije i osobine važe bez izmena, sa $z(t) \equiv 0$. Ovde se pojavljuje i jedna posebna osobina: svaka zatvorena prosta kriva ograničava neku oblast u $\mathbf{R}^2$. Iz ove činjenice proizilazi i drugi način orijentacije proste zatvorene krive (osim po smeru rasta parametra).

Naime, pri utvrđenom smeru obilaska kod proste krive oblast koja je zatvorena krivom ostaje uvek ili sa leve ili sa desne strane u odnosu na smer kretanja. Za prostu zatvorenu krivu kažemo da je **pozitivno orijentisana** ako oblast ostaje sa leve strane. Ovaj smer obilaženja je smer suprotan kretanju kazaljke na časovniku. ! Ako je kriva orijentisana u smeru kazaljke na časovniku, odnosno, ako zatvorena oblast ostaje sa desne strane, kažemo da je orijentacija krive negativna.

Slika 29. Pozitivno orijentisana zatvorena kriva. (sorij)

Povezana oblast u ravni $\mathbf{R}^2$ je svaki skup tačaka $D \subset \mathbf{R}^2$ sa sledećom osobinom: Ako tačke A i B pripadaju oblasti D, onda postoji poligonalna linija koja spaja tačke A i B i koja u celini pripada oblasti D.

Slika 30. a) Povezane oblasti. b) Nepovezana oblast. (spovenep)

Granicu oblasti D čine tačke iz $\mathbf{R}^2$ koje su istovremeno tačke nagomilavanja i oblasti D i komplementa te oblasti, D'. Drugačije iskazano, ako je A skup svih tačaka nagomilavanja oblasti D, a B skup svih tačaka nagomilavanja oblasti D', onda je skup $A \cap B$ granica oblasti D.

Oblast D je **zatvorena oblast** ako je D zatvoren skup. Nije teško pokazati da je ovaj uslov ekivalentan uslovu da oblast D sadrži svoju granicu. Analogno se definiše otvorena oblast. Ako se iz oblasti izuzme njena granica, dobijeni skup se zove **unutrašnjost oblasti** D, u oznaci $\overset{\circ}{D}$. Unutrašnjost svake oblasti je otvoren skup.

Oblast D je **ograničena oblast** ako je skup D ograničen, tj. ako postoji kugla konačnog poluprečnika u kojoj se ceo skup D sadrži. U suprotnom slučaju, oblast D je neograničena. Ovde postoji jedna terminološka bivalentnost: neograničena oblast može imati granicu (videti sliku 31).

Da bismo pojednostavili izlaganje i izbegli "teške" slučajeve, uvodimo sledeću konvenciju:

Slika 31. Neograničena oblast i njena granica. (sneogg)

> Ubuduće ćemo pod pojmom **oblast** u $\mathbf{R}^2$ podrazumevati isključivo povezanu i ograničenu oblast, čija je granica unija konačno mnogo prostih zatvorenih i deo po deo glatkih krivih u $\mathbf{R}^2$, i čija unutrašnjost nije prazan skup.
>
> Da bismo izbegli ponavljanje, ukoliko nije drugačije specificirano smatraćemo uvek da je oblast **zatvorena**, tj. da sadrži svoju granicu.
>
> **Unutrašnjost oblasti** D definiše se kao oblast bez svoje granice, u oznaci $\overset{\circ}{D}$.

Ako je oblast ograničena jednom prostom zatvorenom konturom, onda se ona naziva **jednostruko povezanom**; u suprotnom slučaju je **višestruko povezana** (dvostruko, trostruko, itd.) Jednostruko povezana oblast D ima osobinu da svaka prosta zatvorena kriva koja pripada oblasti D ograničava deo ravni koji u celini pripada toj oblasti. Višestruko povezana oblast uvek poseduje jednu spoljaˇnju konturu koja je ograničava i nekoliko unutaršnjih, koje ograničavaju „rupe” u oblasti.

Slika 32. Jednostruko i višestruko povezane oblasti sa pozitivno orijentisanom granicom. (sjevipo)

Ako krive $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ograničavaju višestruko povezanu oblast, onda se kriva $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ (tj. granica te oblasti) može orijentisati tako da oblast pri „obilaženju” krive C ostaje uvek ili sa leve ili sa desne strane. Orijentacija pri kojoj oblast ostaje sa leve strane naziva se pozitivnom. Uočimo da u slučaju višestruko povezane oblasti, pozitivna orijentacija granice podrazumeva da se spoljašnja kontura orijentiše u pozitivnom smeru, a unutrašnje konture u negativnom.

2.5.4 Prava i ravan u prostoru. Vektori.

Prava koja sadrži tačku $M(x_0, y_0, z_0)$ i ima vektor pravca $\boldsymbol{l} = (a, b, c)$ data je jednačinama

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{53}$$

Ove jednačine zapravo predstavljaju presek dve ravni: $(x - x_0)/a = (y - y_0)/b$ i $(x - x_0)/a = (z - z_0)/c$. Iz (53) se može dobiti parametarski oblik, ako se uvede koeficijent proporcionalnosti t:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{54}$$

U slučaju kada je, na primer, $a = 0$, iz (54) se dobija da je $x = x_0$; to je prava paralelna ravni zOy i koja prolazi kroz tačku $x = x_0$.

Ravan koja prolazi kroz tačku $M(x_0, y_0, z_0)$ i ima vektor normale $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ data je jednačinom

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{55}$$

ili, u razvijenom obliku,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0). \tag{56}$$

Primer 44. Data je ravan $2x + y + 3x + 14 = 0$. Naći jednačinu prave normalne na datu ravan u tački preseka sa pravom $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

Rešenje. Ako napišemo jednačinu date prave u parametarskom obliku $x = 2t,\ y = 2t + 1,\ z = 3t$, zamenom u jednačinu ravni dobijamo $15t + 15 = 0$, odakle su koordinate presečne tačke prave i ravni: $t = -1$; $x = -2, y = -1, z = -3$. Kako je vektor normale na datu ravan $\boldsymbol{n} = (2, 1, 3)$, tražena prava ima jednačinu $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Ako je $\boldsymbol{l} = (a, b, c)$ vektor pravca neke prave, onda je i $\lambda\boldsymbol{l}$ takođe vektor pravca iste prave, za svaki realan broj $\lambda \neq 0$. Pri tome, ako je $\lambda > 0$, vektori $\boldsymbol{l}$ i $\lambda\boldsymbol{l}$ imaju isti smer, a ako je $\lambda < 0$, ovi vektori imaju suprotan smer. **Jedinični vektor** ili **ort** proizvoljnog vektora $\boldsymbol{l}$ definiše se kao $\boldsymbol{l}_0 = \frac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}$. Sledeća osobina se lako dokazuje (videti sliku XXX), ali je važna jer ćemo je veoma često koristiti:

> Ako su α, β, γ uglovi koje jedinični vektor $\boldsymbol{l_0}$ zaklapa sa koordinatnim osama x, y, z, respektivno, onda je
>
> $$\boldsymbol{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\ .$$

2.5.5 Tangenta glatke krive u prostoru

Pojam tangente je kod krivih oblika $y = f(x)$ u ravni povezan sa postojanjem izvoda; u stvari, tangenta se i definiše pomoću izvoda ($\mathcal{M}2$, 3.1.1). Slično tome se definiše i tangenta krive u prostoru.

Neka je data glatka kriva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad t \in I \tag{57}$$

i neka je $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vektor položaja fiksirane tačke M_0 na krivoj (57). Pri tome je $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z = z(t_0)$ za neko $t_0 \in I$. Neka je Δt takav priraštaj promenljive t da je $t + \Delta t \in I$. Vrednosti parametra $t_0 + \Delta t$ odgovara tačka $M(x, y, z)$, gde je $x = x(t_0 + \Delta t), y = y(t_0 + \Delta t), z = z(t_0 + \Delta t)$. Neka je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja tačke M. Vektor sečice M_0M je $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Prema Lagrangeovoj teoremi o srednjoj vrednosti imamo da je

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = (\dot{x}(\xi_1), \dot{y}(\xi_2), \dot{z}(\xi_3)) \cdot \Delta t, \tag{58}$$

gde su ξ_1, ξ_2, ξ_3 neke tačke u intervalu $(t_0, t_0 + \Delta t)$. Kako je Δt skalar kojim se množe sve tri koordinate vektora u (58), vektor $(\dot{x}(\xi_1), \dot{y}(\xi_2), \dot{z}(\xi_3))$ je vektor pravca sečice. Kad $\Delta t \to 0$, tj. kada se tačka M neograničeno približava tački M_0, sečica postaje tangenta. Zbog neprekidnosti izvoda $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, vektor pravca sečice ima graničnu vrednost

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}}{\Delta t} = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)), \tag{59}$$

i pomoću ovog vektora se definiše tangenta krive.

Definicija 2.8 *Tangenta glatke krive (57) u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je prava*

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)}\ . \tag{60}$$

Jedinični vektor pravca tangente je vektor

$$\boldsymbol{t} = \frac{(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)}{\sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0)}}\ . \tag{61}$$

Iz ove definicije izlazi da glatka kriva ima tangentu u svakoj svojoj tački, jer je zbog uslova $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > 0$ vektor tangente definisan u svakoj tački. !

Kako se svaki jedinični vektor može izraziti u obliku (videti stranu 72) $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, iz (61) dobijamo da je

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0)}}, \tag{62}$$

i analogno za $\cos\beta$ i $\cos\gamma$.

Smer tangente je povezan sa orijentacijom krive; pri promeni orijentacije tangenta menja smer (videti tekst na strani 68).

Primer 45. Neka je kriva C data jednačinama $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$. Kao što smo već videli, krivu je moguće izraziti u parametarskom obliku na više načina. Neka je $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ neka druga parametrizacija iste krive, gde je $s = s(t)$ monotona i diferencijabilna funkcija na $[\alpha, \beta]$. Označimo sa $\boldsymbol{t}_t$ i $\boldsymbol{t}_s$ vektore tangente krive u parametrizaciji sa t, odnosno sa s. Kako je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

i analogno za ostale dve koordinate, iz (61) imamo da je

$$\boldsymbol{t}_t = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) \cdot \frac{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|} = \boldsymbol{t}_u \cdot \operatorname{sgn} \dot{s}.$$

Prema tome, ako je s monotono rastuća funkcija, ort tangente ostaje isti, a ako je monotono opadajuća, onda se orijentacija krive menja, tako da ort tangente menja smer.

Za glatku krivu može se definisati dužina luka između dve tačke na krivoj, kao granična vrednost obima upisane poligonalne linije, na način analogan dvodimenzionalnom slučaju ($\mathcal{M}2$, 4.6.1). Pokazuje se da je za orijentisanu krivu datu u parametarskom obliku, dužina luka od početne tačke na krivoj (sa $t = \alpha$) do proizvoljne tačke $M(x(t), y(t), z(t))$ data sa

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{z}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, \mathrm{d}t \tag{63}$$

Funkcija $t \mapsto s(t)$ je pod datim uslovima diferencijabilna, pa se s može uzeti kao novi parametar za definisanje krive. Očigledno je svaka tačka na prostoj glatkoj krivoj jednoznačno određena dužinom luka od početne tačke. S obzirom da je svaku glatku krivu moguće parametrizovati na ovaj način, dužina luka se naziva **prirodnim parametrom**, a ovakav način parametrizacije je **prirodna parametrizacija**.

Primer 46. Posmatrajmo zavojnicu $x = a\cos t, y = a\sin t, z = at,\ t \geq 0,\ a > 0$. Primenom formule (63) nalazimo da je prirodni parametar za ovu krivu $s = a\sqrt{2}t$, odakle je $t = s/(a\sqrt{2})$. Prema tome, prirodna parametrizacija date krive je $x = a\cos s/(a\sqrt{2}), y = a\sin s/(a\sqrt{2}), z = s/\sqrt{2}$.

Sve što je rečeno za krive u prostoru, važi i za krive u ravni, s tim što se u ravni $\mathbf{R}^2$ kriva može zadati i jednačinama

$$F(x, y) = 0 \quad \text{ili} \quad y = f(x).$$

Nije teško videti da je u oba slučaja vektor tangente u tački (x, y) dat sa

$$\boldsymbol{t} = (1, y'(x)), \quad \text{odnosno} \quad \boldsymbol{t} = (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y).$$

2.5.6 Tangentna ravan i normala glatke površi

Definicija glatke površi

Glavna motivacija za definiciju glatke površi jeste mogućnost konstrukcije tangentne ravni u svakoj tački te površi. Videli smo da u slučaju glatke krive uslov $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > 0$ obezbeđuje postojanje tangente. Pokazaće se da je analogan uslov kod površi takođe dovoljan za postojanje tangentne ravni.

Definicija 2.9 *Neka je površ S u prostoru data jednačinom $F(x, y, z) = 0$, gde je F neprekidna i diferencijabilna funkcija, sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda, pri čemu je $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ u svakoj tački površi S. Tada kažemo da je površ S* **glatka površ**.

Slučaj kada je površ zadata eksplicitnom jednačinom $z = f(x, y)$, tj. $f(x, y) - z = 0$, svodi se na implicitan oblik sa $F(x, y, z) = f(x, y, z) - z$. Prema tome, ovakva površ je glatka ako je funkcija f neprekidna i diferencijabilna, sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda. Uslov $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ se svodi na $f_x^2 + f_y^2 + 1 > 0$, što je uvek tačno.

Izvešćemo sada uslov glatkosti površi koja je zadata u parametarskom obliku

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \qquad (u, v) \in D. \tag{64}$$

Uvedimo oznake

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \tag{65}$$

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,\ F = x_u x_v + y_y y_v + z_u z_v,\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \tag{66}$$

Ove oznake ćemo koristiti i u kasnijim delovima knjige. Pretpostavimo da se iz sistema (64) mogu eliminisati parametri, tj. da tačke na površi zadovoljavaju uslov $F(x, y, z) = 0$, gde je F neka funkcija. Diferenciranjem ove jednakosti po u i v dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u &= 0 \\ F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v &= 0 \end{aligned} \tag{67}$$

Minori reda dva u ovom sistemu su $A, -B, C$. Ako je kriva glatka, odnosno ako je $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, onda sistem (67) ima netrivijalno rešenje po F_x, F_y, F_z, odakle se (primenom uobičajenih algebarskih metoda) dobija da je

$$(68) \qquad F_x = \lambda A, \quad F_y = \lambda B, \quad F_z = \lambda C,$$

gde je $\lambda \neq 0$ koeficijent proporcionalnosti (koji zavisi od u i v). Dakle, iz uslova glatkosti $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ izlazi da je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Obrnuto, ako je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, onda je rang sistema (67) jednak dva, pa sistem ima netrivijalno rešenje, što znači da je $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$. Prema tome, u parametarskom slučaju imamo sledeću definiciju glatke površi.

Definicija 2.10 *Neka je površ S data parametarskim jednačinama (64), gde su $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ neprekidne i diferencijabilne funkcije, sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda, pri čemu je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ u svakoj tački $(u,v) \in D$. Tada kažemo da je površ S glatka.*

Nije teško proveriti da je

$$(69) \qquad A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

tako da se uslov glatkosti u parametarskom obliku može izraziti i u obliku $EG - F^2 \neq 0$.

Tangentna ravan i normala

Neka je glatka površ S data sa $F(x,y,z) = 0$. Uočimo na površi S tačku $M(x_0, y_0, z_0)$ i posmatrajmo proizvoljnu glatku krivu C koja pripada površi S i sadrži tačku M_0. Neka su parametarske jednačine krive C date sa $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, pri čemu se tačka M_0 dobija za vrednost parametra t_0. Diferenciranjem izraza

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

po t, u tački $t = t_0$, dobija se

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{M_0} \cdot \dot{x}(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \cdot \dot{y}(t_0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{M_0} \cdot \dot{z}(t_0) = 0,$$

što znači da je za proizvoljnu glatku krivu C koja prolazi kroz M_0, vektor tangente ortogonalan na vektoru **grad** $F(M_0)$. Iz ovoga zaključujemo da sve tangente na glatke krive koja prolaze kroz M_0 pripadaju jednoj ravni, čiji vektor normale je **grad** $F(M_0)$. Ta ravan se naziva **tangentna ravan**; iz izvedenog sleduje i njena jednačina.

Definicija 2.11 *Neka je glatka površ S data jednačinom $F(x, y, z) = 0$. Tangentna ravan u tački $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ data je jednačinom*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0, \tag{70}$$

gde se parcijalni izvodi računaju u tački M_0.

Kako je kod glatke površi **grad** $F(M_0) \neq 0$ za svako M_0 na površi, to znači da glatka površ ima tangentnu ravan u svakoj svojoj tački.

U slučaju kada je površ zadata eksplicitnom jednačinom $z = f(x, y)$, imamo da je $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pa je tangentna ravan definisana sa

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0), \tag{71}$$

pri čemu se parcijalni izvodi računaju u tački (x_0, y_0). U parametarskom slučaju, na osnovu relacija (68) zaključujemo da jednačina tangentne ravni glasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{72}$$

gde su koeficijenti A, B, C izračunati u tački (u_0, v_0) koja odgovara tački M_0.

Normala na površ je prava koja je normalna na tangentnoj ravni; iz definicije 2.11 se neposredno dobija da je vektor normale na površ jednak **grad** F, a da je jednačina normale u tački M_0 data sa

$$\frac{x - x_0}{F_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(M_0)}\ . \tag{73}$$

Ako je površ zadata eksplicitnom jednačinom $z = f(x, y)$, vektor normale je $(f_x, f_y, -1)$. U slučaju da je površ zadata parametarski, vektor normale je (A, B, C).

Primetimo da se vektor normale može orijentisati na dva načina ($\boldsymbol{n}$ i $-\boldsymbol{n}$).

Ekviskalarne linije i površi

Kriva $f(x, y) = C$ naziva se **ekviskalarnom linijom**; u topografskom kontekstu, gde $z = f(x, y)$ predstavlja visinu iznad tla (ili nadmorsku visinu), ova linija se naziva izohipsom. Na ekviskalarnoj liniji je očigledno $\mathrm{d}f(x, y) = 0$, odnosno

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = \langle \mathbf{grad}\ f,\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}, =\rangle 0,$$

gde smo sa $\boldsymbol{t}$ označili vektor tangente, $\boldsymbol{t} = (\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y)$. Odavde zaključujemo da je vektor gradijenta normalan na ekviskalarnoj liniji. Izvod u pravcu tangente na ekviskalarnu liniju jednak je nuli; to je pravac u kome se funkcija ne menja.

Ako je data funkcija tri promenljive $f(x, y, z)$, površ $f(x, y, z) = C$ je njena **ekviskalarna površ**. U prethodnom delu smo dokazali da je **grad** f vektor normale na ovu površ; dakle, gradijent je normalan na ekviskalarnoj površi.

Glava 3

Integrali

Krivolinijski, višestruki i površinski integrali, koji su predmet ove glave, imaju veliki značaj u primenama, posebno u Fizici i u Elektrotehnici. Ortodoksnim matematičarima bi smetala činjenica da studenti Elektrotehnike još u prvoj godini koriste ove integrale, ne znajući njihovu strogu zasnovanost. Interakcija matematičke teorije i njene primene u ovom slučaju je dvosmerna. Pretpostavljamo da će čitaoci kojima je poznata fizička interpretacija raznih vrsta integrala, lakše usvojiti teorijske koncepte na kojima su ovi integrali zasnovani.

3.1 Mera i integral

3.1.1 Od dužine duži do površine površi u prostoru

Oni koji koriste matematiku za rešavanje praktičnih problema, ne razmišljaju o značenju geometrijskih pojmova dužine, zapremine i površine. Iako u stvarnom svetu svaki objekat ima površinu i zapreminu, u matematici, kao modelu stvarnosti, dužina, površina i zapremina (ove tri kategorije spadaju u širi pojam **mere**) zahtevaju definiciju. Definicija mora biti takva da obuhvati što širu klasu objekata, a da kod poznatih geometrijskih tela mera koju dobijamo iz definicije bude ista kao i mera koju koristimo u svakodnevnom životu. Ovo nije lak zadatak i nemamo nameru da se detaljno njime bavimo. Izložićemo samo skicu definicija, da bi čitalac u sledećim odeljcima gde ćemo koristiti pojmove dužine krivih ili površine dela površi, bio uveren da su stvari pod kontrolom i da se ne vrtimo u krug.

• **Dužina duži.** Prvi pojam u geometrijskoj teoriji mere jeste dužina duži. Ova veličina je definisana za svaku duž i predstavlja rastojanje između njenih krajnjih tačaka.

• **Površina mnogougla.** Polazeći od dužine duži, lako je definisati površinu pravougaonika, kao proizvod dužina njegovih osnovica. Isto kao dužina za duž, površina postoji i dobro je definisana za svaki pravougaonik. Koristeći se definicijom površine pravougaonika i geometrijskim odnosima, lako se izračunava i definiše površina proizvoljnog paralelograma i površina trougla. Kako se svaki mnogougao može izdeliti na trouglove, njegova površina se definiše i izračunava kao zbir površina trouglova od kojih je sastavljen.

• **Površina oblasti u ravni.** Dalje od mnogougla, teorija postaje mnogo složenija i oslanja se na analizu, umesto na geometriju. Neka je D ograničena i zatvorena povezana oblast u ravni $\mathbf{R}^2$. Ako je P_u površina proizvoljnog mnogougla koji je sadržan u oblasti D i ako je P_o površina bilo kakvog mnogougla koji sadrži oblast D, onda je logično da površina $P(D)$ mora da zadovoljava uslov da je $P_u \leq P(D) \leq P_o$. Ako se granice mnogouglova dovoljno približe granici oblasti D, razlike između površina $P_u, P(D)$ i P_o treba da postaju zanemarljive, tj. da teže nuli. Iz ovog razmatranja proizilazi definicija površine proizvoljne oblasti D: *Ako je*

$$\sup\{P_u\} = \inf\{P_o\} = P,$$

onda kažemo da oblast D ima površinu $P(D) = P$. Ova definicija počinje sa „ako”, što upućuje na zaključak da infimum u navedenoj formuli ne mora uvek biti jednak supremumu. Zaista, postoje primeri oblasti za koje ova jednakost ne važi (i koje, prema tome, nemaju površinu), ali su oni previše komplikovani da bi bili ovde razmatrani. Međutim, dokazano je da *svaka oblast ograničena deo po deo glatkom krivom ima površinu.* Ovu činjenicu ćemo koristiti u sledećoj glavi.

U konkretnim primerima, nije lako izračunati površinu koristeći se samo definicijom. Ali, ako znamo da oblast ima površinu, onda je možemo izračunati svakim postupkom za koji dokažemo da daje isti rezultat kao kada bismo radili po definiciji. Na primer, površina ograničena pozitivnom krivom $y = f(x)$, x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$ izražava se integralom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ($\mathcal{M}2$, 4.1).

• **Zapremina jednostavnih geometrijskih tela.** Za pravougli paralelepiped, zapremina se definiše kao proizvod dužina njegovih stranica. Zapremina proizvoljnog paralelepipeda, a zatim prizme ili piramide definiše se preko geometrijskih činjenica. Zapremina proizvoljnog poliedra definiše se i izračunava kao zbir zapremina piramida na koje može da se razloži.

• **Zapremina tela u prostoru.** Zapremina proizvoljne oblasti u prostoru definiše se na sličan način kao površina oblasti u ravni. Neka je D ograničena oblast u prostoru $\mathbf{R}^3$. Označimo sa V_u zapreminu proizvoljnog poliedra koji je sadržan u oblasti D i neka je $\{V_u\}$ skup svih takvih V_u. Analogno, sa V_o označavamo zapreminu proizvoljnog poliedra koji sadrži oblast D. *Ako je*

$$\sup\{V_u\} = \inf\{V_o\} = V,$$

onda kažemo da oblast D ima zapreminu V. Postoje oblasti koje nemaju zapreminu, ali za nas je bitno da *svaka oblast u $\mathbf{R}^3$ koja je ograničena sa konačnim brojem glatkih površi, ima zapreminu.* Isto kao u slučaju površina, ukoliko znamo da oblast ima zapreminu onda možemo da je nađemo na drugi način, osim po definiciji. To dovodi do raznih postupaka baziranih na integralnom računu.

• **Dužina luka krive.** Neka je jednačinama $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, zadata kriva u prostoru sa krajevima u tačkama A i B, koje odgovaraju početnoj Ako na datoj krivoj izberemo konačan broj tačaka i spojimo ih dužima, dobijamo poligonalnu liniju čiju dužinu l_u definišemo kao zbir dužina duži od kojih se sastoji. Neka je $\{l_u\}$ skup svih brojnih vrednosti dužina poligonalnih linija konstruisanih na opisani način. *Ako postoji*

$$\sup\{l_u\} = l < +\infty,$$

kažemo da data kriva ima dužinu l. Iako postoje krive koje nemaju dužinu, klasa krivih koje je imaju je prilično široka. Na primer, *za svaku glatku krivu postoji dužina luka između dve proizvoljne tačke.* Problem izračunavanja dužine luka glatke krive (tzv. **rektifikacija** rešava se primenom integralnog računa, isto kao u ravni ($\mathcal{M}2$, 4.6.1):

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t.$$

• **Površina dela površi u prostoru.** Jedan praktičan način da odredimo površinu neke figure u prostoru bi bio da je prekrijemo dovoljno sitnom mrežom, na primer sa kvadratićima površine 1mm^2, označimo na mreži deo koji je zahvaćen figurom, razvijemo mrežu i onda prebrojimo koliko kvadratića je bilo potrebno da se obuhvati cela figura. Otprilike ovakva procedura je prihvaćena i u matematici za *definiciju* površine dela površi.

Neka je površ zadata jednačinom $F(x, y, z) = 0$. Pretpostavićemo da je površ glatka, iz čega izlazi da u svakoj tački postoji tangentna ravan. Označimo sa S ograničen deo površi čiju površinu želimo da definišemo i izračunamo. Podelimo površ S mrežom glatkih krivih na n delova, tzv. ćelija, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. U svakoj ćeliji izaberimo po jednu tačku na površi, nazovimo je $\boldsymbol{\xi}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ćelije σ_i i tačke $\boldsymbol{\xi}_i$ zajedno čine jednu **podelu** površi S; nazovimo tu podelu Π_n. **Dijametar** skupa σ definiše se kao

$$\operatorname{diam} \sigma = \sup_{x,y\in\sigma} d(x,y).$$

Norma podele Π definiše se kao maksimalni diametar neke ćelije podele:

$$\|\Pi_n\| = \max_{1\le i\le n} \operatorname{diam} \sigma_i.$$

Sada nastavljamo na sledeći način: u svakoj tački ξ_i konstruišemo tangentnu ravan na površ S. Neka je s_i ortogonalna projekcija ćelije σ_i na odgovarajuću tangentnu ravan. Kako se svaka ćelija σ_i dobija kao deo površi ograničen glatkim krivama, moše se dokazati da je s_i oblast u ravni ograničena deo po deo glatkom krivom. Prema tome, oblast s_i ima definisanu površinu, nazovimo je $P(s_i)$. Skup oblasti $\{s_i\}$ čini mrežu ravnih oblasti kojom pokrivamo S; dakle zbir $\sum P(s_i)$ može se uzeti kao aproksimacija tražene površine dela površi S. Površinu $P(S)$ sada definišemo kao graničnu vrednost

$$P(S) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \|\Pi_n\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(s_i),$$

pri čemu se dokazuje da pod navedenim uslovima (glatka površ) ova granična vrednost postoji.

bullet **Mera granice.** U opisanoj konstrukciji uveli smo tri vrste mere: dužinu, površinu i zapreminu. Geometrijski objekti na koje se ove mere odnose su:

$$\begin{aligned}
\text{duž ili deo glatke krive } &\to \text{dužina}\\
\text{oblast u ravni ili deo glatke površi} &\to \text{površina}\\
\text{oblast u prostoru} &\to \text{zapremina}
\end{aligned}$$

Granice duži ili glatke krive su tačke; njihova dužina jednaka je nuli. Granice oblasti u ravni ili dela glatke površi su glatke krive, čija površina je jednaka nuli (iako izgleda očigledno, ovo tvrđenje se dokazuje). Isto tako, granice oblasti u prostoru su glatke površi, čija zapremina je jednaka nuli. Prema tome, mera granice je u svim navedenim slučajevima jednaka nuli.

• **Aditivnost mere.** Osobina da je mera unije konačno mnogo disjunktnih delova jednaka zbiru mere delova, zove se aditivnost. Aditivnost se koristi u svakodnevnom iskustvu, kada se, na primer, površina stana izračunava kao zbir površina prostorija u stanu. S obzirom da se mera proizvoljnih objekata (tj. njihova dužina, površina ili zapremina) u matematici uvodi definicijama koje smo naveli u prethodnom tekstu, aditivnost je osobina koju treba dokazati polazeći od definicije. Ispostavlja se da mera u sva tri slučaja ima osobinu aditivnosti. Dakle, ako je $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, gde su $B_1, \ldots, B_n$ skupovi koji imaju meru $m(B_i)$, onda i skup B ima meru $m(B)$ i važi da je

$$m(B) = m(B_1) + \cdots + m(B_n).$$

Na veoma sličan način kao za geometrijske objekte, mera se može uvesti i u $\mathbf{R}^n$ $(n > 3)$, gde nema geometrijsku interpretaciju. Daljom generalizacijom mera se može definisati i u široj klasi prostora, što je već predmet jedne zasebne oblasti matematike koja se zove teorija mere. U sledećem delu mi samo načinjemo ovu oblast, koliko nam je potrebno za opštu definiciju integrala.

3.1.2 Definicija integrala na metričkom prostoru

U ovom odeljku pokazaćemo da se konstrukcija koja dovodi do RIEMANNovog integrala realne funkcije na segmentu $[a, b]$ može sasvim jednostavno proširiti na proizvoljan metrički prostor. Podsetimo se najpre definicije RIEMANNovog integrala. U odnosu na definiciju iz $\mathcal{M}2$(odeljak 4.1), ovde ćemo uvesti male izmene u notaciji, kako bismo izlaganje prilagodili generalizaciji koja nam je ovde cilj.

Neka je $x \mapsto f(x)$ realna funkcija definisana na intervalu $[a, b]$ $(a < b)$. Tačkama

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

interval $[a, b]$ podeljen je na n disjunktnih delova:

$$A_1 = [a, x_1),\ A_2 = [x_1, x_2), \ldots, A_n = [x_{n-1}, b].$$

U svakom od intervala A_i biramo po jednu tačku ξ_i; tako je definisana jedna podela Π:

$$\Pi = \Pi(A_1, \ldots, A_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \{A_1, \ldots, A_n, \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Pod normom podele Π podrazumevamo dužinu najdužeg od intervala A_i:

$$\|\Pi\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Za datu podelu, integralnu sumu definišemo sa

$$S(f, \Pi, [a, b]) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(A_i),$$

gde je sa $m(A_i)$ označena dužina intervala A_i. RIEMANNov integral funkcije f na $[a, b]$ je granična vrednost integralnih suma, koja se dobija kada $n \to +\infty$, pri čemu norma podela teži nuli, ukoliko takva granična vrednost postoji i nezavisna je od načina na koji se podele konstruišu. Preciznije, $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Pi) \quad \|\Pi\| < \delta \Rightarrow |S(f, \Pi, [a, b]) - I| < \varepsilon.$$

Ispostavlja se da se sve bitne osobine integrala zadržavaju ako se u navedenoj definiciji umesto $[a, b]$ uzme proizvoljan skup X na kome je definisana funkcija f, podeli se na disjunktne delove A_i, a umesto dužine segmenata podele uzme se neka prikladna mera m skupova A_i. Sada integralne sume i sama definicija integrala ostaju isti, ali se dobijaju različite vrste integrala, u zavisnosti od skupa X i mere m.

Slika 33. Ka generalizaciji integrala. (genint)

Definicija 3.1 *Neka je X dati neprazan skup i neka je m realna funkcija definisana na nekoj familiji (kolekciji, skupu) $\mathcal{F}$ podskupova skupa X, pri čemu je*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \tag{1}$$

za svaka dva disjunktna skupa $A, B \in \mathcal{F}$ takva da i $A \cup B \in \mathcal{F}$. Funkcija m zove se **mera**. *Osobina (1) zove se* **aditivnost**. *Drugačije rečeno, mera je aditivna funkcija na nekoj kolekciji podskupova skupa X.*

Primedba. Matematičkom indukcijom se jednostavno dokazuje da uslov (1) povlači da je

$$m(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = m(A_1) + \cdots + m(A_k), \tag{2}$$

za svaki prirodan broj k, gde su $A_1, \ldots, A_k$ disjunktni skupovi iz $\mathcal{F}$ takvi da i njihova unija pripada familiji $\mathcal{F}$.

Primer 47. 1° Neka je X oblast u ravni i neka je m površina. Familiju $\mathcal{F}$ čine oni podskupovi skupa X koji imaju definisanu površinu, u smislu izlaganja u 3.1.1.

2° Neka je $X = \mathbf{R}$. Za $I = [a, b]$ definišimo

$$m(I) = \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Kako je podintegralna funkcija integrabilna na $(-\infty, +\infty)$, $m(I)$ je konačno za svaki interval I. Aditivnost je zadovoljena zbog osobine aditivnostu integrala. Dakle, m je mera, definisana na familiji svih intervala.

3° Neka je X proizvoljan neprazan skup i neka je $x_0 \in X$ fiksirana tačka. Funkcija m definisana sa

$$m(A) = I_{x_0 \in A} = \begin{cases} 1, & \text{ako } x_0 \in A \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

je mera definisana za svaki podskup skupa X, dakle ovde je $\mathcal{F}$ partitivni skup skupa X. Zaista, ako su A i B proizvoljni disjunktni podskupovi skupa X, onda su nogući sledeći slučajevi: (i) $x_0 \in A$, $x_0 \notin B$. U ovom slučaju je $m(A) = 1$, $m(B) = 0$, a kako $x_0 \in A \cup B$, onda je $m(A \cup B) = 1$. (ii) $x_0 \notin A$, $x_0 \in B$. Ovaj slučaj je ekvivalentan prethodnom. (iii) $x_0 \notin A, x_0 \notin B$. Tada $x_0 \notin A \cup B$, pa je $m(A \cup B) = m(A) = m(B) = 0$. Prema tome, aditivnost je ispunjena u sva tri moguća slučaja, pa je m zaista mera.

S obzirom da realni primeri mere uključuju dužinu, površinu, zapreminu, jasno je da ne možemo zahtevati da mera bude definisana na svakom podskupu skupa X, jer, kao što smo već ranije ustanovili, postoje skupovi koji, na primer, nemaju površinu. Zato se kolekcija $\mathcal{F}$ mora dovoljno suziti. Minimalni uslovi koje $\mathcal{F}$ mora da ispunjava da bi se omogućila konstrukcija integrala, dati su u sledećoj definiciji.

Definicija 3.2 *Neka je X proizvoljan neprazan skup i neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa X za koju važi:*

1° $X \in \mathcal{F}$.

2° $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

3° Za svako $A \in \mathcal{F}$ postoji konačno mnogo disjunktnih skupova $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$, tako da je $A' = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k$.

Familija $\mathcal{F}$ koja ima navedene osobine naziva se **poluprstenom** *nad skupom X. Svaki neprazan i različit od X skup iz poluprstena $\mathcal{F}$ nazivamo* **ćelijom**.

Uslov 2° znači da ili $A' \in \mathcal{F}$ (za $k = 1$) ili se A' može predstaviti kao unija konačno mnogo disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$. Dakle, svako $A \in \mathcal{F}$ pripada bar jednoj podeli skupa X na disjunktne podskupove: $A, A_1, \ldots, A_k$ je jedna takva podela.

Primer 48. 1° Partitivni skup svakog skupa X čini jedan poluprsten. Međutim, ovo je suviše široka struktura da bi se mogla upotrebiti za definisanje integralne podele.

2° Neka je $X = [a, b], a < b$. Ćeliju definišemo kao proizvoljan interval (otvoren ili zatvoren sa jedne ili sa obe strane) koji se sadrži u $[a, b]$. Nije teško proveriti da su ispunjena sva tri uslova iz definicije 3.2, pa je skup svih ćelija $\mathcal{F}$ poluprsten nad $[a, b]$. Kako su ćelije intervali, za meru se može uzeti dužina intervala:

$$m((\alpha, \beta)) = m([\alpha, \beta]) = m((\alpha, \beta]) = m([\alpha, \beta)) = \beta - \alpha.$$

Ako bismo za $\mathcal{F}$ uzeli samo otvorene (ili samo zatvorene) intervale, $\mathcal{F}$ ne bi bio poluprsten (zbog uslova 3°, koji ne bi bio ispunjen).

3° Neka je X deo glatke krive u prostoru, zadate parametarskim jednačinama $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$. Neka je $\mathcal{F}$ skup lukova krive između proizvoljne dve tačke sa parametrom $t \in [\alpha, \beta]$, sa ili bez krajnjih tačaka. $\mathcal{F}$ je poluprsten. Mera ćelije može biti dužina luka kojim je ćelija određena. Ovako definisana mera je pozitivna za svaku ćeliju. Opisaćemo sada i drugačiju mogućnost. Ako je ćelija S definisana kao deo luka između tačaka A (sa $t = \alpha$) i B (sa $t = \beta$), neka je $m(S) = x(\beta) - x(\alpha)$. Tada je m aditivna funkcija, dakle jeste mera, ali ne mora biti pozitivna za svaku ćeliju.

4° Neka je X zatvorena oblast u ravni (videti stranu 71). Ćeliju definišemo kao podoblast $S \subset X$ koja je ograničena sa konačno mnogo glatkih krivih, pri čemu granice mogu, ali ne moraju biti uključene u S. Skup $\mathcal{F}$ svih ćelija čini poluprsten. Mera ćelije može biti površina ćelije.

5° Ista konstrukcija kao pod 4^{circ} može se ostvariti ako se za X uzme deo glatke površi, umesto dela ravni. Mera je ovde takođe površina.

6° Neka je X deo prostora ograničen glatkim površima. Familiju $\mathcal{F}$ čine podskupovi X koji su takođe ograničeni glatkim površima, sa ili bez graničnih površi. Mera ćelije je njena zapremina.

Napomenimo da u svim navedenim primerima meru možemo izbrati i na drugačiji način, a mi smo naveli samo standardne mere, koje dovode do klasičnih tipova integrala i imaju široku primenu.

Slika 34. Ilustracija uslova 3° u raznim slučajevima poluprstena. (polup3)

U svakom od slučajeva iz primera 48, osim prvog, ćelije su delovi skupa X koji imaju granice istog tipa kao X (tačke, glatke krive ili glatke površi). Ovo je uobičajen način definisanja ćelija, koji dovodi do integrala, po šemi koju ćemo sada izložiti.

Ako je na skupu X zadata metrika d, može se definisati **dijametar** ćelije A:

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ disjunktne ćelije takve da je $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$. U svakoj od ćelija A_i izaberimo jednu tačku ξ_i, $i = 1, \ldots, n$. Skup ćelija zajedno sa skupom izabranih tačaka čini jednu **podelu** skupa X, koju ćemo označiti sa Π:

$$\Pi = \Pi(A_1, \ldots, A_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \{A_1, \ldots, A_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}.$$

Norma podele definiše se kao najveći dijametar neke ćelije podele:

$$\|\Pi\| = \max_{1 \le i \le n} \operatorname{diam}\ A_i.$$

Ideja kod definicije i konstrukcije integrala jeste da se posmatraju sve "sitnije" podele, tj. podele kod kojih $\|\Pi\| \to 0$. Pri tome moramo pretpostaviti da takve podele postoje, tj. da je u poluprstenu $\mathcal{F}$ za svako δ moguće naći podelu Π sa $\|\Pi\| < \delta$.

Definicija 3.3 *Neka je X neprazan skup na kome su definisani: metrika d, poluprsten $\mathcal{F}$ i mera m, pri čemu pretpostavljamo da za svako $\delta > 0$ postoji podela Π sa $\|\Pi\| < \delta$. Neka je f realna funkcija definisana na skupu X. Za proizvoljnu podelu $\Pi = \Pi(A_1, \ldots, A_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ definišemo* **integralnu sumu***:*

$$S(f, \Pi, X) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(A_i).$$

Ako postoji realan broj I takav da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Pi) \quad \|\Pi\| < \delta \Rightarrow |S(f, \Pi, X) - I| < \varepsilon,$$

onda I nazivamo integralom funkcije f u odnosu na meru m, u oznaci

$$I = \int_X f(x)\, \mathrm{d}m(x). \tag{3}$$

Ako integral (3) postoji, kažemo da je funkcija f **integrabilna** *na skupu X, po meri m.*

Za sada, kao prototip konstrukcije opisane u Definiciji 3.3 poslužiće nam RIEMANNov integral na segmentu $[a, b]$, gde su ćelije definisane podeonim tačkama, a mera ćelije je njena dužina. Oznaka (3) za integral upotrebljava se samo u opštem slučaju, gde nije precizirano šta je skup X i koja mera se koristi. U sledećim odeljcima detaljno ćemo izučavati integrale koji se dobijaju u posebnim slučajevima naznačenim u primeru 48.

Isto kao kod RIEMANNovog integrala na $\mathbf{R}$, za ograničenu funkciju može se definisati donja i gornja integralna suma:

$$S_*(f, \Pi, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i m(A_i), \quad \text{odnosno} \quad S^*(f, \Pi, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i m(A_i),$$

gde je

$$m_i = \inf_{(x,y) \in A_i} f(x, y), \quad M_i = \sup_{(x,y) \in A_i} f(x, y).$$

Ako je mera m nenegativna, tj. $m(A) \geq 0$ za svako $A \in \mathcal{F}$, na isti način kao u $\mathbf{R}$ dokazuje se da važi sledeća teorema:

Teorema 3.1 *Ograničena funkcija f je integrabilna na X po nenegativnoj meri m ako i samo ako postoji realan broj I takav da je*

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} S_*(f, \Pi, D) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} S^*(f, \Pi, D) = I,$$

nezavisno od izbora podela Π. Ako ova jednakost važi, onda je $I = \int_X f(x)\, \mathrm{d}m(x)$.

Napomenimo da je moguće integralne sume definisati i drugačije nego što je to urađeno u definiciji 3.3. Na primer, moguće je kodomen funkcije f (dakle, neki interval realnih brojeva) izdeliti na delove $B_1, \dots, B_n$, a zatim definisati ćelije na X kao $A_i = f^{-1}(B_i)$. Tako se dobijaju druge vrste integrala, koje nećemo izučavati u ovom kursu.

3.1.3 Osobine integrala

Ovde ćemo dati pregled osobina integrala koje važe u opštem slučaju. Sve ove osobine proizilaze iz odgovarajućih osobina integralnih suma, aditivnosti mere i osobina poluprstena. U sledećim teoremama se podrazumeva da je X metrički prostor sa metrikom d, na kome je definisan poluprsten $\mathcal{F}$ i mera m.

Teorema 3.2 *Integral funkcije $f(x) \equiv 1$ jednak je meri skupa X, tj.*

$$\int_X \mathrm{d}m(x) = m(X).$$

Dokaz. Neka je $\Pi = \Pi(A_1, \dots, A_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ proizvoljna podela skupa X. Odgovarajuća integralna suma sa funkcijom $f(x) \equiv 1$ je

$$S(f, \Pi, X) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot m(A_i).$$

Kako su A_i disjunktne ćelije i kako je $A_1 \cup \dots \cup A_n = X \in \mathcal{F}$, primenom aditivnosti mere zaključujemo da je $S(f, \Pi, X) = m(X)$. Dakle, sve integralne sume imaju istu vrednost $m(X)$, pa prema tome, integral postoji i jednak je $m(X)$.

Teorema 3.3 *Integral je linearni operator definisan na skupu integrabilnih funkcija. Drugim rečima, ako su funkcije f i g integrabilne na X po meri m, onda je i funkcija $\alpha f + \beta g$ integrabilna, gde su α i β proizvoljni realni brojevi, pri čemu je*

$$\int_X \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, \mathrm{d}m(x) = \alpha \int_X f(x)\, \mathrm{d}m(x) + \beta \int_X g(x)\, \mathrm{d}m(x). \tag{4}$$

Dokaz. Ova osobina je direktna posledica linearnosti integralnih suma. Naime, imamo da je

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g, \Pi, X) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) m(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(A_i) + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) m(A_i) \\ &= \alpha S(f, \Pi, X) + \beta S(g, \Pi, X), \end{aligned}$$

pa se u graničnom procesu dobija jednakost (4).

Teorema 3.4 *Ako je funkcija f integrabilna na X, onda je integrabilna i na svakom skupu $A \in \mathcal{F}$. Ako je $A = B \cup C$, gde su B i C disjunktni skupovi iz $\mathcal{F}$, onda je*

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}m(x) + \int_C f(x)\,\mathrm{d}m(x). \tag{5}$$

Teorema 3.4 tvrdi zapravo da je funkcija

$$m_f(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}m(x)$$

aditivna, odnosno da je i to mera na $\mathcal{F}$ (videti primer 47, 2°). Dokaz ove teoreme, kao i sledećih nekoliko, izostavljamo, jer su analogni dokazima u slučaju običnih Riemannovih integrala, koji su izloženi u $\mathcal{M}2$. !

Teorema 3.5 *Neka je m nenegativna mera. Ako je f integrabilna funkcija na X i ako je $\alpha \le f(x) \le \beta$ za svako $x \in X$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$, onda je*

$$\alpha m(X) \le \int_X f(x)\,\mathrm{d}m(x) \le \beta m(X). \tag{6}$$

Iz relacije (6) proizilaze razne osobine vezane za nejednakosti. Na primer, ako je $f(x) \le g(x)$, onda je

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}m(x) \le \int_X g(x)\,\mathrm{d}m(x). \tag{7}$$

Takođe važi nejednakost trougla:

$$\left|\int_X f(x)\,\mathrm{d}m(x)\right| \le \int_X |f(x)|\,\mathrm{d}m(x). \tag{8}$$

Nejednakosti (6)-(8) važe pod uslovom da je m nenegativna mera.

Teorema 3.6 *Ako je f integrabilna funkcija na prostoru X i ako je mera svake ćelije iz $\mathcal{F}$ različita od nule, onda je f ograničena funkcija.*

Dokaz ove teoreme je isti kao dokaz za Riemannov integral na $\mathbf{R}$. I sledeća teorema se dokazuje na sličan način kao u $\mathbf{R}$.

Teorema 3.7 *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Svaka funkcija koja na X ima konačno mnogo tačaka prekida, integrabilna je na X.*

Primedba. U konkretnim slučajevima koji slede, prostor X će uvek biti zatvoren i ograničen, dakle kompaktan, deo euklidskih prostora $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$. Dakle, u svim vrstama integrala koje ćemo definisati, *neprekidna funkcija je uvek integrabilna.*

Pojam povezanosti definisan je u 2.5.3 za oblasti u ravni. Za proizvoljni metrički prostor kažemo da je **povezan** ako se ne može predstaviti kao unija dva neprazna i disjunktna otvorena skupa. Ako je prostor po kome se obavlja integracija povezan, onda važi sledeća teorema o srednjoj vrednosti integrala.

Teorema 3.8 Teorema o srednjoj vrednosti. *Neka je X kompaktan povezan metrički prostor sa nenegativnom merom m i neka je X neprekidna funkcija. Tada postoji $\xi \in X$ tako da je*

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}m(x) = f(\xi)m(X) \tag{9}$$

3.2 Krivolinijski integral

3.2.1 Krivolinijski integral prve vrste (po luku)

Neka je glatka kriva C data u prostoru parametarskim jednačinama

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad \alpha \le t \le \beta, \tag{10}$$

pri čemu pretpostavljamo da kriva ima konačne krajnje tačke A (sa $t = \alpha$) i B (sa $t = \beta$).

U kontekstu opšte definicije integrala, prostor X čine tačke krive C, sa euklidskom metrikom. Pod ćelijom podrazumevamo luk krive (10) između dve proizvoljne tačke T_1 i T_2 na krivoj, u oznaci $\overset{\frown}{T_1T_2}$. Mera ćelije je dužina luka $\overset{\frown}{T_1T_2}$. Očigledno je ovde mera granice ćelije jednaka nuli, tako da je svejedno da li uključujemo krajnje tačke ili ne. Ovako definisana mera je nenegativna i ne zavisi od orijentacije krive. Podela Π krive C je definisana tačkama $A = T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n = B$, koje predstavljaju granice ćelija, kao i tačkama X_i koje se biraju unutar ćelija $\overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Neka je funkcija $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ definisana na luku $\overset{\frown}{AB}$. Integralna suma je

$$S(f, \Pi, C) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\Delta s_i, \tag{11}$$

gde je $\Delta s_i = m(\overset{\frown}{T_{i-1}T_i})$ mera ćelije $\overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, tj. dužina luka. Integral koji se dobija ovom konstrukcijom zove se krivolinijski integral I vrste, ili integral po luku, u oznaci

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

Iz definicije integrala neposredno se dobija mogućnost njegovog svođenja na Riemannov integral. Naime, ako se kriva C predstavi u prirodnoj parametrizaciji, onda je (11) integralna suma za

$$\int_0^l f(x(s), y(s), z(s))\,\mathrm{d}s,$$

gde je l dužina luka $\overset{\frown}{AB}$. Prema tome,

$$\boxed{\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_0^l f(x(s), y(s), z(s))\,\mathrm{d}s,} \tag{12}$$

pri čemu je sa leve strane u (12) krivolinijski integral, a sa desne strane je običan RIEMANNov integral. Pretpostavimo sada da je kriva izražena u proizvoljnom parametarskom obliku (10); tada je $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$, pa se iz (12) dobija da je

$$\boxed{(13) \qquad \int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t\ .}$$

Primer 49.

Krivolinijski integral I vrste ne zavisi od orijentacije krive, jer mera ćelija podele ostaje ista pri promeni orijentacije.

3.2.2 Krivolinijski integral druge vrste (po koordinatama)

Posmatrajmo ponovo krivu C definisanu sa (10) i pretpostavimo da je orijentisana u smeru u kome parametar raste. Neka su ćelije definisane na isti način kao u slučaju integrala I vrste. Meru ćemo definisati na drugačiji način. Neka je $\widehat{T_1T_2}$ jedna ćelija ograničena tačkama $T_1(x_1,y_1,z_1)$ i $T_2(x_2,y_2,z_2)$, koje se dobijaju za vrednosti parametra t_1 i t_2 respektivno, pri čemu smo tačke tako označili da T_1 dolazi ispred T_2 pri obilasku krive u smeru u kome je orijentisana. Neka je

$$m(\widehat{T_1T_2}) = x_2 - x_1.$$

Ovako definisana mera zavisi od orijentacije; ako se orijentacija promeni, onda je T_2 ispred T_1, pa je $m(\widehat{T_1T_2}) = x_1 - x_2$. Integralna suma je

$$(14) \qquad S_n(f,\Pi,C) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\Delta x_i,$$

gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Integral koji se dobija iz ove konstrukcije naziva se krivolinijskim integralom II vrste (ili po x-koordinati), u oznaci

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\ .$$

Ako se analogan postupak primeni na ostale dve koordinate, dobija se opšti oblik krivolinijskog integrala po koordinatama:

$$(15) \qquad \int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

gde su P, Q, R date funkcije, definisane na C. Analizom integralnih suma, može se pokazati da važi sledeća relacija:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
(16)\ &\int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t),z(t))\dot{x} + Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y} + R(x(t),y(t),z(t))\dot{x}\big)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
}
$$

gde je sa leve strane u (16) običan RIEMANNov integral. Primetimo da se (16) formalno dobija kada se u (15) izvrši smena x, y, z sa $x(t), y(t), z(t)$, ali to nije korektan dokaz, jer je (15) krivolinijski integral, u kome nemamo opravdanje za smenu promenljive[1].

Oznaka: Ukoliko je kontura C zatvorena, obično se koristi oznaka $\oint$ za krivolinijske integrale, tj.

$$\oint f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \quad \text{i} \quad \oint_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

Integracija po konstantnoj koordinati. Ako kriva C pripada ravni normalnoj na x-osu, onda je $\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}x = 0$. Zaista, svaka ravan normalna na x-osu ima jednačinu $x = x_0$ za neko x_0, odakle sleduje da su sve integralne sume po x jednake nuli.

Zavisnost od orijentacije. Krivolinijski integral II vrste menja znak pri promeni orijentacije krive. Naime, pri promeni orijentacije, mera svake ćelije menja znak, kao što smo već ustanovili, pa se isto odnosi i na integral.

Primer 50. Primer izračunavanja II

3.2.3 Dalje osobine krivolinijskih integrala

Veza između krivolinijskih integrala I i II vrste

Neka su α, β, γ uglovi koje tangenta krive C zaklapa sa koordinatnim osama. Iz relacije (62) na strani 73 dobijamo da je

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}y = \cos\beta\,\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}z = \cos\gamma\,\mathrm{d}s,$$

odakle se izvodi[2] sledeća veza između integrala I i II vrste:

$$\boxed{(17) \qquad \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s,}$$

Napomenimo da pri promeni orijentacije oba integrala u (17) menjaju znak. Naime, promena orijentacije ekvivalentna je promeni smera tangente, tako da kosinusi uglova menjaju znak.

[1] Većinu dokaza osobina koje su „očigledne” ćemo preskočiti i ubuduće.

[2] Polazeći ponovo od integralnih suma.

Vektorski oblik krivolinijskog integrala

Ako se definiše vektorska funkcija tri promenljive $\boldsymbol{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, onda se krivolinijski integral II vrste može u opštem slučaju predstaviti kao integral skalarnog proizvoda:

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_C \boldsymbol{a}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y,\,\mathrm{d}z).$$

Ako se ovde stavi vektorski proizvod, dobija se vektor-integral

$$\int_C \boldsymbol{a}\times\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P & Q & R \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{vmatrix},$$

čije su komponente tri krivolinijska integrala po koordinatama.

Fizička interpretacija krivolinijskog integrala

Fizička interpretacija I.
Fizička interpretacija II.

3.3 Višestruki integral

3.3.1 Dvojni integral

Definicija dvojnog integrala

Neka je u ravni $\mathbf{R}^2$ zadata zatvorena i ograničena oblast D čija je granica deo po deo glatka kontura. Pod ćelijom σ podrazumevamo svaku podoblast[1] oblasti D, koja je takođe ograničena nekom deo po deo glatkom konturom. Mera ćelije, $m(\sigma)$ je njena površina. Primetimo da je mera granice svake ćelije jednaka nuli. Podelu Π oblasti D čini n disjunktnih ćelija $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, čija je unija jednaka D, kao i po jedna tačka iz svake ćelije, $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)$. Za funkciju f definisanu na D, formiramo integralnu sumu

$$S(f, \Pi, D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\sigma_i).$$

Integral koji se dobija polazeći od ovako definisanih integralnih suma zove se **dvojni integral** funkcije f po oblasti D, u oznaci

$$I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Kako je mera svake ćelije pozitivna, iz teoreme 3.6 zaključujemo da je svaka integrabilna funkcija ograničena na D.

[1] U smislu konvencije koju smo ranije uveli, podrazumeva se da je $\overset{\circ}{\sigma} \neq 0$.

Geometrijska interpretacija dvojnog integrala

Za funkciju $f(x,y) \equiv 1$, svaka integralna suma za odgovarajući dvojni integral jednaka je zbiru površina svih ćelija podele, dakle površini oblasti D. Stoga je

$$P(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gde je sa $P(D)$ označena površina oblasti D. U kombinaciji sa alternativnim načinom izračunavanja dvojnog integrala koji ćemo izložiti u 3.3.2, ova formula omogućava nalaženje površine široke klase figura u ravni.

U slučaju nenegativne funkcije f, opšti član integralne sume,

$$f(x_i, y_i)m(\sigma_i)$$

je zapremina pravog cilindričnog tela čija je donja osnova ćelija σ_i, a visina $f(x_i, y_i)$. Zbir svih ovakvih zapremina je aproksimacija za zapreminu V dela prostora na slici 35, a dvojni integral koji se dobija graničnim procesom iz integralnih suma jednak je zapremini:

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Slika 35. Izračunavanje zapremine pomoću dvojnog integrala. (szap2)

Primere izračunavanja površina i zapremina primenom navedenih formula daćemo kasnije (primeri 53 i 54).

3.3.2 Svođenje dvojnog integrala na dvostruki

Za datu funkciju $(x,y) \mapsto f(x,y)$, integral

$$\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

je funkcija promenljive x. Ako se još jednom integrali po x, u granicama od a do b, dobija se **dvostruki integral**

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\ . \tag{19}$$

Dvostruka integracija se može vršiti i obrnutim redosledom:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\ . \tag{20}$$

Izračunavanje dvostrukog integrala svodi se na izračunavanje dva jednostruka RIEMANNova integrala. Pokazaćemo sada da su, pod određenim uslovima, integrali (19) i (20) međusobno jednaki i jednaki dvojnom integralu funkcije f po pravougaoniku $[a,b] \times [c,d]$.

Teorema 3.9 *Ako je funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y)$ integrabilna na pravougaoniku $P = [a,b] \times [c,d]$ i ako je, za svako $x \in [a,b]$, funkcija $y \mapsto f(x,y)$ integrabilna na segmentu $[c,d]$, tada postoji dvostruki integral (19) i jednak je dvojnom integralu po pravougaoniku:*

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\ . \tag{21}$$

Slika 36. Uz teoremu **??** *(sldvodvo)*

Dokaz. Podelimo segmente $[a,b]$ i $[c,d]$ na delove pomoću tačaka

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots x_m = b \quad \text{i}$$

$$y_0 = c < y_1 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots y_n = d\ .$$

Ova podela definiše podelu pravougaonika P na $m \cdot n$ pravougaonika (ćelija) P_{ij} (videti sliku 36). Površina pravougaonika P_{ij} je $\Delta x_i \Delta y_j$. Neka su m_{ij} i M_{ij} infimum, odnosno supremum vrednosti funkcije f u pravougaoniku P_{ij}. Pri datoj podeli donja i gornja integralna suma za dvojni integral po pravougaoniku P su, respektivno

$$S_* = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad S^* = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

S druge strane, imamo da je

$$m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij} \qquad (x,y) \in P_{ij}. \tag{22}$$

Stavljajući da je $x = \xi_i$ proizvoljna, ali fiksirana tačka u $[x_i, x_{i+1}]$, integracijom po $y \in [y_j, y_{j+1}]$ nejednakosti (22) dobijamo

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi, y)\,\mathrm{d}y \le M_{ij}\Delta y_j,$$

gde je $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. Integral $\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi, y)\,\mathrm{d}y$ postoji jer je po pretpostavci funkcija $y \mapsto f(\xi_i, y)$ integrabilna na $[c,d]$, a time i na $[y_j, y_{j+1}]$. Dalje, sumiranjem po j dobijamo da je

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}\Delta y_j \le \int_c^d f(\xi_i, y)\,\mathrm{d}y \le \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}\Delta y_j.$$

Ako označimo integral $\int_c^d f(\xi_i, y)\,\mathrm{d}y$ sa $I(\xi_i)$, pomnožimo dobijene nejednakosti sa Δx_i i sumiramo po i, dobijamo

$$S_* = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{m-1} I(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i = S^* \tag{23}$$

Kad $m \to +\infty$ i $n \to +\infty$, S_* i S^* konvergiraju ka dvojnom integralu

$$J = \iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

koji po pretpostavci postoji. To znači da i srednji član konvergira ka J. S druge strane, srednji član je integralna suma za integral

$$\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

iz čega sleduje da ovaj dvostruki integral postoji i da je jednak J, a to je i trebalo dokazati. $\square$

Prethodna teorema može se iskazati i za obrnut redosled integracije u dvostrukom integralu, pod analognim uslovima. U oba slučaja, uslovi su ispunjeni ako je f neprekidna funkcija na P, pa važe sledeće jednakosti:

Ako je $(x,y) \mapsto f(x,y)$ neprekidna funkcija na pravougaoniku $P = [a,b] \times [c,d]$, tada je

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ . \tag{24}$$

Sledeći rezultat je proširenje teoreme 3.9 na opštiju oblast integracije.

Teorema 3.10 *Neka je oblast D ograničena pravama $x = a$, $x = b$ i krivama $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, gde su g_1, g_2 neprekidne funkcije na $[a, b]$ i $g_1(x) \leq g_2(x)$ za svako $x \in [a, b]$. Ako je funkcija $(x, y) \mapsto f(x, y)$ integrabilna u oblasti D i ako je, za svako $x \in [a, b]$, funkcija $y \mapsto f(x, y)$ integrabilna na segmentu $[g_1(x), g_2(x)]$, tada je*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\ . \tag{25}$$

Dokaz. Kako su g_1 i g_2 neprekidne funkcije, postoje konačni

$$c = \min_{x\in[a,b]} g_1(x), \quad d = \max_{x\in[a,b]} g_2(x)\ .$$

Na pravougaoniku $P = [a, b] \times [c, d]$ definišimo pomoćnu funkciju f^* sa

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{ako } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{u ostalim tačkama pravougaonika } P. \end{cases}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \iint_P f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{P\setminus D} f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{26}$$

i kako je f po pretpostavci integrabilna na D, zaključujemo da je funkcija f^* integrabilna na pravougaoniku P. Dalje, za svako fiksirano $x \in [a, b]$ imamo da je

$$\begin{aligned} \int_c^d f^*(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_c^{g_1(x)} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^d f^*(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{27}$$

iz čega sleduje da je za svako $x \in [a, b]$ funkcija $y \mapsto f(x, y)$ integrabilna na $[c, d]$. Prema tome, uslovi teoreme 3.9 su ispunjeni, pa njenom primenom dobijamo da je

$$\iint_P f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f^*(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

odnosno, koristeći (26) i (27),

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

što je i trebalo dokazati. □

Primer 51. Naći integral (jedan običan primer)

$$I = \iint_D$$

I teorema 3.10 može se primeniti u obrnutom poretku integracije dvostrukog integrala, kad su ispunjeni odgovarajući uslovi, a to je slučaj kada je, na primer, $f(x, y)$ neprekidna funkcija na oblasti D. Tada važe jednakosti analogne sa (24). Promena poretka integracije ponekad je jedini način da se dvostruki integral reši, kao što pokazuje sledeći primer.

!

Primer 52. Naći vrednost dvostrukog integrala

$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ .$$

Rešenje. Primitivnu funkciju $\int e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x$ nije moguće izraziti pomoću elementarnih funkcija (M2, XXX). Prema tome, dvostruki integral I se ne može rešiti u datom poretku integracije. Međutim, kako je podintegralna funkcija neprekidna, imamo da je I jednak dvojnom integralu po oblasti P (videti sliku XXX).

$$I = \iint_D e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Ako sada ponovo prikažemo I kao dvostruki integral, ali u obrnutom poretku integracije, dobijamo da je

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x^2/2} \left(\int_0^x \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x.$$

Uvođenjem smene $x^2/2 = t$ u poslednjem integralu, dobijamo da je

$$I = \int_0^1 e^{-t}\, \mathrm{d}t = 1 - e^{-1}.$$

Primer 53. Izračunati površinu oblasti..

Primer 54. Izračunati zapreminu tela...

3.3.3 Trojni integral

Neka je D zatvorena i ograničena oblast u $\mathbf{R}^3$, čija granica je unija konačno mnogo glatkih površi. Pod ćelijom W podrazumevamo svaku podoblast oblasti D, koja je takođe ograničena sa konačno mnogo glatkih površi. Mera ćelije, $m(W)$ je njena zapremina. Za funkciju tri promenljive $f(x, y, z)$ definisanau na D, formiramo integralnu sumu

$$S(f, \Pi, D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) m(W_i),$$

gde je Π podela definisana ćelijama W_i i tačkama $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Integral koji proizilazi iz ove konstrukcije naziva se trojnim integralom, u oznaci

$$\iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Očigledno postoji potpuna analogija između dvojnog i trojnog integrala. Trojni integral se svodi na trostruki, pod analognim uslovima onima koji važe za svođenje dvojnog integrala na dvostruki. Na primer, ako je oblast integracije kvadar $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, i ako je funkcija f neprekidna, onda je

$$\iiint_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \cdots,$$

odnosno, svih 6 mogućih trostrukih integrala su međusobno jednaki, i jednaki su trojnom integralu po oblasti D.

Zapremina oblasti $D \in \mathbf{R}^3$ ograničene deo po deo glatkom površi data je sa

$$V(D) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ .$$

Primer 55. Jedan trojni integral.

3.3.4 Integral na $\mathbf{R}^n$

Integral po oblasti u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^n$, za $n > 3$ definiše se polazeći od istih principa kao i opšti integral; dakle, definiše se šta su ćelije i šta je njihova mera. Međutim, s obzirom da smo ovde lišeni geometrijske očiglednosti, matematički aparat potreban za definisanje ćelija i mere postaje znatno složeniji. Za većinu problema u kojima se može pojaviti integral po prostoru dimenzije već e od tri, dovoljno je znati da se u slučaju neprekidne funkcije ovaj integral svodi na n-tostruki po istom obrascu po kome se dvojni integral svodi na dvostruki ili trojni na trostruki. Po analogiji sa $\mathbf{R}^3$, za oblast D u prostoru $\mathbf{R}^n$ definišemo zapreminu kao n-tostruki integral po oblasti D funkcije $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$. U ovom odeljku ćemo n-tostruki integral po oblasti D označavati sa

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

umesto sa

$$\int\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots\,\mathrm{d}x_n.$$

Prema tome, zapremina oblasti D je

$$V(D) = \int_D \mathrm{d}\boldsymbol{x} = m(D).$$

Pri izračunavanju zapremina u $\mathbf{R}^n$ od koristi su dve transformacije: translacija i homotetija. Za datu oblast $D \subset \mathbf{R}^n$ i za $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ definišemo oblast

$$D + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y} \in D\}.$$

Oblast $D + \boldsymbol{a}$ se dakle dobija od oblasti D translacijom za vektor $\boldsymbol{a}$. Kako je

$$\int_{D+\boldsymbol{a}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_D \mathrm{d}\boldsymbol{y} \qquad (\text{smena } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}),$$

zapremina oblasti $D + \boldsymbol{a}$ jednaka je zapremini oblasti D.

Ako je, za neko $r > 0$,

$$D_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{x} = r\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in D\},$$

onda kažemo da su oblasti D i D_r homotetične, sa koeficijentom homotetije r. Iz

$$\int_{D_r} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_D r^n\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \qquad (\text{smena } \boldsymbol{x} = r\boldsymbol{y}),$$

nalazimo da je $V(D_r) = r^n V(D)$.

Primer 56. 1° Pravougli paralelepiped u n dimenzija je skup onih tačaka $\boldsymbol{x}$ prostora $\mathbf{R}^n$ čije koordinate ispunjavaju uslove

$$x_1 \in [a_1, b_1], \ldots, x_n \in [a_n, b_n],$$

gde su a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ realni brojevi takvi da je $a_i < b_i$. Zapremina pravouglog paralelepipeda je data sa

$$\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n_1}\, \mathrm{d}x_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_{n-1} - a_{n-1})(b_n - a_n).$$

2° n-dimenzionalna kugla poluprečnika r sa centrom u nuli je skup tačaka $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ takvih da je $\|x\| < r$, tj.

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < r^2.$$

Neka je $V_n(r)$ zapremina ove kugle. Kako je svaka kugla homotetična kugli poluprečnika 1, imamo da je $V_n(r) = C_n r^n$, gde je C_n zapremina jedinične kugle. Naći ćemo rekurentnu formulu za C_n na sledeći način. Ako je $t \in [-r, r]$, onda tačke $\boldsymbol{x}$ na kugli za koje je $x_n = t$ (presek kugle i ravni $x_n = t$) ispunjavaju uslov

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < r^2 - t^2,$$

tj., ovo je $n - 1$ dimenzionalna kugla poluprečnika $\sqrt{r^2 - t^2}$, čija zapremina iznosi $V_{n-1}(\sqrt{r^2 - t^2}) = C_{n-1}(r^2 - t^2)^{(n-1)/2}$. Prema tome, zapremina n-dimenzionalne kugle dobija se kao integral[1]

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}(\sqrt{r^2 - t^2})\, \mathrm{d}t,$$

[1] Ovaj postupak je analogan izračunavanju zapremine tela u $\mathbf{R}^3$ kada su poznate površine poprečnih preseka.

odnosno,

$$C_n r^n = C_{n-1}\int_{-r}^{r}(r^2-t^2)^{(n-1)/2}\,\mathrm{d}t.$$

Dobijeni jednostruki integral se rešava smenom $t = r\cos\tau$ i tako se dolazimo do rekurentne formule

$$C_n = C_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\tau\,\mathrm{d}\tau.$$

Ovo je integral poznat iz osnovnog kursa Matematičke analize. Početna vrednost C_1 je 2, jer je „zapremina” kugle za $n = 1$ u stvari dužina intervala $(-r, r)$. Konačno, posle rešavanja integrala, a zatim i rekurentne relacije, dobija se da je

$$V_n(r) = \frac{2^{[(n+1)/2]}\pi^{[n/2]}r^n}{n!!}.$$

U specijalnim slučajevima za $n = 1, 2, 3$ dobijaju se: dužina intervala $(2r)$, površina kruga $(r^2\pi)$ i zapremina sfere $(4r^3\pi/3)$. Zapremina kugle u $\mathbf{R}^4$ je $V_4(r) = r^4\pi^2/2$.

3.3.5 Nesvojstveni integral

U ovom delu ćemo izložiti osnove teorije nesvojstvenih integrala za funkcije dve promenljive. Potpuno analogna teorija važi za slučaj trojnih integrala, kao i za opšti slučaj n-tostrukih integrala.

Dvojni integral, isto kao i jednostruki, nazivamo nesvojstvenim ako je oblast integracije neograničena ili ako je podintegralna funkcija neograničena.

Neka je D neograničena oblast u $\mathbf{R}^2$, čija je granica deo po deo glatka kriva. Neka je $f(x, y)$ funkcija koja je definisana na D i integrabilna na svakoj konačnoj podoblasti $B \subset D$. Posmatrajmo niz oblasti $D_n \subset D$ sa osobinom da svaka oblast D_n sadrži oblast $K_n \cap D$, gde je K_n kugla poluprečnika n sa centrom u koordinatnom početku (videti sliku 37a)

Slika 37. Uz definiciju nesvojstvenog integrala. (sbeobl)

Ako za bilo kakav niz oblasti D_n sa navedenom osobinom postoji ista granična vrednost

$$\lim_{n\to+\infty}\iint_{D_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I,$$

onda kažemo da nesvojstveni integral po oblasti D ima vrednost I:

$$\iint_D f(x,y) = I.$$

Na analogan način se definiše i nesvojstveni integral funkcije koja je neograničena u okolini neke tačke $(x_0, y_0) \in D$, i integrabilna na svakoj podoblasti $B \subset D$ koja ne sadrži tačku (x_0, y_0). Oblasti D_n u ovom slučaju su predstavljene na slici 37b. Za svako n, oblast D_n sadrži skup $K'_{1/n} \cap D$, gde je $K'_{1/n}$ komplement kugle opisane oko tačke (x_0, y_0) poluprečnika $1/n$.

Sa gledišta izračunavanja nesvojstvenog integrala, važni su uslovi pod kojima se nesvojstveni dvojni integral može izraziti kao dvostruki integral. U tom smislu navodimo bez dokaza sledeću teoremu, koja važi za beskonačnu pravougaonu oblast.

Teorema 3.11 *Neka je D beskonačna traka u ravni $\mathbf{R}^2$, ograničena pravama $x = a, x = b, y = c$ $(a < b)$. Neka je $f(x,y)$ funkcija koja je integrabilna na svakoj ograničenoj oblasti $B \subset D$. Ako postoji konačan dvostruki integral*

$$\int_a^b \int_c^{+\infty} |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,$$

onda postoji i nesvojstveni dvojni integral po oblasti D i ovi integrali su jednaki, tj.

$$\iint_D = \int_a^b \int_c^{+\infty} |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Isti rezultat važi i u slučaju da su neki od brojeva a, b, c jednaki $\pm\infty$.

Ako oblast integracije nije tipa koji je posmatran u teoremi 3.11, može se primeniti slična dosetka kao u dokazu teoreme 3.10 na strani 97 (dopuna do pravougaone oblasti).

Primer 57. Integral

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

zove se Poissonov integral. Ovaj integral se pojavljuje u Teoriji verovatnoće i njenim primenama, u raznim oblicima. Interesantno je da iako se odgovarajući neodređeni integral ne može izraziti preko elementarnih funkcija, vrednost za I se može odrediti primenom dvojnog integrala. Uočimo najpre da je, zbog parnosti podintegralne funkcije,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
I^2 = I \cdot I &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4}\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-\rho^2)}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\pi,
\end{aligned}$$

odakle nalazimo da je $I = \sqrt{\pi}/2$.

3.4 Green-Riemannova formula

Green-Riemannova formula (teorema 3.12) izražava krivolinijski integral po zatvorenoj krivoj u $\mathbf{R}^2$ pomoću dvojnog integrala po oblasti koju ta kriva zatvara. Ova, naizgled neobična veza između jednodimenzionalnog i dvodimenzionalnog integrala, ima suštinski značaj u raznim primenama, kao i u daljem razvoju teorije integrala.

U formulaciji teoreme 3.12 pojavljuje se pojam orijentacije krive u ravni, koji je definisan u odeljku 2.5.3.

Teorema 3.12 *Neka je oblast D u ravni $\mathbf{R}^2$ ograničena sa jednom ili sa više deo po deo glatkih kontura. Pretpostavimo da su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne na D i da imaju parcijalne izvode $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$, koji su takođe neprekidni. Tada je*

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{28}$$

gde je sa C označena granica oblasti D, orijentisana u pozitivnom smeru.

Dokaz. Posmatrajmo najpre slučaj jednostruko povezane oblasti ograničene deo po deo glatkom konturom C, koja ima osobinu da svaka prava paralelna x-osi ili y-osi seče konturu C u najviše dve tačke (tzv. **elementarna oblast**). Oblast ovog tipa je prikazana na slici 38, i može se definisati sa $a \le x \le b$; $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, gde su y_1 i y_2 neprekidne funkcije.

Kako je $\partial P/\partial y$ neprekidna funkcija, imamo da je

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{A\overset{\frown}{D}B} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{A\overset{\frown}{C}B} P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{A\overset{\frown}{D}B} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{B\overset{\frown}{C}A} P(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= \oint C^- P(x,y)\,\mathrm{d}x = -\oint CP(x,y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Slika 38. Elementarna oblast. (sgrere0)

Posmatrano sa y-ose, oblast D se može prikazati i u obliku $c \leq y \leq d$; $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$. Ponavljajući postupak u (29), sa Q i $\partial Q/\partial x$ umesto P i $\partial P/\partial y$ respektivno, dobijamo

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint CQ(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{29}$$

Konačno, iz (29) i (29) dobija se tvrđenje teoreme za elementarnu oblast.

Ako se oblast može razbiti na konačno mnogo elementarnih oblasti, dokaz se svodi na prethodni slučaj. Na primer, neka se oblast D ogrančena konturom C može predstaviti kao unija dve elementarne oblasti D_1 i D_2 koje su ograničene konturama C_1 i C_2, respektivno. Tada je

Slika 39. Uz dokaz Green-Riemannove formule: Oblast koja se razbija na dve elementarneoblasti. (sgrere)

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_{C_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \oint_{C_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \tag{30}$$

jer se u zbiru sa desne strane integrali po AB i BA "potiru". Kako su oblasti D_1 i D_2 elementarne, iz Green-Riemannove formule dokazane za takve oblasti sleduje da je

$$\oint_{C_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \oint_{C_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(31) \qquad + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gde poslednja jednakost izlazi iz aditivnosti dvojnog integrala. Iz (30) i (31) dobija se GREEN-RIEMANNova formula za slučaj unije dve elementarne oblasti. Opšti slučaj konačno mnogo elementarnih oblasti može se sada formalno dokazati matematičkom indukcijom.

Najzad, najopštiji slučaj proizvoljne oblasti svodi se na slučaj unije konačno mnogo oblasti, ali detalje ovog dokaza izostavljamo, jer su previše komplikovani. □

Interesantno je primetiti da je za izračunavanje dvojnog integrala sa desne strane u (28) potrebno poznavanje vrednosti parcijalnih izvoda u celoj oblasti, dok je za krivolinijski integral sa leve strane potrebno poznavati samo funkcije na granici te oblasti. Ovo je posledica visokog stepena regularnosti (neprekidnost, diferencijabilnost) koji se zahteva od funkcija i granica. S druge strane, analogna situacija je u formuli

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

gde je takođe za izračunavanje integrala sa desne strane potrebno poznavanje izvoda na celom intervalu, dok je sa leve strane potrebno poznavati samo vrednosti funkcije na granicama intervala.

Primer 58. Jedan običan primer: Slučaj kada uslovi nisu ispunjeni.

Primer 59. Krivolinijski preko dvojnog. Ima li mogućnosti za dvojni preko krivolinijskog?

Primer 60. Slučaj kada se oblast zatvara da bi se izračunao krivolinijski intergal.

Jedna od neposrednih posledica GREEN-RIEMANNove formule je mogućnost izračunavanja površina pomoću krivolinijskih integrala.

Teorema 3.13 *Neka je D jednostruko povezana oblast u ravni $\mathbf{R}^2$, ograničena deo po deo glatkom konturom C, orijentisanom u pozitivnom smeru. Ako je $m(D)$ površina oblasti D, tada je*

$$m(D) = \oint_C x\,\mathrm{d}y = -\oint_C y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\ .$$

Dokaz. Kako je

$$\oint_C x\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = P(D),$$

prva od navedenih formula je dokazana. Ostale dve se slično dokazuju.

Pretpostavimo da je oblast D višestruko povezana, ograničena spoljnom konturom C_0 i unutrašnjim konturama $C_1, \ldots, C_n$. Ukupna granica oblasti D, tj. kriva $C = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ orijentisana je u pozitivnom smeru ako je kriva C_0 orijentisana u pozitivnom, a sve unutrašnje krive u negativnom smeru u odnosu na oblast koju zatvaraju (videti odeljak 2.5.3). GREEN-RIEMANNova formula u razvijenom obliku u ovom slučaju glasi:

$$\oint_{C_0} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{32}$$

pri čemu su sve konture orijentisane u pozitivnom smeru.

3.5 Nezavisnost krivolinijskog integrala u ravni od puta integracije

Ako su A i B dve date tačke u ravni, simbol

$$\int_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{33}$$

u opštem slučaju nema smisla, ako nije precizirana kriva po kojoj se integrali. U ovom odeljku interesuje nas pod kojim uslovima integral (33) ne zavisi od puta integracije, ne za fiksirane tačke A i B već za svaki par tačaka u datoj oblasti. Preciznije, kažemo da integral (33) **ne zavisi od puta integracije u oblasti** D ako za svake dve deo po deo glatke krive L_1 i L_2 koje pripadaju oblasti D, takve da obe počinju u nekoj tački $A \in D$ i završavaju se u nekoj tački $B \in D$ važi da je

$$\int_{L_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{L_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{34}$$

Pretpostavimo da je D jednostruko povezana oblast u čijoj unutrašnjosti važi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{35}$$

Neka je C proizvoljna deo po deo glatka kriva koja pripada oblasti D. Kako je D jednostruko povezana oblast, onda i oblast D_0 koja je zatvorena krivom C pripada oblasti D, pa uslov (35) važi na D_0. Sada iz GREEN-RIEMANNove formule, pod pretpostavkom da su ispunjeni uslovi za njenu primenu, dobijamo da je

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{D_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \tag{36}$$

za svaku zatvorenu krivu C koja pripada oblasti D[1]. Neka su L_1 i L_2 dve proizvoljne krive koje počinju u tački A i završavaju se u tački B (videti sliku 40), a pripadaju oblasti D.

[1] Ukoliko uslov (35) nije ispunjen na granici oblasti D, to nema značaja, jer je dvojni integral po granici oblasti jednak nuli.

Slika 40. (snezkri1)

Ako sa C označimo zatvorenu krivu koja se sastoji od krivih L_1 i L_2 i orijentisana je u pozitivnom smeru, tada je, prema (36)

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_{L_2 \cup C_1^-} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \oint_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \oint_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

što znači da su integrali od A do B po *proizvoljnim* krivama L_1 i L_2 u oblasti D međusobno jednaki, pa integral (33) ne zavisi od puta integracije. Ovim je dokazana polovina sledeće teoreme.

Teorema 3.14 *Pretpostavimo da su funkcije P, Q, $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ neprekidne na jednostruko povezanoj oblasti D. Tada krivolinijski integral (33) ne zavisi od puta integracije u oblasti D ako i samo ako je ispunjen uslov (35) u svakoj tački u unutrašnjosti oblasti D.*

Dokaz. Već smo dokazali da, pod navedenim uslovima, (35) implicira nezavisnost krivolinijskog integrala od puta. Dokažimo obrnuto tvrđenje. Dakle, pretpostavimo da integral (33) ne zavisi od puta integracije u oblasti D i definišimo funkciju

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P(u, v)\,\mathrm{d}u + Q(u, v)\,\mathrm{d}v, \tag{37}$$

gde je $A(x_0, y_0)$ proizvoljna ali fiksirana tačka iz D i gde se pretpostavlja da se integracija obavlja po proizvoljnoj krivoj koja cela pripada oblasti D i koja je orijentisana u smeru od tačke $A(x_0, y_0)$ do tačke $B(x, y)$. Pretpostavimo sada da je D pravougaona oblast. U tom slučaju, ako tačke A i B pripadaju oblasti D, onda i tačka $C(x_0, y)$ takođe pripada oblasti, a time i kontura ACB na slici 41.

Dalje imamo da je

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_{(x,y)}^{x+\Delta x, y} P(u, v)\,\mathrm{d}u + Q(u, v)\,\mathrm{d}y$$

Slika 41. Uz dokaz teoreme 3.14 (snezkri2)

$$= \int_x^{x+\Delta x} P(u, y)\, \mathrm{d}u \tag{38}$$

Prema teoremi o srednjoj vrednosti, s obzirom da je P neprekidna funkcija po prvoj promenljivoj, imamo da je

$$\int_x^{x+\Delta x} P(u, y)\, \mathrm{d}u = P(\xi, y)\Delta x, \qquad \text{za neko } \xi \in (x, x + \Delta x). \tag{39}$$

Sad iz (38) i (39), ponovo koristeći neprekidnost funkcije P, dobijamo da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x, y),$$

odnosno, da je

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}. \tag{40}$$

Na sličan način, koristeći analognu konturu, pokazuje se da je

$$Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}. \tag{41}$$

Diferencirajući obe strane jednakosti (40) po y i (41) po x, nalazimo da je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Kako su, po pretpostavci, parcijalni izvodi $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ neprekidni, iz teoreme o jednakosti mešovitih parcijalnih izvoda sleduje jednakost (35), što je i trebalo dokazati.

U dokazu je pretpostavljeno da je D pravougaona oblast. U slučaju kada to nije ispunjeno, kako je $\mathring{D}$ otvoren skup, on zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i jednu okolinu u d_m-metrici, a to je kvadrat. Neka je $M(x, y)$ proizvoljna tačka iz $\mathring{D}$ i neka je K kvadrat opisan oko M koji se sadrži u $\mathring{D}$. Ponavljanjem navedenog dokaza za K umesto D, dobija se da jednakost (35) važi u tački (x, y). $\square$

U dokazu teoreme 3.14 dokazano je, za slučaj pravougaone oblasti D, da ako integral (33) ne zavisi od puta integracije, onda postoji funkcija F takva da je

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x,y) \tag{42}$$

za svako $(x,y) \in D$. Funkcija F definisana je sa (37). Dokaz se može proširiti i na oblast koja nije pravougaona, ali to ovde izostavljamo. [1]. S druge strane, postojanje takve funkcije implicira jednakost (35), a ona implicira nezavisnost krivolinijskog integrala od puta integracije. Prema tome, važi sledeći analogon Newton-Leibnizove formule:

Teorema 3.15 *Neka su funkcije P, Q, $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ neprekidne na jednostruko povezanoj oblasti D. Krivolinijski integral*

$$\int_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

ne zavisi od puta integracije u oblasti D ako i samo ako postoji funkcija $(x,y) \mapsto F(x,y)$, takva da važi **??***enezkrip5) u svim tačkama oblasti D. U tom slučaju je*

$$\int_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_A^B \mathrm{d}F(x,y) = F(B) - F(A).$$

Funkcija F koja je analogna primitivnoj funkciji u jednodimenzionalnom slučaju, naziva se **potencijalom**. Iz teorema 3.14 i 3.15 izlazi da potencijal postoji ako i samo ako je zadovoljen uslov (35). !

O potencijalu će biti više reči kasnije, u kontekstu krivolinijskog integrala u prostoru.

3.6 Smena promenljive u višestrukom integralu

Isto kao kod običnog Riemannovog integrala, oznaka za dvojni integral

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

asosira na sumiranje integralnih suma. Uobičajena integralna podela u Dekartovim koordinatama je podela na pravougaonike; ona je prirodna u slučaju pravougaone oblasti, ali ne ukoliko je oblast D na primer, krug. Problemi koje imamo pri sumiranju "neprirodnih" integralnih suma uglavnom se prenose i na rešavanje integrala formalizmom integralnog računa. Na primer, izračunavanje površine kruga

[1] Dokaz ne može da se bez teškoća prenese na oblast koja nije pravougaonik, jer funkcija F mora da bude jedinstvena u celoj oblasti.

polupoluprečnika 1 u Dekartovim koordinatama dovodi do integrala

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

koji ne može da se reši drugačije osim smene $x = \cos t$ ili $x = \sin t$, što nas dovodi do promenljive t čije koordinatne linije (tj. linije $t = \mathrm{const.}$, dele krug na prirodne delove, kružne isečke, a ne na pravougaonike. U tekstu koji sledi razmatramo najpre kako se menja podela površine pri uvodjenju krivolinijskih koordinata, a zatim razmatramo smenu promenljivih u dvojnom i trojnom integralu.

3.6.1 Elementi površine i zapremine u krivolinijskim koordinatama

U Dekartovom koordinatnom sistemu, koordinatne linije $x = \mathrm{const.}$ i $y = \mathrm{const.}$ su prave paralelne koordinatnim osama. Ako se uvede novi par promenljivih u i v (koje nisu linearno zavisne od x i y), koordinatne linije $u = \mathrm{const.}$ i $v = \mathrm{const.}$ u xOy koordinatnom sistemu postaju krive. Ista situacija je u tri dimenzije.

Slika 42. Ilustracija odnosa između: a) elementarnih površina; b) elementarnih zapremina. (selpoza)

Smatrajući da su Δx i Δy dovoljno mali da bi se površina ΔD_{xy} sa slike 42a) mogla aproksimirati paralelelogramom konstruisanim nad stranicama AB i AD, imamo da je

$$\Delta D_{xy} \approx |\vec{AB} \times \vec{AD}|.$$

Kako je $v = b_1 = \mathrm{const.}$ na luku AB, imamo da je

$$\vec{AB} = \big(x(a_1+\Delta u, b_1) - x(a_1, b_1), y(a_1+\Delta u, b_1) - y(a_1, b_1)\big) \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right).$$

Na isti način nalazimo da je

$$\vec{AD} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right),$$

tako da je

$$\vec{AB} \times \vec{AD} \approx \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_u\Delta u & y_u\Delta u & 0 \\ x_v\Delta v & y_v\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \vec{k} = J\Delta u\Delta v\vec{k},$$

gde je J JACOBIjan preslikavanja $x = x(u,v); y = y(u,v)$. Odavde izlazi da je, konačno,

(43) $$\Delta D_{xy} \approx |J|\Delta u\Delta v = |J|\Delta D_{uv},$$

pri čemu se JACOBIjan J izračunava u tački A. To onda znači da JACOBIjan predstavlja odnos elementarnih površina pri uvođenju krivolinijskih koordinata.

Analogna formula važi u tri dimenzije. Ovde, koristeći se oznakama sa slike 42b), zaključujemo da je zapremina ΔV_{xyz} približno jednaka zapremini paralelepipeda konstruisanog nad dužima AB, AD i AA'. Kako se pomenuta zapremina izražava kao apsolutna vrednost mešovitog proizvoda vektora $\vec{AB}, \vec{AD}$ i $\vec{AA'}$, dobijamo da je

$$\Delta V_{xyz} \approx |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}]| \approx \left| \begin{vmatrix} x_u\Delta u & y_u\Delta u & z_u\Delta u \\ x_v\Delta v & y_v\Delta v & z_v\Delta v \\ x_w\Delta w & y_w\Delta w & z_w\Delta w \end{vmatrix} \right|,$$

odnosno da je

(44) $$\Delta V_{xyz} \approx |J|\Delta u\Delta v\Delta w = |J|\Delta V_{uvw},$$

gde je J JACOBIjan preslikavanja $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$.

U nastavku ćemo izvesti dopunjenu i egzaktnu verziju formule (43) i videćemo pod kojim uslovima ona važi. Samo izvođenje je interesantno, zbog elegantnog korišćenja GREEN-RIEMANNove formule.

Pretpostavimo da je data povezana oblast D_{xy} u xy ravni. Uvođenjem smene promenljivih

(45) $$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D_{uv},$$

dobija se preslikavanje koje oblast D_{uv} u uv ravni preslikava u datu oblast D_{xy} u xy ravni (videti sliku 43). Pretpostavimo da je to preslikavanje bijektivno, kao i da su $x(u,v)$, $y(u,v$ i njihovi parcijalni izvodi po u i v neprekidne funkcije. Iz ovih pretpostavki izlazi (videti 2.3.5) da je

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)} \neq 0 \quad \text{za } (u,v) \in D_{uv}$$

i da je konstantnog znaka u oblasti D_{uv}. Dalje, može se pokazati da se granica L oblasti D_{uv} preslikava u granicu C oblasti D_{xy}, dok se unutrašnjost oblasti D_{uv} preslikava u unutrašnjost oblasti D_{xy}. Ako je L zatvorena glatka kontura, onda je i C takva.

Pretpostavimo da je kontura L data u parametarskom obliku sa

$$u = u(t), \quad v = v(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$

Slika 43. Smena promenljivih dovodi do promene oblika i površine oblasti. (ssmepro)

i da je orijentisana u pozitivnom smeru. Kontura C će onda imati jednačine

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

pri čemu je orijentacija određena preslikavanjem i može biti i negativna, iako je orijentacija krive L pozitivna.

Neka su $m(D_{uv})$ i $m(D_{xy})$ mere (tj. površine) oblasti D_{uv} i D_{xy} respektivno. Tada je, prema formuli za određivanje površine preko krivolinijskog integrala,

$$m(D_{xy}) = \pm \oint_C x \,\mathrm{d}y = \pm \int_\alpha^\beta x(u(t), v(t)) \frac{\mathrm{d}y(u(t), v(t))}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t,$$

pri čemu se uzima znak $+$ ako je kriva C orijentisana u pozitivnom smeru i znak $-$ u suprotnom slučaju. Dalje, računanjem izvoda po t dobijamo

$$m(D_{xy}) = \pm \int_\alpha^\beta x(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \right) \,\mathrm{d}t.$$

Kako je $u'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u, v'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}v$, možemo preći na integraciju po u i v, po krivoj L, pri čemu dobijamo

$$m(D_{xy}) = \pm \oint_L x(u, v) \frac{\partial y}{\partial u} \,\mathrm{d}u + x(u, v) \frac{\partial y}{\partial v} \,\mathrm{d}v. \tag{46}$$

Neka je

$$P(u, v) = x(u, v) \frac{\partial y}{\partial u}, \quad Q(u, v) = x(u, v) \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Da bi se u integralu (**??**) primenila Green-Riemannova formula, potrebno je pretpostaviti da P i Q imaju neprekidne parcijalne izvode, što znači da x i y imaju neprekidne parcijalne izvode do drugog reda. Ova pretpostavka takođe implicira jednakost mešovitih parcijalnih izvoda, pa je

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \\ \frac{\partial P}{\partial v} &= = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \end{aligned}$$

odakle je

$$m(D_{xy}) = \pm \iint_{D_{uv}} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \pm \iint_{D_{uv}} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Kako je JACOBIjan stalnog znaka u oblasti D_{xy}, zbog $m(D_{xy}) > 0$ znak JACOBIjana mora biti jednak znaku ispred integrala, tako da poslednju formulu možemo pisati i u obliku

$$(47) \qquad m(D_{xy}) = \iint_{D_{uv}} \left| \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)} \right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \iint_{D_{uv}} |J(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

gde je uvedena oznaka

$$J(u, v) = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}.$$

Primer 61. Neka je D_{xy} krug $x^2 + y^2 \leq r$ u xy-ravni. Uvođenjem polarnih koordinata pomoću $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, dobija se pravougaona oblast $D_{\rho}\varphi$:

$$0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

JACOBIjan preslikavanja $(\rho, \varphi) \mapsto (x, y)$ je

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Prema formuli (47), površina kruga D_{xy} može se izračunati integracijom po pravougaoniku $D_{\rho}\varphi$:

$$m(D_{xy}) = \iint_{D_{\rho}\varphi} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = r^2 \pi.$$

Primetimo da poredak koordinata ρ i φ nije bitan, jer se u integralu uzima apsolutna vrednost JACOBIjana, a zamenom mesta ρ i φ samo se menja znak determinante. $\square$

Prema teoremi o srednjoj vrednosti integrala (teorema 3.8 na strani 90) iz (47) dobijamo da je

$$(48) \qquad m(D_{xy}) = |J(\xi, \eta)| m(D_{uv}),$$

gde je (ξ, η) neka tačka[1] iz oblasti D_{uv}. To znači da je

$$(49) \qquad \boxed{\frac{m(D_{xy})}{m(D_{uv})} = |J(\xi, \eta)|.}$$

[1]Preciznije: postoji tačka $(\xi, \eta) \in D_{uv}$ tako da važi (48).

Prema tome, odnos površina oblasti D_{xy} i D_{uv} jednak je JACOBIjanu izračunatom u nekoj tački oblasti D_{uv}. Posmatramo sada proizvoljan niz oblasti D_{uv} koje sve sadrže tačku (u_0, v_0), tako da diam $\mathrm{D_{uv}} \to 0$ (kaže se i da se oblast D_{uv} „sažima” u tačku (u_0, v_0), u oznaci $D_{uv} \to (u_0, v_0)$). Zbog neprekidnosti, JACOBIjan ima graničnu vrednost $J(u_0, v_0)$, pa je

$$\boxed{\lim_{D_{uv}\to(u_0,v_0)} \frac{m(D_{xy})}{m(D_{uv})} = |J(u_0, v_0)|.} \tag{50}$$

Ova relacija je razlog što se apsolutna vrednost JACOBIjana zove još i **koeficijent deformacije**. To je, naime, odnos površina slike oblasti D_{uv} i same oblasti D_{uv}, ukoliko se uzme da je D_{uv} dovoljno mala oblast. Primetimo da je (50) u stvari precizna verzija formule (43). Analogna precizna verzija može se izvesti i za formulu (44), ali to ovde nećemo raditi. Pored toga, u literaturi se mogu naći i dokazi da formule (49) i (50) važe i pod slabijim uslovima od ovde navedenih.

Primer 62. Izražavajući površinu $m(D_{xy})$ na uobičajen način pomoću dvojnog integrala u xy-ravni, (47) možemo napisati u obliku

$$\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{uv}} |J(u, v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{51}$$

Ako je D_{uv} pravougaona ćelija podele, sa površinom $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, onda D_{xy} nije pravougaona ćelija, pa njena površina nije $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Zato nije tačno da je $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, kao što bi se pogrešno moglo zaključiti iz poslednje formule. □

3.6.2 Smena promenljivih u višestrukim integralima

Neka je

$$I = \iint_{D_{xy}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{52}$$

Uvedimo nove promenljive u i v pomoću

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \qquad (u, v) \in D_{uv}.$$

Uočimo jednu podelu Π oblasti D_{uv} na ćelije $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sa tačkama (u_i, v_i) unutar svake ćelije. Ovoj podeli, pri preslikavanju oblasti D_{uv} u oblast D_{xy} odgovara podela Π^* oblasti D_{xy} na ćelije σ_i^*, sa tačkama (x_i, y_i), gde je $x_i = x(u_i, v_i), y = y(u_i, v_i)$. Integralna suma za integral I koja odgovara podeli Π^* je

$$S(f, \Pi^*, D_{xy}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\sigma_i^*).$$

Prema formuli (48) primenjenoj na preslikavanje σ_i na σ_i^*, imamo da je

$$m(\sigma_i^*) = |J(\xi_i, \eta_i)| m(\sigma_i),$$

gde je $(x_i, \eta_i) \in \sigma_i$. Prema tome, imamo da je

$$S(f, \Pi^*, D_{xy}) = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J(\xi_i, \eta_i)|m(\sigma_i). \tag{53}$$

Kada bi bilo $\xi = u_i, \eta_i = v_i$, dobili bismo integralnu sumu

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J(u_i, v_i)|m(\sigma_i), \tag{54}$$

koja konvergira ka integralu

$$\iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v. \tag{55}$$

Pokazuje se da zaista razlika između suma (53) i (54) teži nuli[1] kad $\|\Pi\| \to 0$; prema tome, obe integralne sume konvergiraju ka integralu (55). S druge strane, (54) konvergira ka integralu (52). Dakle, integrali (52) i (55) su jednaki i važi sledeća teorema.

Teorema 3.16 *Neka je dato bijektivno preslikavanje $(u, v) \mapsto (x, y)$ oblasti D_{uv} u oblast D_{xy}, sa neprekidnim parcijalnim izvodima x i y po u i v i neka je $J(u, v)$* JACOBI*jan preslikavanja. Tada je*

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v.$$

Primer 63. jedan dvojni integral koji se rešava smenom

U višestrukim integralima dimenzije veće od 2, važi analogan rezultat. Na primer, ako u trojnom integralu uvedemo smenu

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \qquad (u, v, w) \in V_{uvw}, \tag{56}$$

pomoću koje se oblast V_{uvw} preslikava u oblast V_{xyz}, onda je

$$\iiint_{V_{xyz}} f(x,y,z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_{V_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w,$$

gde je J JACOBIjan preslikavanja (56). Uslovi pod kojima ova relacija važi analogni su uslovima navedenim u teoremi 3.16.

Primer 64. jedan trojni integral koji se rešava smenom

æ

[1] Dokaz je zasnovan na neprekidnosti JACOBIjana.

3.7 Integrali koji zavise od parametra

3.7.1 Opšti pojmovi

Veliki broj integrala koji se pojavljuju u primenama ima oblik

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t, \quad -\infty \le a < b \le +\infty. \tag{57}$$

Ovog oblika su, na primer, razne integralne transformacije, kao što je LAPLACEova transformacija koju ćemo proučavati u glavi 6, gde je

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

za datu funkciju g. S obzirom da se integracija obavlja po promenljivoj t, druga promenljiva x se pojavljuje kao parametar[1]. Rezultat integracije se može posmatrati kao funkcija od x. Često je integral „nerešiv", odnosno ne može se izraziti pomoću elementarnih funkcija, pa se stoga funkcija F ne može direktno diferencirati ili integraliti. I u slučajevima kada se integral može rešiti, izgleda sasvim prirodno da važi, na primer,

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t. \tag{58}$$

Međutim, to nije uvek tačno, kao što ćemo videti u sledećem primeru.

Primer 65. Neka je

$$F(x) = \int_0^1 \log(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Primenom parcijalne integracije dobija se da je $F(x) = \ln(1+x^2) + 2x\mathrm{arctg}\,(1/x) - 2$ za $x \neq 0$ i $F(0) = -2$. Odavde je

$$F'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\log(1+h^2)}{h} + 2\mathrm{arctg}\,(1/h) = \pi,$$

i na isti način se dobija da je $F'_-(0) = -\pi$. Prema tome, izvod u nuli ne postoji. S druge strane, imamo da je

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(x^2+t^2) = \frac{2x}{x^2+t^2} = 0 \quad \text{za } x = 0,$$

tako da je i integral parcijalnog izvoda jednak nuli za $x=0$ i formula (58) ne važi.

[1] U matematici se pod parametrom podrazumeva veličina koja je konstantna u odnosu na operaciju koja se posmatra, ali koja nema fiksiranu brojnu vrednost, tj. nije apsolutna konstanta. Na primer, u jednačini $2x+3=a$, ako se dopusti da je a proizvoljni realan broj, onda se a smatra parametrom, dok su 2 i 3 konstante.

U nastavku ovog odeljka navešćemo dovoljne uslove pod kojima se limes, izvod ili integral funkcije F definisane sa (57) mogu dobiti izmenom redosleda ovih operacija i integrala po t, odnosno primenom navedenih operacija na podintegralnu funkciju $f(x,t)$. Ovi uslovi su komplikovaniji ako je integral u (57) nesvojstven, pa stoga razmatramo odvojeno slučaj svojstvenog (RIEMANNovog) integrala i slučaj nesvojstvenog integrala. U oba slučaja bitan je pojam uniformne konvergencije funkcije, koji se definiše slično uniformnoj konvergenciji niza.

Definicija 3.4 *Neka je za svako fiksirano $t \in A$, funkcija $f(x,t)$ definisana u nekoj okolini U_t tačke x_0 i neka za svako $t \in A$ postoji $\lim_{x\to x_0} f(x,t) = \varphi(t)$. Ako važi da*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall t \in A)(\forall x \in U_t) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x,t) - \varphi(t)| < \varepsilon,$$

onda kažemo da $f(x,t)$ konvergira ka $\varphi(t)$ uniformno u odnosu na $t \in A$.

Jedan jednostavan kriterijum koji se lako proverava daje sledeća teorema.

Teorema 3.17 *Potreban i dovoljan uslov da je $\lim_{x\to x_0} f(x,t) = \varphi(t)$ uniformno po $t \in A$ je da postoji funkcija $g(x)$, koja ne zavisi od t, takva da je $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ i da je $\sup_{t\in A} |f(x,t) - \varphi(t)| \le g(x)$ za svako x iz neke okoline tačke x_0.*

Dokaz teoreme se može izvesti direktno iz definicije 3.4.

Primer 66. 1° Neka je $f(x,t) = t + e^{t-1/x^2}$. Kad $x \to 0$ za svako fiksirano t imamo da $f(x,t) \to t$. Da li je konvergencija ka $\varphi(t) = t$ uniformna po $t \in (0,+\infty)$? Kako je

$$|f(x,t) - \varphi(t)| = e^{t-1/x^2} = e^t \cdot e^{-1/x^2},$$

vidimo da bez obzira koliko je e^{-1/x^2} malo, postojaće neko $t \in (0,+\infty)$ za koje je $|f(x,t) - \varphi(t)| > 1$, na primer, tako da konvergencija nije uniformna. Konkretno, ako stavimo da je $t = 1/x^2 + 1$, imamo da je $|f(x,t) - \varphi(t)| = e$ bez obzira na to koliko je x blizu nule.

2° Za istu funkciju kao u primeru 1°, konvergencija je uniformna po t na bilo kom konačnom intervalu, recimo na $[0,1]$, ili na bilo kom intervalu koji je ograničen odozgo, na primer na $(-\infty,1]$. Naime, za $t \le 1$ imamo da je

$$|f(x,t) - \varphi(t)| = e^{t-1/x^2} = e^t \cdot e^{-1/x^2} < e^{1-1/x^2} \to 0,$$

tako da, prema teoremi 3.17 konvergencija $f(x,t)$ ka $\varphi(t)$ ovde jeste uniformna po $t \in (-\infty,1]$. $\square$

Teorema 3.18 *Ako je je funkcija $f(x,t)$ neprekidna kao funkcija dve promenljive u pravougaoniku $[\alpha,\beta] \times [a,b]$, onda je za svako $x_0 \in (\alpha,\beta)$*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,t) = f(x_0,t) = \varphi(t) \quad \textit{uniformno po } t \in [a,b].$$

Dokaz. Kako je zatvoreni pravougaonik kompaktna oblast, neprekidna funkcija f je uniformno neprekidna u toj oblasti, što po definiciji znači da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in [\alpha, \beta])(\forall t, t' \in [a, b]) \quad |x - x'| < \delta \wedge |t - t'| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x', t')| < \varepsilon.$$

Ako se ovde stavi $x' = x_0$ i $t' = t$, dobija se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [\alpha, \beta])(\forall t \in [a, b]) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon,$$

što onda prema definiciji 3.4 znači da $f(x, t)$ konvergira ka $f(x_0, t)$ uniformno po $t \in [a, b]$.

3.7.2 Riemannov integral koji zavisi od parametra

U ovom delu posmatramo integral

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t, \tag{59}$$

gde su a i b realni brojevi ($-\infty < a < b < +\infty$), a funkcija $f(x, t)$ je za dato x integrabilna (u RIEMANNovom smislu) po t na segmentu $[a, b]$. Dajemo bez dokaza dovoljne uslove za nalaženje limesa, diferenciranje i integraciju funkcije F pod integralom u (59).

Teorema 3.19 *Neka je $\lim_{x \to x_0} f(x, t) = \varphi(t)$ pri čemu je konvergencija uniformna u odnosu na $t \in [a, b]$. Tada je*

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

U većini slučajeva od interesa, funkcija $f(x, t)$ je neprekidna. Primenom teoreme 3.18 i teoreme 3.19, dobija se sledeći rezultat.

Teorema 3.20 *Ako je funkcija $f(x, t)$ neprekidna kao funkcija dve promenljive na pravougaoniku $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, onda je funkcija $x \mapsto F(x)$ neprekidna na $[\alpha, \beta]$.*

Teorema 3.21 *Neka je funkcija $f(x, t)$ neprekidna kao funkcija dve promenljive u pravougaoniku $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [a, b]$ (za neko $\delta > 0$), pri čemu za svako $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ postoji parcijalni izvod $\partial f / \partial x$ i neprekidan je kao funkcija dve promenljive. Tada je*

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{x\, =\, x_0} \; \mathrm{d}t.$$

Integracija funkcije F svodi se na zamenu redosleda integracije u dvojnom integralu, što je već razmatrano u teoremi **??** na strani 95. Radi kompletnosti, ponovimo da je za ispravnost formule

$$\int_\alpha^\beta F(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

dovoljno da je funkcija $f(x, t)$ neprekidna u pravougaoniku $[\alpha, \beta] \times [a, b]$.

Primer 67. U mnogim slučajevima se diferenciranjem po parametru integral uprošćava. Kao primer posmatrajmo integral

$$F(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x\cos t + x^2)\,\mathrm{d}t$$

za $|x| < 1$. Podintegralna funkcija je neprekidna na svakom pravougaoniku $[-1+\delta, 1-\delta] \times [0,\pi]$ za proizvoljno malo $\delta > 0$, pa se teorema 3.21 može primeniti za svako $x \in (-1,1)$ (za $x = \pm 1$ podintegralna funkcija nije ograničena u okolini $t = 0$, odnosno $t = \pi$). Diferenciranjem po x pod integralom dobijamo da je

$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{2(x - \cos t)}{1 - 2x\cos t + x^2}\,\mathrm{d}t,$$

a ovaj integral se rešava standardnom smenom $u = \operatorname{tg} t/2$, pri čemu se dobija da je njegova vrednost jednaka nuli. Dakle, $F'(x) = 0$, odakle je $F(x) = C$ za $|x| < 1$. Kako je $F(0) = 0$ (jer je podintegralna funkcija jednaka nuli), zaključujemo da je $F(x) = 0$ za svako $x \in (-1,1)$.

3.7.3 Uniformna konvergencija nesvojstvenog integrala

Neka je

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t, \tag{60}$$

gde je $a \in \mathbf{R}$. Ovo je nesvojstveni integral koji zavisi od parametra. Nesvojstveni integral nastaje i u slučaju kad podintegralna funkcija nije ograničena na konačnom intervalu, ali ovaj slučaj nećemo posebno razmatrati, jer se on tretira analogno integralu (60). Nesvojstveni integral (60) konvergira za dato x ako funkcija dve promenljive

$$G(x,b) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

ima konačnu graničnu vrednost $F(x)$ kad $b \to +\infty$. Integral (60) **uniformno konvergira** u odnosu na $x \in A$ ako funkcija $G(x,b)$ uniformno konvergira ka funkciji $F(x)$ u odnosu na $x \in A$ kad $b \to +\infty$. Kako je $F(x) - G(x,b) = \int_b^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$, sleduje da integral (**??**) uniformno konvergira u odnosu na $x \in A$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in A) \quad b > K \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Integral sa beskonačnom gornjom granicom ima osobine analogne osobinama redova. Svi kriterijumi uniformne i obične konvergencije redova sa članovima proizvoljnog znaka imaju svoje analogne formulacije kod integrala. Navodimo bez dokaza WEIERSTRASSov kriterijum uniformne konvergencije nesvojstvenog integrala po parametru.

Teorema 3.22 *Neka je funkcija $f(x,t)$ za svako $x \in A$ integrabilna po t na svakom konačnom segmentu $[a,b]$. Ako postoji nenegativna funkcija $g(t)$ za koju je $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$, pri čemu je $|f(x,t)| \le g(t)$ za svako $x \in A$, onda integral (60) konvergira uniformno u odnosu na $x \in A$.*

Teorema 3.22 može se formulisati (sa analognim uslovima) i za slučaj nesvojstvenog integrala kod koga je podintegralna funkcija neograničena.

Primer 68. Neka je

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t. \tag{61}$$

Funkcija F je definisana za svako $x > 0$, dok za $x \le 0$ integral u (61) divergira. Ako je $x \ge x_0 > 0$, onda je $e^{-xt^2} \le e^{-x_0 t^2}$, pa primenom teoreme 3.22 zaključujemo da integral uniformno konvergira u odnosu na $x \in [x_0, +\infty)$.

3.7.4 Nesvojstveni integrali koji zavise od parametra

U ovom delu razmatramo ista pitanja kao i u 3.7.2, ali za nesvojstveni integral. Posmatramo ponovo slučaj kada je gornja granica integrala beskonačna, tj.

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t, \qquad a \in \mathbf{R}. \tag{62}$$

Navešćemo bez dokaza tri teoreme koje daju dovoljne uslove za neprekidnost, diferencijabilnost i integrabilnost (u smislu zamene redosleda integracije) funkcije F definisane sa (60).

Teorema 3.23 *Ako je integral u (62) uniformno konvergentan u odnosu na $x \in [c,d]$ i ako je funkcija $f(x,t)$ neprekidna (kao funkcija dve promenljive) u oblasti $x \in [c,d], t \in [a,+\infty)$, onda je funkcija $x \mapsto F(x)$ neprekidna na segmentu $[c,d]$.*

Teorema 3.24 *Neka je funkcija $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ neprekidna (kao funkcija dve promenljive) u oblasti $x \in [c,d], t \in [a,+\infty)$. Pretpostavimo dalje da je integral u (62) konvergentan za svako $x \in [c,d]$, a da je integral*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t$$

uniformno konvergentan u odnosu na $x \in [c,d]$. Tada je funkcija F definisana sa (62) diferencijabilna i važi jednakost

$$F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

Teorema 3.25 *Ako je integral u (62) uniformno konvergentan u odnosu na $x \in [c,d]$ i ako je funkcija $f(x,t)$ neprekidna (kao funkcija dve promenljive) u oblasti $x \in [c,d], t \in [a,+\infty)$, onda je*

$$\int_c^d F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Drugim rečima, dozvoljena je promena poretka integracije.

Primedba. U drugim slučajevima nesvojstvenih integrala, izložene teoreme važe pod analognim uslovima. Na primer, ako imamo integral

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d},t$$

kod koga je podintegralna funkcija neograničena u okolini tačke a, pa je integral zato nesvojstven, formulacija teoreme **??** bi glasila: Ako je posmatrani integral uniformno konvergentan u odnosu na $x \in [c,d]$ i ako je funkcija $f(x,t)$ neprekidna u oblasti $x \in [c,d], t \in (a,b]$, onda je funkcija F neprekidna na $[c,d]$.

3.7.5 Konvolucija funkcija

Neka su f i g realne funkcije definisane na $\mathbf{R}$. Ako za svako $t \in D \subset \mathbf{R}$ postoji integral

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u, \tag{63}$$

ovim integralom je na domenu D definisana jedna funkcija promenljive t; ona se naziva **konvolucijom funkcija** f i g, u oznaci $h = f*g$. Konvolucija, kao operacija definisana nad funkcijama, ima veoma široku primenu u raznim oblastima. Na primer, u primenama vezanim za obradu signala, koristi se svojstvo konvolucije da „pegla" funkcije, odnosno povećava njihov stepen glatkosti. Ilustrovaćemo ovu osobinu na jednom primeru.

Primer 69. Neka je

$$f(x) = 1 - |x| \quad \text{za } x \in [-1,1]; \qquad f(x) = 0 \quad \text{inače.}$$

Funkcija f nije diferencijabilna u tačkama $x = 0$, $x = \pm 2$. Izračunavanjem integrala kojim je definisana konvolucija, nalazimo da je $f*f = h$, gde je funkcija h definisana sa

$$h(t) = \begin{cases} \frac{3|t|^3 - 6t^2 + 4}{6} & t \in (-1,1) \\ h(t) = \frac{-|t|^3 + 6t^2 - 12t + 8}{6} & t \in (-2,-1] \cup [1,2) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Nije teško proveriti da je funkcija h neprekidna i diferencijabilna u svakoj tački $t \in \mathbf{R}$ (videti i sliku 62). $\square$

U sledećoj teoremi dajemo neke osobine konvolucije.

Teorema 3.26 Osobine konvolucije *Na domenu na kome su konvolucije definisane, važi:*

(i) $f * g = g * f$ *(komutativnost)*

(ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ *(asocijativnost)*

(iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$ *(distributivnost u odnosu na sabiranje)*

Slika 44. Efekat konvolucije. (skonp)

(iv) $|f * g| \leq |f| * |g|$ *(nejednakost trougla)*

Dokaz. Smenom $v = t - u$ dobija se

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-v)\,\mathrm{d}v \\ &= (g * f)(t),\end{aligned}$$

čime je dokazana osobina (i). Osobina (ii) dokazuje se pomoću dvojnih integrala, osobina (iii) pomoću linearnosti integrala, a osobina (iv) pomoću nejednakosti trougla za integral; detalje ovih dokaza izostavljamo.

S obzirom da je konvolucija samo poseban slučaj nesvojstvenog integrala koji zavisi od parametra, primen

3.7.6 Gama funkcija

EULERova gama funkcija definisana je kao nesvojstveni integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t. \tag{64}$$

U integralu (64), promenljiva x se pojavljuje kao parametar. Prema tome, materijal koji smo izložili u delu 3.7.4 odnosi se na gama funkciju. Pre nego što pređemo na ispitivanje domena i ostalih osobina ove funkcije, primetimo da je

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1. \tag{65}$$

Dalje, polazeći od jednakosti

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x}\,\mathrm{d}t$$

i primenjujući parcijalnu integraciju sa $u = t^x$, $\mathrm{d}v = e^{-t}\,\mathrm{d}t$, dobijamo da je

$$\boxed{(66) \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Prema tome, imamo da je

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1 \cdot 1 = 1,\ \Gamma(3) = 2 \cdot 1 \cdot 1,\ \Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1, \ldots$$

odakle zaključujemo da je

$$\boxed{(67) \qquad \Gamma(n) = (n-1)!, \qquad n \in \mathbf{N}.}$$

Dakle, Gama funkcija ima ulogu "neprekidnog faktorijela", što je ustvari i motivisalo njeno otkriće i proučavanje[1].

Za $x = 1/2$ dobijamo da je

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2}\, \mathrm{d}t == 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}\, \mathrm{d}\tau \quad (\text{smena } t = \tau^2).$$

Kako je $\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}\, \mathrm{d}\tau = \sqrt{\pi}/2$ (videti primer 57 na strani 102), imamo da je

$$(68) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ovaj rezultat, zajedno sa funkcionalnom jednačinom (66) omogućava da se odredi $\Gamma(n + 1/2)$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Na primer,

$$\Gamma(5/2) = \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

ili, u opštem slučaju,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Gama funkcija se pojavljuje u raznim oblastima Matematike. Ona ima u Matematici isti tretman kao elementarne funkcije, mada po tradicionalnoj podeli ne spada u tu kategoriju. Na primer, svaki matematički programski paket pored elementarnih funkcija ima i standardno ugrađenu Gama funkciju.

Dokazaćemo sada da je funkcija $x \mapsto \Gamma(x)$ definisana, neprekidna i diferencijabilna na domenu $x > 0$. U dokazu ćemo koristiti činjenicu da je

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n\, \mathrm{d}t < +\infty \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

[1] EULER je definisao Gama funkciju 1729. godine, kada je imao 22 godine, sa ciljem da otkrije funkciju koja interpolira faktorijel. EULERje zapravo otkrio da je $n! = \int_0^1 (-\log t)^n\, \mathrm{d}t$, što se smenom promenljive dovodi na oblik koji se pojavljuje u našem tekstu. Oznaku $\Gamma(x)$ je tek kasnije uveo LEGENDRE. Ponekad se koristi i oznaka $x!$ za $\Gamma(x+1)$.

Ovo je poznato iz osnovnog kursa Matematičke analize, a može se lako dokazati nalaženjem primitivne funkcije za navedeni integral.

Kako su obe granice integrala u (64) kritične za konvergenciju (0 zbog slučaja $0 < x < 1$ u kome podintegralna funkcija postaje neograničena), podelimo integral na dva dela:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = I_1(x) + I_2(x).$$

Za $x \in [\frac{1}{n}, n]$ $n \in \mathbf{N}$ i za $t \in (0, 1]$, imamo da je

$$e^{-t}t^{x-1} \leq t^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{i} \quad \int_0^1 t^{\frac{1}{n-1}}\,\mathrm{d}t = nt^{\frac{1}{n}}\Big|_0^1 = n,$$

tako da je integral I_1 uniformno konvergentan na osnovu Weierstrassovog kriterijuma (teorema 3.22 i primedba iza ove teoreme).

Za $t \in [1, +\infty)$ važi da je

$$e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{n-1} \quad \text{i} \quad \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

tako da je i integral I_2 uniformno konvergentan. Dakle, dokazali smo da je integral u (64) uniformno konvergentan u odnosu na x po svakom konačnom segmentu $[\frac{1}{n}, n]$. Kako svako $x > 0$ pripada nekom takvom segmentu, zaključujemo, pre svega, da je $\Gamma(x)$ definisana za $x > 0$. Dalje, kako je funkcija $f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$ neprekidna u oblasti $x \in [\frac{1}{n}, n], t \in (0, +\infty)$, iz teoreme 3.23 sledi da je integral $I_2(x)$ neprekidna funkcija po x, i takođe (videti primedbu na strani 121) da je integral $I_1(x)$ neprekidan, što onda znači da je i funkcija $\Gamma(x)$ neprekidna u svakoj tački $x \in [-\frac{1}{n}, n]$. Odavde zaključujemo, na isti način kao kod definisanosti, da je funkcija $x \mapsto \Gamma(x)$ neprekidna u svakoj tački $x > 0$. Da bismo dokazali diferencijabilnost, potrebno je dokazati da je integral

$$J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\log t\,\mathrm{d}t \tag{69}$$

uniformno konvergentan u odnosu na $x \in [\frac{1}{n}, n]$, što se dokazuje veoma slično kao kod neprekidnosti. Polazimo od

$$J(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\log t\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\log t\,\mathrm{d}t = J_1(x) + J_2(x).$$

Uočimo sada da je za $x \in [\frac{1}{n}, n]$ i $t \in (0, 1]$,

$$|e^{-t}t^{x-1}\log t| \leq -t^{\frac{1}{n}-1}\log t,$$

kao i da je

$$-\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}\log t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{\tau/n}\tau\,\mathrm{d}\tau < +\infty \quad (\text{smena } \log t = \tau).$$

Odavde sleduje da je integral $J_1(x)$ uniformno konvergentan na $[\frac{1}{n}, n]$. Dalje, za $x \in [\frac{1}{n}, n]$ i $t \in [1, +\infty)$ imamo da je

$$e^{-t}t^{x-1}\log t \leq e^{-t}t^{n-1}\log t < e^{-t}t^n$$

(gde smo koristili nejednakost $\log t < t$). Kako je

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \,\mathrm{d}t < +\infty,$$

zaključujemo da je i integral $J_2(x)$ uniformno konvergentan. Stoga je integral $J(x)$ uniformno konvergentan u odnosu na $x \in [\frac{1}{n}, n]$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, Gama funkcija je diferencijabilna u svakoj tački $x > 0$. Na istovetan način (samo zamenom $\log t$ sa $(\log t)^k$ u izvodnom integralu) dokazuje se da Gama funkcija ima izvod reda k, za svako $k > 1$.

Što se tiče integracije, već je dokazano da su uslovi teoreme 3.25 ispunjeni, pa se može menjati redosled integracije. Sumiraćemo sada dobijene rezultate.

Teorema 3.27 *U svakoj tački $x > 0$ funkcija $x \mapsto \Gamma(x)$ je neprekidna i diferencijabilna i ima izvod proizvoljnog reda $k \geq 1$, za koji važi da je*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^t t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Osim toga, Gama funkcija je integrabilna na svakom konačnom segmentu $[a, b]$, pri čemu važi da je

$$\int_a^b \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_a^b e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{b-1}-t^{a-1}}{\log t}\,\mathrm{d}t.$$

Za $x \leq 0$ integral kojim je definisana gama funkcija je divergentan. Međutim, gama funkcija se za $x < 0$ može definisati koristeći se, na primer, jednakošću (66). Na primer, ako je $x \in (-1, 0)$, onda je

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e{-}tt^x\,\mathrm{d}t. \tag{70}$$

Dakle, $\Gamma(x)$ za $x \in (-1, 0)$ definiše se pomoću vrednosti $\Gamma(x+1)$, gde $x+1 \in (0, 1)$. Na isti način, za $x \in (-2, 1)$ imamo da je

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)},$$

pa se i ovde vrednosti za $\Gamma(x)$ izračunavaju pomoću vrednosti ove funkcije u intervalu $(0, 1)$. Na ovaj način se dobija produženje gama funkcije na negativni deo x-ose, pri čemu je jedino $\Gamma(x)$ nedefinisana za $x = 0, -1, -2, \ldots$; u okolini ovih tačaka gama funkcija je neograničena. Grafik gama funkcije predstavljen je na slici 45.

Slika 45. Gama funkcija. (sgamma)

Gama funkcija se i u kompleksnom domenu može definisati integralom (64), o čemu će kasnije biti više reči.

U vezi sa gama funkcijom je beta funkcija, koja se definiše kao funkcija dve promenljive

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Ovaj integral je nesvojstven za $x < 1$ (podintegralna funkcija neograničena oko $t = 0$) i za $y < 1$ (oko $t = 1$). Dokazaćemo da je

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x, y > 0. \tag{71}$$

Polazimo od relacije

$$\begin{aligned} B(x, y)\Gamma(x+y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} e^{-s}s^{x+y-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \iint_D e^{-s}(st)^{x-1}(s(1-t))^{y-1}s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

gde je D oblast u st-ravni ograničena pravama $s = 0$, $t = 0$ i $t = 1$. Uvođenjem novih promenljivih $u = st$, $v = s(1-t)$ $(s = u+v,\ t = u/(u+v))$ $|J| = 1/s$, oblast integracije postaje prvi kvadrant uv-ravni, tako da dobijamo

$$\begin{aligned} B(x, y)\Gamma(x+y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u+v)}u^{x-1}v^{y-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}\,\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} e^{-v}v^{y-1}\,\mathrm{d}v = \Gamma(x)\Gamma(y), \end{aligned}$$

čime je formula (71) dokazana. Pretvaranje dvojnog (nesvojstvenog) u dvostruki integral i obrnuto je dozvoljeno, što ostavljamo čitaocu da proveri na osnovu materijala izloženog u delu 3.3.5.

Iz jednakosti (71) izlazi da je beta funkcija neprekidna i diferencijabilna u oblasti $x > 0, y > 0$, tj. u prvom kvadrantu xy-ravni.

æ

3.8 Površinski integral

3.8.1 Površinski integral prve vrste

Neka je S glatka površ u $\mathbf{R}^3$, čije su parametarske jednačine

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), \qquad (u,v) \in D_{uv}. \tag{72}$$

Ćelija σ je svaki ograničen deo površi S čija je granica deo po deo glatka kontura. Mera ćelije je njena površina, $m(\sigma)$. Za funkciju $f(x,y,z)$ i za datu podelu površi S definišemo integralnu sumu

$$S(f,\Pi,S) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) m(\sigma_i),$$

gde su $P_i(x_i, y_i, z_i)$ izabrane tačke u svakoj ćeliji podele. Integral koji proizilazi iz ove konstrukcije naziva se površinskim integralom I vrste, u oznaci

$$\iint_S f(x,y,z)\, \mathrm{d}S.$$

Mera svake ćelije podele je pozitivna, pa površinski integral ima osobine koje su navedene u 3.1.2 i 3.1.3, koje se odnose na ovakav slučaj.

S obzirom na definiciju površine dela površi, može se pokazati da se dobija isti integral ako se integralne sume definišu pomoću

$$S(f,\Pi,S) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) m(\bar{\sigma}_i),$$

gde je $m(\bar{\sigma}_i)$ površina ortogonalne projekcije ćelije σ_i na tangentnu ravan konstruisanu u tački P_i.

Element površine površi u krivolinijskim koordinatama

Jednačine (72) definišu preslikavanje oblasti D_{uv} u uv-ravni u oblast na površi S, u xyz-prostoru. Polazeći od definicije površine dela površi, dobijaju se formule koje, slično kao u ravni (videti 3.6.1), izražavaju površine na S preko površina na D_{uv} i odgovarajućih Jacobijana. Njihovo strogo izvođenje je složeno i izostavićemo ga, ali ćemo, korišćenjem istog jednostavnog postupka kao u ravni, izvesti približnu formulu. U ovom delu ćemo ponovo koristiti oznake A, B, C i E, F, G, koje smo uveli u 2.5.6 na strani 75, kao i veze između ovih koeficijenata koje se mogu naći na istom mestu.

Koordinatne linije $\Delta u =$ const. i $\Delta v =$ const. preslikavanjem (72) preslikavaju se u krive na površi. Neka je ΔD_{uv} površina pravougaonika u uv-ravni koji je ograničen sa četiri kooordinatne linije kao na slici 46. Ovaj pravougaonik preslikava se u deo površi, sa površinom ΔS. Smatrajući da su Δu i Δv dovoljno mali, imamo da je

$$\Delta S \approx |\vec{AB} \times \vec{AD}|.$$

Slika 46. Elementarne površine u uv-ravni i na površi. (elpop)

Dalje, isto kao u dvodimenzionalnom slučaju, imamo da je

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \big(x(a_1+\Delta u, b_1) - x(a_1,b_1), y(a_1+\Delta u, b_1) - y(a_1,b_1), z(a_1+\Delta u, b_1) - z(a_1,b_1)\big)\\ &\approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\, \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u\right).\end{aligned}$$

Na isti način nalazimo da je

$$\vec{AD} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v\right),$$

tako da je

$$\vec{AB} \times \vec{AD} \approx \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u\Delta u & y_u\Delta u & z_u\Delta u \\ x_v\Delta v & y_v\Delta v & z_v\Delta v \end{vmatrix} = (A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k})\Delta u\Delta v.$$

Odavde je

$$\Delta S \approx \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\Delta u\Delta v = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\Delta D_{uv},$$

gde su determinante A, B, C izračunate u tački sa $u = a_1, v = a_2$ (a ustvari zbog podrazumevane pretpostavke da su Δu i Δv dovoljno mali, aproksimacija važi i ako se ovi koeficijenti izračunaju u bilo kojoj tački pravougaonika).

Preciznije, važi sledeći rezultat koji navodimo bez dokaza.

> Za glatku površ definisanu parametarskim jednačinama (72) važi da je
>
> (73) $$m(S) = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, m(D_{uv}) = \sqrt{EG-F^2}\, m(D_{uv}),$$
>
> gde su koeficijenti A, B, C, E, F, G izračunati u nekoj tački[2]oblasti S.

[1]tačka koja se ovde pominje nije proizvoljna; ona je određena jednakošću (73), ali su njene koordinate nebitne.

U posebnom slučaju, ako je površ zadata u eksplicitnom obliku $z = g(x, y)$, nije teško videti da se (uzimajući x i y za parametre, umesto u i v) formula (73) svodi na

$$m(S) = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, m(D_{xy}). \tag{74}$$

Ovde je D_{xy} projekcija površine S na xy-ravan.

Izražavanje površinskog integrala preko dvojnog

Posmatrajmo ponovo površ zadatu parametarskim jednačinama (72). Svakoj podeli površi S na ćelije σ_i odgovara neka podela oblasti D_{uv} na ćelije σ_i^*, pri čemu su ćelije σ_i slike ćelija σ_i^* u preslikavanju (72). Prema formuli (73) imamo da je

$$m(\sigma_i) = \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}\, m(\sigma_i^*),$$

gde su A_i, B_i, C_i, izračunati u nekoj tački ćelije σ_i^*. Dakle, integralna suma za površinski integral po površi S postaje

$$S(f, \Pi, S) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) m(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}\, m(\sigma_i^*).$$

Može se pokazati da u graničnom procesu integralna suma sa desne strane konvergira ka integralu

$$\iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Prema tome, važi sledeća teorema.

Teorema 3.28 *Ako je glatka površ S zadata parametarskim jednačinama (72), tada je*

$$\begin{aligned} &\iint_S f(x,y,z)\, \mathrm{d}S \\ (75) = &\iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\ = &\iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Za površ zadatu u eksplicitnom obliku $z = g(x, y)$, primenom izvedene formule na x i y kao parametre koji uzimaju vrednosti iz projekcije D_{xy} površine S na xy-ravan, dobija se[1] sledeći rezultat:

[1] U ovom slučaju je $A = -g_x, B = -g_y, C = 1$.

Ako je površ S zadata jednakošću $z = g(x, y)$, gde $(x, y) \in D_{x,y}$, pri čemu je g diferencijabilna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda, tada je

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{76}$$

Analogne relacije važe u slučajevima kada se jednačina površi može napisati u obliku $y = g(x, z)$ ili $x = g(y, z)$.

Teorema (3.28) je značajna, jer omogućava rešavanje površinskog integrala pomoću dvojnog. Ako se stavi da je $f(x, y, z) \equiv 1$, dobija se formula za izračunavanje površine površi:

Površina površi S zadate parametarskim jednačinama (72):

$$\begin{aligned} m(S) &= \iint_{D_{uv}} \sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint_{D_{uv}} \sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Primer 70. Izračunati površinski integral a) parametarski obli; b) eksplicitan oblik

Primer 71. Primenom površinskog integrala izračunati površinu elipsoida sa poluosama a, b, c.

Rešenje. Parametarske jednačine elipsoida sa poluosama a, b, c i sa centrom u koordinatnom početku su

3.8.2 Površinski integral druge vrste

Orijentacija površi

Površi se mogu orijentisati tako što se jedna strana površi usvoji za „lice”. Tada se za smer normale u svakoj tački uzima onaj koji ide od „lica” površi; na „naličju” normala ulazi u površ. Naravno, da bi se ovo moglo ostvariti, potrebno je da površ ima dve strane, što nije uvek slučaj. Klasičan primer je tzv. MÖBIUSov list, koji se može dobiti ako se papirna traka presavije kao na slici 47b. Ovakva površ ima samo jednu stranu.

Ako se površ podeli na ćelije, onda se kontura koja je granica svake pojedinačne ćelije može orijentisati na dva načina. Pri tome kriva koja je zajednička granica dve susedne ćelije može biti orijentisana ili u istom smeru u obe ćelije ili u različitim smerovima. Pokazuje se da u slučaju dvostrane površi uvek postoji takva orijentacija ćelija da su granice susednih ćelija orijentisane u suprotnim smerovima.

Slika 47. a) Orijentacija površi pomoću normale; b) Möbiusov list. (smob)

Slika 48. a) Orijentacija površi podelom na ćelije i orijentacija normale po pravilu desne zavojnice; b) Definisanje orijentacije u slučaju parametarski zadate krive. (sorijen)

Orijentacija konture koja je granica jedne ćelije definiše smer normale u svakoj tački ćelije, po pravilu desne zavojnice.

Ako je površ zadata parametarskim jednačinama (72), onda se podela na ćelije i njihova orijentacija može definisati primenom iste procedure u uv-ravni, a zatim preslikavanjem na površ S, kao na slici 48b. Naime, u uv-ravni imamo dve moguće orijentacije kontura: pozitivnu ili negativnu. Ako se oblast D_{uv} podeli na ćelije, čije granice se zatim orijentišu ili sve pozitivno ili sve negativno, dobiće se orijentisane ćelije na površi S.

Ukoliko je površ zadata eksplicitnom jednačinom $z = f(x, y)$, orijentaciju je moguće definisati i tako što se utvrdi da normala zaklapa sa z-osom ili svuda oštar ugao ($\cos\gamma \geq 0$) ili svuda tup ugao ($\cos\gamma \leq 0$). Ovde se može govoriti o gornjoj strani površi ($\cos\gamma > 0$) i donjoj ($\cos\gamma < 0$).

U slučaju zatvorenih površi, govorimo o spoljnoj i unutrašnjoj strani površi.

Definicija površinskog integrala II vrste

Neka je S orijentisana glatka površ. Ćelija je, isto kao kod površinskog integrala I vrste, svaki deo površi S ograničen prostom deo po deo glatkom konturom. Pored

Slika 49. a) Orijentacija eksplicitno zadate površi; b) Orijentacija zatvorene površi. (sorijen2)

toga, ovde ćemo pretpostaviti da su ćelije dovoljno malog dijametra da normala u svakoj tački ćelije zaklapa ugao sa z-osom čiji je kosinus nepromenljivog znaka (tj. $\cos\gamma \geq 0$ ili $\cos\gamma \leq 0$ u svakoj tački jedne ćelije). Mera ćelije σ je površina njene ortogonalne projekcije na xy-ravan pomnožena sa znakom $\cos\gamma$:

$$m(\sigma) = \begin{cases} m(\sigma') & \text{ako je } \cos\gamma \geq 0 \text{ u ćeliji } \sigma \\ -m(\sigma') & \text{ako je } \cos\gamma \leq 0 \text{ u ćeliji } \sigma \\ 0 & \text{ako je } \cos\gamma = 0 \text{ u ćeliji } \sigma \end{cases}$$

Ovde je sa σ' označena ortogonalna projekcija ćelije σ na xy-ravan[1]. Primetimo da je $m(\sigma) = 0$ samo u slučaju kada je ćelija σ ortogonalna na xy-ravan, a tada je i $m(\sigma') = 0$.

Integralna suma pri podeli Π sa tačkama $P_i(x_i, y_i, z_i)$ unutar ćelije σ_i glasi:

$$S(f, \Pi, S) = \sum_{i=1}^{n} \pm f(x_i, y_i, z_i) m(\sigma_i'), \tag{77}$$

pri čemu se znak $+$ ili $-$ uzima prema navedenom pravilu[2].

Integral koji se dobija opisanom konstrukcijom naziva se površinskim integralom II vrste po koordinatama x i y, u oznaci

$$\iint_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{78}$$

! Ukoliko je S deo cilindrične površi ortogonalne na xy-ravan (tj. ako je $\cos\gamma = 0$ u svim tačkama površi S, tada je mera svake ćelije podele jednaka nuli, tako da je i integral (78) jednak nuli.

U najjednostavnijem slučaju, kada je površ S zadata eksplicitno sa $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, normala na S je orijentisana tako da je ili $\cos\gamma \geq 0$ svuda na S (gornja

[1] Slovo m je ovde upotrebljeno u dva značenja, da bi se izbegle komplikovane oznake: $m(\sigma)$ se definiše pomoću $m(\sigma')$, što je ranije definisana mera oblasti u ravni, odnosno površina.

[2] Ako postoje ćelije koje su ortogonalne na xy-ravan, tada je svejedno koji znak uzimamo, jer je $m(\sigma_i') = 0$.

strana površi) ili je svuda $\cos\gamma \leq 0$ (donja strana). Integralne sume (77) su u tom slučaju integralne sume za dvojni integral funkcije $f(x, y, g(x, y))$ po oblasti D_{xy}. Dakle, u ovom slučaju imamo da je

(79) $$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{Dxy} f(x, y, g(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pri čemu se uzima znak $+$ ako se integrali po gornjoj strani površi, i znak $-$ pri integraciji po donjoj strani.

Kasnije ćemo videti da se i u opštem slučaju parametarski zadate površi, površinski integral II vrste može izraziti preko dvojnog integrala.

Površinski integral II vrste se analogno definiše po koordinatama z i x, odnosno y i z (s tim što se umesto projekcije na xy-ravan i znaka $\cos\gamma$ uzima projekcija na zx-ravan i $\cos\beta$, odnosno projekcija na yz-ravan i $\cos\alpha$). U opštem slučaju, imamo integral

$$\iint_S P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

koji se dobija kao zbir tri integrala po kordinatama.

Površinski integral II vrste zavisi od orijentacije površi i važi relacija

$$\begin{aligned}&\iint_{S_-} P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_{S_+} P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

gde su sa S_+ i S_- označene dve moguće orijentacije površi S.

Veza između površinskih integrala I i II vrste

Polazimo od integralne sume za integral II vrste po xy-koordinatama

$$S(f, \Pi, S) = \sum_{i=1}^{n} \pm f(P_i) m(\sigma_i'),$$

gde je $m(\sigma_i')$ površina projekcije ćelije σ_i na xy-ravan, a znak $+$ ili $-$ se bira u zavisnosti od znaka $\cos\gamma$ u ćeliji σ_i (pretpostavljamo da su ćelije dovoljno male da se ovaj znak ne menja). Označimo (samo u ovom delu) površinu ćelije σ_i sa $P(\sigma_i)$. Tada imamo da je

$$m(\sigma_i') = P(\sigma_i)|\cos\gamma_i|,$$

gde je γ_i ugao koji normala u nekoj tački ćelije σ_i (ne obavezno u tački P_i) zaklapa sa z-osom[1]. Zbog načina izbora znaka $\pm$, imamo da je

$$S(f,\Pi,S)=\sum_{i=1}^{n}\pm f(P_i)P(\sigma_i)|\cos\gamma_i|=\sum_{i=1}^{n}f(P_i)P(\sigma_i)\cos\gamma_i.$$

Može se pokazati da poslednja integralna suma konvergira ka integralu

$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

Analogan rezultat važi i za ostale kombinacije koordinata, tako da važi sledeća teorema.

Teorema 3.29 *Ako je S orijentisana glatka površ i ako su P,Q,R neprekidne funkcije na S, tada je*

$$\begin{aligned}(80)\qquad &\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\iint_S\big(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\big)\,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

gde su α,β,γ uglovi koje orijentisana normala u tački (x,y,z) zatvara sa pozitivnim delovima x,y,z ose respektivno.

Svođenje površinskog integrala II vrste na dvojni integral

Teorema 3.29 daje vezu između površinskog integrala I vrste i površinskog integrala II vrste, dok se u teoremi 3.28 površinski integral I vrste svodi na dvojni. Kombinacijom ova dva rezultata, možemo svesti površinski integral II vrste na dvojni integral.

Pretpostavimo da je glatka površ S zadata parametarskim jednačinama (72), kao i da su funkcije P,Q,R neprekidne na S. Tada je

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

pri čemu se u sva tri slučaja istovremeno uzima ili znak $+$, ili znak $-$, što zavisi od orijentacije površi. Preciznije, ako je usvojeno da normala na površ ima smer vektora (A,B,C), onda se svuda uzima znak $+$, dok se u slučaju da je usvojen smer normale $(-A,-B,-C)$, svuda uzima znak $-$. Sada, primenom teoreme 3.29 imamo da je

!

[1]Ovaj rezultat, iako izgleda geometrijski očigledan, zasnovan je na definiciji površine dela površi; striktan dokaz nije jednostavan i izostavljamo ga.

$$
\begin{aligned}
&\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_S \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)\,\mathrm{d}S \\
&= \pm \iint_S \left(\frac{PA}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{QB}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)\mathrm{d}S,
\end{aligned}
$$

a zatim, primenom teoreme 3.28, dobijamo da je poslednji integral jednak

$$
\pm \iint_{D_{uv}} \left(\frac{PA}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{QB}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)
$$

$$
\times \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \pm \iint_{D_{uv}} \big(PA+QB+RC\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
$$

Dakle, dokazana je sledeća teorema.

Teorema 3.30 *Neka je glatka površ S zadata parametarskim jednačinama (72) i neka su funkcije P, Q, R neprekidne na S. Tada je*

$$
\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{uv}} \big(PA+QB+RC\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,
$$

pri čemu se uzima znak $+$ ako je $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ i znak $-$ ako je $\boldsymbol{n} = (-A, -B, -C)$.

U posebnom slučaju, ako je površ zadata eksplicitnom jednačinom $z = g(x, y)$, za parametre možemo uzeti u i v, pri čemu je $A = -g_x$, $B = -g_y$, $C = 1$, dok je oblast D_{xy} ortogonalna projekcija površi S na xy-ravan. Kao što smo ranije utvrdili, u ovom slučaju $\cos\gamma$ na izabranoj strani površi nepromenljivog znaka, tako da se znak ispred integrala određuje na osnovu znaka $\cos\gamma$:

Ako je površ S zadata jednačinom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, onda je

$$
\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} \big(-Pg_x - Qg_y + R\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
$$

pri čemu se uzima znak $+$ ako je $\cos\gamma \geq 0$ na S (tj. ako se integrali po gornjoj strani površi) i znak $-$ u suprotnom slučaju.

3.9 Stokesova formula i formula Ostrogradskog

U ovom odeljku dajemo dve integralne formule koje su od fundamentalnog značaja u teoriji i primenama. Stokesova formula predstavlja generalizaciju Green-Riemannove teoreme u tri dimenzije i utvrđuje vezu između krivolinijskog integrala po zatvorenoj konturi u prostoru i površinskog integrala po površini koja je ograničena tom konturom. Formula Ostrogradskog daje vezu između površinskog integrala po zatvorenoj površi i trojnog integrala po delu prostora koji ta površ zatvara. Ove dve formule su veoma srodne i mogu se generalisati na više dimenzija u okviru jedne unificirane teorije koja izlazi iz domena ove knjige. S druge strane, obe formule, zajedno sa Green-Riemannovom formulom koju smo ranije proučavali, daju prirodne generalizacije Newton-Leibnizove formule (videti tekst na stranici 105).

3.9.1 Stokesova formula

Razmotrićemo najpre neka pitanja u vezi sa orijentacijom krive na orijentisanoj površi. Kao što znamo, svaka dvostrana glatka površ i svaka glatka kriva mogu se orijentisati na dva načina. Ako je površ orijentisana (što znači da je izabrano „lice" površi, odnosno strana površi iz koje normala „izlazi"), onda se svaka zatvorena kriva na površi može orijentisati tako da oblast koju zatvara na licu ostaje pri obilasku krive ili sa leve ili sa desne strane. Ako je kriva orijentisana tako da pri njenom obilasku oblast površi koja je njome zatvorena na licu ostaje uvek sa leve strane, kažemo da je kriva orijentisana pozitivno u odnosu na orijentaciju površi (ili po pravilu desne zavojnice u odnosu na normalu površi).

Slika 50. Pozitivna orijentacija krive na površi u odnosu na orijentaciju površi. (sorkp)

Neka je S glatka površ zadata parametarskim jednačinama

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), \qquad (u,v) \in D_{uv}, \tag{81}$$

čija granica je glatka kriva C, kao na slici 51. Pretpostavimo da je oblast D_{uv} takođe ograničena glatkom konturom Γ u uv-ravni. Konačno, pretpostavimo da je površ S orijentisana i da je kriva C orijentisana pozitivno u odnosu na datu orijentaciju površi. Orijentacijom krive C određena je i orijentacija krive Γ. Pokazuje se da važi sledeće pravilo koje dajemo bez dokaza.

Ako je normala na površ S orijentisana kao $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, onda pozitivnoj orijentaciji krive C odgovara pozitivna orijentacija krive Γ. U suprotnom slučaju, ako je $\boldsymbol{n} = (-A, -B, -C)$, onda pozitivnoj orijentaciji krive C odgovara negativna orijentacija krive Γ.

Slika 51. Uz izvođenje Stokesove formule. (spokri)

Posmatrajmo krivolinijski integral

$$I_x = \int_C P(x, y, z)\,\mathrm{d}x,$$

pri čemu pretpostavljamo da je P neprekidna funkcija na S, kao i njeni parcijalni izvodi prvog reda. Polazeći od parametarskih jednačina (81), nalazimo da je $\mathrm{d}x = x_u\,\mathrm{d}u + x_v\,\mathrm{d}v$, tako da je

$$(82)\ I_x = \int_\Gamma P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))x_u\,\mathrm{d}u + P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))x_v\,\mathrm{d}v.$$

Uvođenjem oznaka $P^* = Px_u$ i $Q^* = Px_v$, i primenom Green-Riemannove formule na integral u (82) nalazimo da je

$$(83) \qquad I_x = \pm\int_{\Gamma^+} P^*\,\mathrm{d}u + Q^*\,\mathrm{d}v = \pm\iint_{D_{uv}} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial u} - \frac{\partial P^*}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

pri čemu se znak $+$ bira ako je $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ i znak $-$ pri suprotnoj orijentaciji površi. Dalje je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q^*}{\partial u} - \frac{\partial P^*}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}(Px_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px_u) \\
&= (P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u)x_v + Px_{uv} - (P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v)x_u - Px_{vu} \\
&= P_z \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} - P_y \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \\
&= P_z B - P_y C,
\end{aligned}$$

gde smo pretpostavili jednakost mešovitih parcijalnih izvoda[1] x_{uv} i x_{vu}. Dakle,

$$I_x = \pm \iint_{D_{uv}} (P_z B - P_y C)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Prema teoremi 3.30, ovaj dvojni integral jednak je površinskom integralu II vrste po površi S:

$$I_x = \iint_S P_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - P_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Analogno, za integrale

$$I_y = \int_C Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y \quad \text{i} \quad I_z = \int_C R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

dobijamo

$$I_y = \iint_S Q_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - Q_z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad I_z = \iint_S R_y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - R_x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

Objedinjavanjem ovih formula dobija se sledeći rezultat.

Teorema 3.31 *Ako je S orijentisana glatka površ zadata parametarskim jednačinama (81), čija granica je glatka pozitivno orijentisana kriva C, i ako su funkcije P, Q, R neprekidne na $S \cup C$, kao i njihovi parcijalni izvodi, onda je*

$$\begin{aligned}(84)\qquad &\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_S (R_y - Q_z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Jednakost (84) zove se STOKESova formula. U njoj je, kao poseban slučaj sadržana GREEN-RIEMANNova formula, što se može videti ako se stavi da je $\mathrm{d}z = 0$. STOKESova formula se može napisati u simboličkom obliku koji je lakši za pamćenje:

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Pretvaranjem površinskog integrala II vrste u integral I vrste (teorema 3.29), dobija se još jedan oblik STOKESove formule:

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S.$$

! Napomenimo da STOKES ova formula važi i ako je površ S ograničena sa više zatvornih kontura $C_1, \ldots, C_n$. U tom slučaju se u formuli uzima da je $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$, a svaka od kontura C_i orijentisana je pozitivno u odnosu na površ ako

[1] Ova pretpostavka nije neophodna, ali je uvedena radi jednostavnijeg dokaza.

zatvoreni deo površi ostaje sa leve strane pri obilaženju krive. Ovo je ista logika koju smo primenjivali kod Green-Riemannove formule.

Slika 52. Površ čija je granica sastavljena od tri zatvorene krive. (szaptk)

3.9.2 Formula Ostrogradskog

Teorema 3.32 *Neka je $V \subset \mathbf{R}^3$ deo prostora ograničen zatvorenom glatkom površi S. Ako su funkcije P, Q, R zajedno sa svojim parcijalnim izvodima neprekidne na $V \cup S$, tada je*

$$\begin{aligned}\iint_S & P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\end{aligned} \tag{85}$$

pri čemu se u površinskom integralu uzima spoljna strana površi S.

Dokaz. Dajemo dokaz samo u posebnom slučaju kada je oblast V oblika cilindra koji je sa donje i gornje strane zatvoren delovima površi $z = g_1(x,y)$, odnosno $z = g_2(x,y)$ (videti sliku 53).

Ovde imamo da je

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{D_{xy}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x,y,g_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x,y,g_1(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{S_2} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{S_1} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{86}$$

pri čemu smo u poslednjem koraku koristili vezu između površinskog i dvojnog integrala (videti formulu (79) na strani 133).

Slika 53. Uz dokaz formule Ostrogradskog. (scili)

Na delu S_3 imamo da je $\cos\gamma = 0$, tako da je

$$\iint_{S_3} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

pa iz (86) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{S_2} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{S_1} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{S_3} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_S R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Na isti način nalazimo da je

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \iint_S Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

čime je dokazana jednakost (85). $\square$

Glava 4

Kompleksna analiza

Naizgled naivnim dopuštanjem da jednačina $x^2 + 1 = 0$ ima rešenja, otvara se prozor u fascinantni svet kompleksnih brojeva i kompleksne analize. Ova oblast matematike ima značajne primene u rešavanju realnih problema u raznim oblastima. Između ostalog, mnoge osobine realnih funkcija mogu se mnogo bolje razumeti kroz kompleksnu analizu nego u realnom domenu.

4.1 Kompleksna ravan i funkcije kompleksne promenljive

4.1.1 Kompleksna ravan

Algebarska struktura

Pretpostavljajući da je čitalac već upoznat sa kompleksnim brojevima, ovde dajemo samo pregled definicija i osnovnih osobina skupa kompleksnih brojeva.

Skup **C** kompleksnih brojeva definiše se kao skup uređenih parova (x, y), gde su x, y realni brojevi. Operacije sabiranja i množenja uvode se u **C** na sledeći način:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

Nije teško dokazati da skup **C** sa operacijama množenja i sabiranja čini polje. Neutralni element za sabiranje je $(0, 0)$, a za množenje $(1, 0)$. Između skupa kompleksnih brojeva oblika $(x, 0)$ i skupa realnih brojeva postoji izomorfizam $(x, 0) \mapsto x$, jer je

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0); \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \ .$$

Stoga se obično $(x, 0)$ identifikuje sa x, na primer, $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$, itd. Na taj način, skup **R** možemo smatrati podskupom skupa **C**.

Uređen par $i = (0, 1)$ ima posebnu ulogu u skupu kompleksnih brojeva; on se naziva **imaginarnom jedinicom**. Imamo da je

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

i prema tome, jednačina $z^2 + 1 = 0$ ima rešenje u polju kompleksnih brojeva. Ova činjenica je od suštinskog značaja, jer, kao što ćemo videti, omogućava proširenje domena elementarnih funkcija. Ako se i pomnoži sa realnim brojem y dobija se

$$iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y),$$

pa je stoga, za proizvoljan kompleksan broj (x, y),

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy \ .$$

Ako je $z = (x, y) = x + iy$, tada je x **realni deo**, a y je **imaginarni deo** kompleksnog broja z, u oznakama $x = \mathrm{Re}\, z$ i $y = \mathrm{Im}\, z$, respektivno. Kako je kompleksan broj definisan kao uređeni par, jasno je da važi

$$z_1 = z_2 \iff \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \ \wedge \ \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2 \ .$$

Za kompleksan broj $z = x + iy$, inverzan element u odnosu na sabiranje je $-z = -x - iy$, a ako je $z \neq 0$, onda postoji i inverzan element u odnosu na množenje $z^{-1} = x/(x^2 + y^2) - iy/(x^2 + y^2)$.

Za kompleksan broj $z = x + iy$ definiše se **konjugovano kompleksan broj** $\bar{z} = x + i(-y) = x - iy$. Ako su dati z i $\bar{z}$, onda je

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Rastojanje (euklidsko) između tačke z i nule zove se modul kompleksnog broja z, u oznaci $|z|$. Sledeće korisne jednakosti se lako dokazuju:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}.$$

Zadaci

51. Dokazati da je

$$i^n = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & \text{ako je } n = 0, 2, 4, \ldots, \\ (-1)^{(n-1)/2} i, & \text{ako je } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

52. Napisati jednačinu kružnice sa centrom u tački $a \in \mathbf{C}$ i poluprečnikom $r > 0$.

[$|z - a| = r$]

53. Ispitati da li jednačina

$$z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \qquad a, b \in \mathbf{C},$$

određuje kružnicu u kompleksnoj ravni.

[Određuje ako je $b \in \mathbf{R}$, $|a|^2 > b$.]

54. Definišimo relaciju $\prec$ na skupu kompleksnih brojeva na sledeći način: $z_1 \prec z_2$ ako i samo ako je $x_1 < x_2$ ili $x_1 = x_2, y_1 \leq y_2$, gde je $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$. Dokazati da je $\prec$ relacija potpunog uređenja na skupu $\mathbf{C}$, tj. da je refleksivna ($z \prec z$), tranzitivna ($z_1 \prec z_2 \wedge z_2 \prec z_3 \Rightarrow z_1 \prec z_3$), antisimetrična ($z_1 \prec z_2 \wedge z_2 \prec z_1 \Rightarrow z_1 = z_2$) i da za svaki par $z_1, z_2 \in C$ važi $z_1 \prec z_2$ ili $z_2 \prec z_1$.

55. Za reaciju totalnog uređenja $\prec$ definisanu na nekom polju $(\mathcal{F}, +, \cdot)$, kažemo da je kompatibilna sa operacijama polja ako $a \prec b \Rightarrow a + c \prec b + c$ i $0 \prec a \wedge 0 \prec b \Rightarrow 0 \prec a \cdot b$. Dokazati da iz ova dva uslova i osobina polja izlazi da je $0 \prec a^2$ za svako $a \in \mathcal{F}$. Na osnovu ovoga dokazati da je na skupu $\mathbf{C}$ nemoguće definisati relaciju totalnog poretka koja bi bila kompatibilna sa operacijama $+$ i $\cdot$.

Uputstvo. Ako je $0 \prec a$, onda je $-a \prec -a + a = 0$, što znači da je uvek ili $0 \prec a$ ili $0 \prec -a$. Ako je $0 \prec a$, onda je $0 \prec a^2$; ako je $0 \prec -a$, onda je $0 \prec (-a)^2 = (-1)^2 \cdot a^2$. Iz osobina polja izlazi da je $(-1)^2 = 1$, tako da je i u drugom slučaju $0 \prec a^2$. U polju kompleksnih brojeva je $i^2 = -1$, kao i $1^2 = 1$. Sa bilo kakvom relacijom $\prec$, imaćemo da je ili $-1 \prec 0$ ili je $1 \prec 0$, što je onda kontradikcija sa prethodno dokazanom osobinom.

4.1.2 Elementarne funkcije u kompleksnom domenu

Sve elementarne funkcije u kompleksnom domenu definišu se polazeći od samo dve osnovne: to su eksponencijalna i logaritamska funkcija.

Eksponencijalna i njoj srodne funkcije

- **Eksponencijalna funkcija** $z \mapsto e^z$ definiše se pomoću jednakosti

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Prema tome, e^{x+iy} je kompleksan broj čiji je modul jednak e^x (u običnom smislu realne eksponencijalne funkcije), dok je argument jednak y. U specijalnom slučaju, kada je $z = iy,\ y \in \mathbf{R}$, dobija se EULERova formula:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \qquad y \in \mathbf{R}.$$

Domen eksponencijalne funkcije je ceo skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$.

- **Kosinusna funkcija** $z \mapsto \cos z$ je definisana na celoj kompleksnoj ravni pomoću relacije

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

- **Sinusna funkcija** $z \mapsto \sin z$ definisana je sa

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Motivacija za ovakvu definiciju kosinusne i sinusne funkcije jeste činjenica da kada je $z \in \mathbf{R}$, onda se primenom EULERove formule dobijaju uobičajene trigonometrijske funkcije na $\mathbf{R}$.

- **Tangens** se definiše kao količnik sinusa i kosinusa:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

- **Hiperboličke funkcije** $z \mapsto \operatorname{ch} z$ i $z \mapsto \operatorname{sh} z$ definisane su sa

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Veći deo osobina "običnih" realnih funkcija je zadržan i u kompleksnom domenu. Na primer, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, itd. Međutim, za razliku od realnih trigonometrijskih funkcija, kompleksni sinus i kosinus nisu ograničene funkcije.

Primer 72. Ako u izrazu kojim se definiše kosinusna funkcija stavimo da je $z = iy$, dobijamo da je

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y,$$

odakle izlazi da je $\lim\limits_{y \to +\infty} \cos iy = +\infty$, pa kosinusna funkcija nije ograničena u kompleksnom domenu. $\square$

Argument, logaritam i funkcije koje se definišu pomoću njih

Uvođenjem polarnih koordinata u kompleksnu ravan, svaki kompleksan broj $z \neq 0$ može se predstaviti u tzv. trigonometrijskom obliku

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

gde je $r = |z|$ rastojanje od tačke $z = (x, y)$ do koordinatnog početka, a θ je polarni ugao; u kompleksnom domenu θ se naziva **argumentom kompleksnog broja** z, u oznaci $\theta = \text{Arg } z$. Argument broja 0 se ne definiše[1].

Množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku svodi se na sabiranje argumenata, jer važi jednakost

$$\text{Arg } (z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2, \tag{1}$$

odakle je

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2) + i\sin(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2)), \quad \text{kao i} \tag{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2) + i\sin(\text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2)). \tag{3}$$

Ako su dati $|z| = r$ i $\text{Arg } z = \theta$, tada se $x = \text{Re } z$ i $y = \text{Im } z$ nalaze iz jednakosti

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Obrnuto, ako je dato $z = x + iy$, tada nalazimo da je

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

dok se pri određivanju $\text{Arg } z$ pojavljuju teškoće. Naime, za dato z, $\text{Arg } z$ je određen samo po modulu 2π, odnosno određen je kao geometrijski ugao u trigonometrijskom krugu, pomoću relacija[2]

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y,$$

što znači da i svaki ugao $\theta + 2k\pi$, gde je k ceo broj, može biti $\text{Arg } z$.

Ova neodređenost može se otkloniti tako što se uvede ograničenje da θ pripada nekom fiksnom intervalu dužine 2π. U kompleksnoj analizi je uobičajeno da se uzme interval $(-\pi, \pi]$. Na taj način se dobija jednoznačno određen argument, koji se označava sa $\arg z$:

$$\theta = \arg z \iff \cos\theta = \frac{\text{Re } z}{\|z\|} \ \wedge \ \sin\theta = \frac{\text{Im } z}{\|z\|} \ \wedge \ \theta \in (-\pi, \pi].$$

Međutim, ovako se pojavljuje novi problem: formula (1) ne važi ako se u njoj zameni Arg sa arg. Na primer, ako je $\arg z_1 = \arg z_2 = 3\pi/4$, onda $\arg z_1 + \arg z_2$ ne može biti argument (arg) ni jednog kompleksnog broja.

---

[1] Kao što ni nula vektor nema definisan pravac i smer.

[2] Napomenimo da, ukoliko se z nalazi u drugom ili trećem kvadrantu, *nije tačno* da je $\theta = \text{arctg } y/x$.

Neodređenost argumenta kompleksnog broja je izvor teškoća pri definisanju nekih elementarnih funkcija u kompleksnom domenu, i motivacija za uvođenje jedne nove klase funkcija.

Naime, funkcije koje smo do sada definisali ne zavise od argumenta kompleksne promenljive z, tj. njihova vrednost je određena ako su zadati $\mathrm{Re}\, z$ i $\mathrm{Im}\, z$. Stoga zvakoj datoj vrednosti kompleksnog broja z odgovara samo jedna vrednost funkcije. Kod funkcija koje se definišu pomoću $\mathrm{Arg}\, z$, po pravilu se održava neodređenost argumenta, tako da jednom kompleksnom broju z odgovara više (konačno ili beskonačno mnogo) vrednosti funkcije. Preslikavanja sa osobinom da se jedno $z \in \mathbf{C}$ preslikava u više od jedne vrednosti, zovu se **multiformne ili višeznačne funkcije**. One se u kompleksnoj analizi prirodno pojavljuju zahvaljujući inherentnoj neodređenosti argumenta kompleksnog broja.

- **Logaritamska funkcija** $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$ definiše se pomoću

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i \cdot \mathrm{Arg}\, z, \qquad z \in \mathbf{C},\ z \neq 0,$$

gde je $\log|z|$ „običan” logaritam realnog i pozitivnog argumenta $|z|$. Motivacija za ovakvu definiciju je EULERova formula, po kojoj je

$$z = re^{i\theta} = |z|e^{i \cdot \mathrm{Arg}\, z},$$

i iz koje se, formalnim logaritmovanjem (kao kada bi broj i bio realan) upravo dobija izraz iz navedene definicije. Naravno, kako je $\mathrm{Arg}\, z$ neodređeno, izlazi da je i $\mathrm{Log}\, z$ neodređeno, odnosno, za svako fiksirano z, $\mathrm{Log}\, z$ uzima prebrojivo mnogo vrednosti, koje se međusobno razlikuju po celim umnošcima broja $2\pi i$. Naime, ako je $\theta = \mathrm{Arg}\, z$, onda je i $\theta + 2k\pi = \mathrm{Arg}\, z$, gde je k ceo broj; stoga je

$$\mathrm{Log}\, re^{i\theta} = \mathrm{Log}\, re^{i(\theta+2k\pi)} = \log r + i(\theta + 2k\pi).$$

Ukoliko se umesto funkcije Arg u definiciji logaritamske funkcije uzme arg, dobija se tzv. **glavna vrednost logaritma**, koja se obeležava sa log:

$$\log z = \log|z| + i \cdot \arg z, \qquad z \in \mathbf{C},\ z \neq 0.$$

Glavna vrednost logaritma jednom $z \in \mathbf{C}$ pridružuje jednoznačno određenu vrednost $\ln z \in \mathbf{C}$; za razliku od multiformnih, ovakve "obične" funkcije se ponekad nazivaju **uniformne** ili **univalentne funkcije**.

Primer 73. Primetimo da se u kompleksnom domenu gubi standardno ograničenje da je logaritam definisan samo za pozitivne brojeve. Sada možemo naći i logaritme svih kompleksnih brojeva $z \neq 0$, ali ako z nije pozitivan realan broj, $\mathrm{Log}\, z$ ima kompleksne vrednosti. Na primer,

$$\mathrm{Log}\,(-1) = \mathrm{Log}\, e^{i\pi} = i(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{C}, \qquad \log(-1) = i\pi.$$

$$\mathrm{Log}\, i = \mathrm{Log}\, e^{i\pi/2} = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}, \qquad \log i = i\frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Dobitak uniformnosti, praćen je gubitkom aditivnosti logaritma; naime, za glavne vrednosti logaritma nije tačno da je $\log z_1z_2 = \log z_1 + \log z_2$. Na primer, ako je $z_1 = z_2 = -1$, onda je $\log z_1z_2 = 0$, dok je $\log z_1 + \log z_2 = 2\log z_1 = 2\pi i$.

Osnovna osobina logaritma, kao funkcije inverzne eksponencijalnoj, očuvana je za Log samo u jednom smeru:

$$e^{\mathrm{Log}\ z} = e^{\log|z|+i\mathrm{Arg}\ z} = e^{\log|z|}\cdot e^{i\mathrm{Arg}\ z} = |z|e^{i\mathrm{Arg}\ z} = z, \quad \text{dok je}$$

$$\mathrm{Log}\ e^z = \mathrm{Log}\ e^{x+iy} = \mathrm{Log}\ (e^x\cdot e^{iy}) = x + i(y+2k\pi) = z + 2k\pi i, \quad k\in \mathbf{Z}.$$

Slično, za log imamo da je

$$e^{\log z} = |z|e^{i\arg z} = z.$$

Da bismo odredili $\log e^z$ potrebno je napisati e^z u trigonometrijskom obliku sa $\arg e^z \in (-\pi,\pi]$. To znači da treba naći $k_0\in\mathbf{Z}$ tako da je $y+2k_0\pi\in(-\pi,\pi]$, pa je

$$\log e^z = \log e^{x+iy} = \log e^x\cdot e^{(y+2k\pi)i} = x+i(y+2k\pi) = z+2k_0\pi i.$$

Primer 74. Neka je $z = 3+7i$. Tada je

$$\log e^z = \log e^3\cdot e^{7i} = \log e^3\cdot e^{(7-2\pi)i} = 3+i(7-2\pi) = z-2\pi i,$$

jer je $7-2\pi\in(-\pi,\pi]$.

- **Stepena funkcija.** Kod stepene funkcije razlikujemo dva slučaja: kada je stepen ceo realan broj i kada to nije.

  Funkcija $z\mapsto z^n$, gde je $n\in\mathbf{N}$, definiše se kao ponovljeno množenje:

  $$z^n = z\cdot z\cdots z, \qquad z\in\mathbf{C},\ n\in\{1,2,\ldots\}.$$

  Za slučaj kada je $n=0$, dobija se funkcija z^0, koja se definiše kao 1 za svako $z\in\mathbf{C}$[1].

  Konačno, funkcija $z\mapsto z^{-n}$, $n\in\mathbf{N}$ definiše se kao $1/z^n$ i njen domen je skup $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Ovim je funkcija $z\mapsto z^a$ definisana za cele brojeve a. U opštem slučaju, definišemo

  $$z^a = e^{a\mathrm{Log}\ z}, \qquad z\neq 0,\ a\notin\mathbf{Z}$$

  Isto kao logaritamska, i ovo je multiformna funkcija.

Posebno ćemo posvetiti pažnju slučaju kada je $a=1/n$, $n\in\mathbf{N}$; funkcija $z^{1/n}$ se zove n-ti **koren kompleksnog broja** z.

Prema definiciji, ako je $z=re^{i\theta}$, imamo da je

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z} = e^{(\log r)/n+i(\theta+2k\pi)/n} = r^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n} \\ &= r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

[1] Napomenimo da 0^0 kao izraz nije definisan, osim u ovom slučaju.

gde je k proizvoljan ceo broj. Međutim, zbog periodičnosti sinusa i kosinusa, ustvari postoji samo n različitih vrednosti za $z^{1/n}$:

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Jednakost (4) je poznata formula za n-ti koren kompleksnog broja. Ako se umesto Log uzme log, dobija se glavna vrednost n-tog korena:

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right), \qquad \theta \in (-\pi, \pi].$$

Iz definicije korena i osobina logaritamske i eksponencijalne funkcije imamo da je

$$\left(z^{1/n}\right)^n = e^{\log r + i(\theta + 2k\pi)} = z,$$

odakle zaključujemo da su, za dato $z \in \mathbf{C}$, sve vrednosti korena rešenja jednačine $w^n = z$ (po w). S druge strane, poznato je da ova jednačina (kao kompleksna polinomska jednačina reda n) ne može imati više od n rešenja. Prema tome, zaključujemo da važi ekvivalencija

$$w = \sqrt[n]{z} \iff w^n = z, \qquad z \in \mathbf{C}, z \neq 0.$$

Primer 75. Za $n = 2$, dobija se kvadratni koren kao multiformna funkcija, sa dve grane:

$$(\sqrt{z})_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

$$(\sqrt{z})_2 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{2} \right).$$

Ako se uzme da je $\theta \in (-\pi, \pi]$, tada je $(\sqrt{z})_1$ glavna vrednost kvadratnog korena, a $(\sqrt{z})_2 = -(\sqrt{z})_1$. Na primer, ako je $z = x > 0$, onda je $\theta = \arg z = 0$, pa je prva vrednost koren u običnom smislu $\sqrt{x}$, a druga vrednost je $-\sqrt{x}$.

Primer 76. Posmatrajmo kvadratnu jednačinu sa kompleksnim koeficijentima:

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbf{C}, \quad a \neq 0. \tag{5}$$

Svođenjem na potpuni kvadrat dobijamo da je

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{1}{4a}\big((2az + b)^2 + 4ac - b^2\big),$$

odakle (zbog $a \neq 0$) izlazi da je jednačina (5) ekvivalentna sa jednačinom

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

odnosno $2az + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$, tj.

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pri čemu se kvadratni koren shvata kao multiformna funkcija, sa dve grane. Ako se kvadratni koren shvati kao glavna vrednost, dobija se poznata formula

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pri čemu vrednosti sa znakom + odgovara glavna vrednost rešenja kvadratne jednačine.

Primer 77. Primenjena na $z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$, formula (4) daje:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Neka je w_k kompleksan broj koji se dobija kada se u (6) fiksira neko $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Za proizvoljno n imamo da je $w_0 = 1$, dakle jedna vrednost za $\sqrt[n]{1}$ je uvek 1. Nije teško videti da sve tačke $w_0, \ldots, w_{n-1}$ pripadaju jediničnoj kružnici opisanoj oko koordinatnog početka, i da dele kružnicu na n podudarnih delova. Na primer, za $\sqrt[4]{1}$ dobijaju se tačke $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -1$ i $w_3 = -i$, koje su simetrično raspoređene po kružnici.

- **Opšta eksponencijalna funkcija** za osnovu $a \in \mathbf{C}$ definisana je sa

  $$a^z = e^{z\mathrm{Log}\, a} = e^z \cdot e^{\mathrm{Log}\, a} \qquad z \in \mathbf{C},\ a \neq 0.$$

  Ova funkcija nije multiformna, jer se podrazumeva da je za Log a uzeta jedna od mogućih vrednosti, čime se a^z determiniše za svako z.

- **Inverzne trigonometrijske funkcije** definišu se kao rešenja jednačina (po w): $\cos w = z$; $\sin w = z$; $\mathrm{tg}\, w = z$. Iz definicionih izraza za kosinusnu i sinusnu funkciju, dobija se da je

- $$\mathrm{Arcsin}\, z = \frac{1}{i}\mathrm{Log}\,(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad (z \in \mathbf{C})$$

- $$\mathrm{Arccos}\, z = \frac{1}{i}\mathrm{Log}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (z \in \mathbf{C})$$

- $$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\,\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad (z \in \mathbf{C}, z \neq \pm i)$$

Svaka od funkcija koje smo definisali, može se posmatrati u dve varijante: kao multiformna funkcija (sa Log) ili kao glavna vrednost (sa log). Uobičajeno je da se, ako nije specificirano, pretpostavi da sve funkcije uzimaju svoje glavne vrednosti. Ako funkcija ima posebno ime (na primer, Arctg z), onda se glavna vrednost piše malim početnim slovom (arctg z), a veliko početno slovo podrazumeva da je funkcija multiformna.

Osim glavnih vrednosti, mogu se definisati različite druge "grane", tako što se specificira koja vrednost logaritma se računa. Recimo, možemo definisati funkciju "dog" pomoću[1]

$$\operatorname{dog} re^{i\theta} = \log r + i\theta, \quad 2\pi \leq \theta < 4\pi.$$

Na primer, $\operatorname{dog} 1 = 2\pi i$; $\operatorname{dog} i = 5\pi i/2$, itd. Ako se u definicionim formulama za neku kompleksnu funkciju uzme $\operatorname{dog} z$ umesto $\operatorname{Log} z$, dobiće se opet jedna uniformna funkcija.

Zadaci

56. Ako je z rešenje jednačine $(1+z)^6 + z^6 = 0$, dokazati da je $\operatorname{Re} z = -1/2$.
Uputstvo. Staviti da je $z = re^{i\theta}$ i da je $1 + z = \rho e^{i\varphi}$.

57. U realnoj analizi, funkcija $x \mapsto \arccos x$ definiše se pomoću relacije

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \ \wedge \ y \in [0, \pi].$$

Ako se u definiciji kompleksne funkcije Arccos uzme glavna vrednost logaritma i kvadratnog korena, i ako se uzme da je $z = x \in [-1, 1]$ realan broj, dokazati da se dobija ista funkcija.

58. Naći sva rešenja jednačine $\sin z = 2$.

Metrika u kompleksnoj ravni

U kompleksnoj ravni ili z-ravni, tačke su kompleksni brojevi $z = (x, y) = x + iy$. Koordinatne ose su **realna osa** (x-osa) i **imaginarna osa** (y-osa). Euklidsko rastojanje između tačaka $z_1 = x + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ definiše se kao rastojanje između tačaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u ravni $\mathbf{R}^2$:

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Prema tome, kompleksna ravan je izomorfna ravni $\mathbf{R}^2$. Osim euklidske, i sve metrike koje se koriste u $\mathbf{R}^2$ mogu se definisati i u kompleksnoj ravni, između ostalih, metrike d_m i d_s koje su ekvivalentne euklidskoj.

Pod okolinom (ili ε-okolinom) kompleksnog broja z_0 podrazumevamo otvoren disk poluprečnika ε sa centrom u z_0, tj. skup

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\},$$

gde je $x = \operatorname{Re} z, x_0 = \operatorname{Re} z_0, y = \operatorname{Im} z, y_0 = \operatorname{Im} z_0$. Isto kao u $\mathbf{R}^2$, mogu se, po potrebi, koristiti i okoline u ekvivalentnim metrikama d_m i d_s, tj. skupovi

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| < \varepsilon, \ |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| < \varepsilon\}, \quad \text{odnosno}$$

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| + |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| < \varepsilon\},$$

gde je $\varepsilon > 0$.

[1] Samo primera radi, inače ova funkcija nije u standardnoj upotrebi.

Granični procesi u kompleksnoj ravni

Polazeći od euklidske metrike, u skupu **C** možemo definisati pojam konvergencije kompleksnog niza ili pojam granične vrednosti funkcije kompleksne promenljive, na isti način kao što je to urađeno u $\mathbf{R}^2$. Radi kompletnosti, navodimo definiciju granične vrednosti kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Definicija 4.1 *Neka je funkcija $z \mapsto f(z)$ definisana u nekoj okolini D tačke z_0, osim možda u tački z_0. Kažemo da je kompleksan broj A granična vrednost funkcije f kad $z \to z_0$, u oznaci $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D) \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Ako $z_0 \in D$ i ako je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, kažemo da je funkcija f **neprekidna** *u tački z_0.*

Ova definicija se malo razlikuje od standardne definicije limesa u metričkim prostorima jer se zahteva da funkcija bude definisana u celoj okolini tačke z_0 (osim u z_0), a nije dovoljno da z_0 bude samo tačka nagomilavanja domena funkcije. Ovo se čini iz praktičnih razloga, jer funkcije koje su zanimljive u kompleksnoj analizi (tzv. analitičke funkcije) upravo i imaju tu osobinu. U realnom domenu uvode se pojmovi desnog i levog limesa, a ovde se može, ukoliko je potrebno, posmatrati limes po skupu, isto kao za funkcije dve promenljive. Ukoliko skup D ne sadrži ni jednu celu okolinu tačke z_0 bez same te tačke, onda obično pišemo $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} f(z)$. Na primer, oznaka $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ \mathrm{Re}\, z > 0}} f(z)$ znači da se posmatra granična vrednost funkcije f kad $z \to 0$, pri čemu je $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Granična vrednost kompleksne funkcije može se svesti na realni limes, jer iz definicije izlazi da je

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \iff \lim_{z\to z_0} |f(z) - A| = 0.$$

U posebnom slučaju, kada je $A = 0$, zaključujemo da $f(z) \to 0$ ako i samo ako $|f(z)| \to 0$.

Jedina razlika koja postoji između $\mathbf{R}^2$ i **C** je pojam beskonačnosti. Dok se u $\mathbf{R}^2$ održava koordinatno shvatanje beskonačnosti, u smislu da se posmatraju granične vrednosti kad $x \to \pm\infty$ i $y \to \pm\infty$, pri čemu su moguće sve kombinacije znakova, u kompleksnoj ravni se uvodi samo jedna beskonačnost, odnosno jedna zamišljena beskonačno daleka tačka. Definicija beskonačnosti u **C** počiva na jednoj geometrijskoj konstrukciji poznatoj pod nazivom RIEMANNova sfera (slika 54).

Zamislimo da je sfera S postavljena tako da dodiruje kompleksnu ravan u koordinatnom početku O. Neka je P tačka na sferi suprotna tački O. Ako je A proizvoljna

Slika 54. RIEMANN*ova sfera. (srsfe)*

tačka na sferi različita od P, prava PA seče kompleksnu ravan u nekoj tački A'. Obrnuto, uočimo li bilo koju tačku B' u kompleksnoj ravni, prava PB' seče sferu u jednoj i samo jednoj tački B, pri čemu $B \neq P$. Prema tome, postoji bijekcija između tačaka sfere bez tačke P i skupa kompleksnih brojeva, koja se ostvaruje na opisani način. Na skupu $S \setminus \{P\}$ definišimo metriku pomoću $d(A, B) = d(A', B')$, gde je A' i B' tačke u kompleksnoj ravni koje odgovaraju tačkama A i B respektivno. Sa uvedenom metrikom, skup $S \setminus \{P\}$ postaje metrički prostor izometričan sa $\mathbf{C}$; drugim rečima, kompleksne brojeve možemo interpretirati i kao tačke na RIEMANNovoj sferi iz koje je isključena tačka P. U ovakvoj interpretaciji, tačka P ima ulogu beskonačno daleke tačke, odnosno $P = \infty$.

Primetimo da se krugovi sfere u ravnima π paralelnim kompleksnoj ravni, preslikavaju takođe u krugove, čiji poluprečnici neograničeno rastu kad se ravan π približava tački P. Stoga se beskonačnost u kompleksnoj ravni može shvatiti i kao skup tačaka kružnice sa beskonačno velikim poluprečnikom. Ovakvo uvođenje beskonačnosti znači da $z \to \infty$ ako i samo ako $|z| \to \infty$. U skladu sa ovim, pod okolinom beskonačnosti podrazumevamo skup kompleksnih brojeva izvan proizvoljnog zatvorenog diska poluprečnika K, za $K > 0$:

Definicija 4.2 Okolina beskonačnosti *ili K-okolina beskonačnosti je skup*

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > K\}, \qquad K > 0.$$

Niz kompleksnih brojeva z_n konvergira ka ∞ ako odgovarajući niz na RIEMANNovoj sferi konvergira ka tački P. To znači da važi ekvivalencija

$$z \to \infty \iff |z| \to +\infty.$$

Definicija 4.3 *Ako postoji* $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z)$*, tada definišemo*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{|z|\to+\infty} f(z).$$

Definicija 4.4 *Neka je funkcija* f *definisana u nekoj okolini* D *tačke* z_0*, osim možda u tački* z_0*. Kažemo da je* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ *ako je*

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty,$$

Primer 78. U skupu realnih brojeva, zbog postojanja dve beskonačne "tačke" pridružene skupu $\mathbf{R}$, iz $f(x)\to 0$ kad $x\to a$, ne možemo zaključiti da $1/f(x)\to\infty$, osim u slučaju kad je f konstantnog znaka u okolini tačke a. Na primer,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \quad \text{ne postoji,} \tag{7}$$

jer je levi limes $-\infty$, a desni $+\infty$. S druge strane, ako se posmatra u kompleksnoj ravni, sa $z = x+iy$, imamo da je

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty. \tag{8}$$

□

Ostaje još da se definiše slučaj kada je $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. To je kombinacija prethodno razmatranih slučajeva.

Definicija 4.5 *Neka je funkcija* f *definisana u okolini beskonačnosti. Kažemo da je* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ *ako je*

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty.$$

Kod realnih funkcija realne promenljive, definiše se pojam beskonačno male veličine, kao i simboli o, O i $\sim$ pomoću kojih se porede beskonačno male. Ova terminologija se prenosi i na kompleksni domen. Neka su f i g funkcije kompleksne promenljive i neka je a kompleksan broj ili ∞.

- $f(z) = o(g(z))$ kad $z \to a$ ako i samo ako postoji kompleksna funkcija $\omega(z)$ tako da je $f(z) = \omega(z)g(z)$ u nekoj okolini tačke a, pri čemu je $\lim\limits_{z\to a} \omega(z) = 0$. Ovaj uslov je ispunjen ako je $\lim\limits_{z\to a} f(z)/g(z) = 0$.
- $f(z) = O(g(z))$ kad $z \to a$ ako i samo ako postoji pozitivan realan broj K takav da je $|f(z)| \le K \cdot |g(z)|$ u nekoj okolini tačke a. Ako postoji $\lim\limits_{z\to a} |f(z)/g(z)| = c$, gde je $c > 0$ realan broj, tada je ovaj uslov ispunjen.
- $f(z) \sim g(z)$ kad $z \to a$ ako i samo ako je $\lim\limits_{z\to a} f(z)/g(z) = 1$.

Teorema 4.1 *Neka su f i g kompleksne funkcije kompleksne promenljive, i neka je a kompleksan broj ili ∞. Kad $z \to a$, važi sledeće:*
(i) $f(z) = o(g(z)) \iff |f(z)| = o(|g(z)|) \iff f(z) = o(|g(z)|) \iff |f(z)| = o(g(z))$.
(ii) $f(z) = O(g(z)) \iff |f(z)| = O(|g(z)|) \iff f(z) = O(|g(z)|) \iff |f(z)| = O(g(z))$.

Dokaz. (i) Kako $\omega(z) \to 0$ ako i samo ako $|\omega(z)| \to 0$, zaključujemo da je $f(z) = o(g(z))$ ako i samo ako je $|f(z)| = o(|g(z)|)$. Ostale ekvivalencije se dokazuju na isti način.

(ii) Sve relacije sleduju neposredno iz definicije simbola O, primenom jednakosti $||f(z)|| = |f(z)|$.

Zadaci

59. Pokalazeći od definicije 4.3, pokazati da je $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$ ako i samo ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall z \in D) \quad |z| > K \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

60. Polazeći od definicije 4.4, pokazati da je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ako i samo ako

$$(\forall K > 0)(\exists\delta > 0)(\forall z \in D) \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > K.$$

4.2 Diferencijalni račun

4.2.1 Definicija izvoda

! U ovom i sledećim odeljcima, podrazumevaćemo da su sve funkcije koje pominjemo uniformne, tj. da jednoj vrednosti promenljive z odgovara samo jedna vrednost funkcije $f(z)$.

S obzirom da je u skupu kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ definisano deljenje, izvod se definiše na isti način kao u skupu $\mathbf{R}$, tj.

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,, \tag{9}$$

ukoliko postoji granična vrednost sa desne strane jednakosti. Pri tome se pretpostavlja da je funkcija f definisana u svim tačkama neke okoline tačke z_0. Alternativno, ako stavimo $z - z_0 = \Delta z = \Delta x + i\Delta y$, dobijamo ekvivalentnu definiciju:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\ . \tag{10}$$

Za funkciju koja ima izvod $f'(z_0) \in \mathbf{C}$, kažemo da je diferencijabilna u tački z_0.

Teorema 4.2 *Funkcija* $z \mapsto f(z)$ *diferencijabilna je u tački* $z_0 \in \mathbf{C}$ *ako i samo ako postoji kompleksan broj* A *takav da važi*

$$f(z + \Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|) \quad (\Delta z \to 0), \tag{11}$$

i pri tome je $A = f'(z_0)$.

Dokaz. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački z_0, onda iz (10) dobijamo da je

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z}{\Delta z} = 0,$$

odakle je

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) \quad (\Delta z \to 0).$$

Kako je, prema teoremi 4.1, $o(\Delta z) = o(|\Delta z|)$, iz poslednje jednakosti dobijamo (11) sa $A = f'(z_0)$. Obratno, neka važi (11) sa nekim kompleksnim brojem A. Tada je

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = A + \frac{o(|\Delta z|}{\Delta z},$$

pa puštanjem da $\Delta z \to 0$ dobijamo da je $f'(z_0) = A$, što je i trebalo dokazati. □

Polazeći od definicija elementarnih funkcija u kompleksnom domenu, može se dokazati da su izvodi ovih funkcija po obliku isti kao izvodi odgovarajućih realnih funkcija. Na primer, $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, itd. Dakle, tablica izvoda kompleksnih elementarnih funkcija je „izomorfna” tablici izvoda realnih funkcija. Međutim, u kompleksnom domenu pojavljuju se interesantni primeri funkcija koje nemaju izvod.

Primer 79. Neka je $f(z) = \mathrm{Re}\, z$, odnosno $f(x + iy) = x$. Posmatrajmo količnik

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\ .$$

Ako je $\Delta y = 0$, ovaj količnik ima vrednost 1, a ako je $\Delta x = 0$, njegova vrednost je 0. Prema tome, posmatrani količnik nema graničnu vrednost kad $\Delta z \to 0$, pa funkcija f nema izvod ni u jednoj tački kompleksne ravni.

Primer 80. Ako je $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, onda je

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2}{\Delta x + i\Delta y} .$$

Za $z_0 = 0$, ovaj količnik svodi se na $|\Delta z|^2/\Delta z = \Delta x - i\Delta y$ i teži nuli kad $\Delta z \to 0$. Dakle, funkcija ima u nuli izvod $f'(0) = 0$.

Pretpostavimo sada da je $z_0 \neq 0$. Ako je $\Delta y = 0$ i $\Delta x \to 0$, posmatrani količnik ima graničnu vrednost $2x_0$. Ako je $\Delta x = 0$ a $\Delta y \to 0$, granična vrednost količnika je $2y_0/i$. Kako su x_0 i y_0 realni brojevi, nemoguće je da bude $2x_0 = 2y_0/i$ osim u slučaju da je $x_0 = y_0 = 0$. Prema tome, funkcija $z \mapsto |z|^2$ nema izvod ni u jednoj tački $z \neq 0$. $\square$

4.2.2 Potrebni i dovoljni uslovi diferencijabilnosti

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela, kompleksna funkcija f može se predstaviti u obliku

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

gde su u i v realne funkcije dve realne promenljive. Pokazaćemo da ako je f diferencijabilna funkcija, onda između funkcija u i v postoji određena veza.

Teorema 4.3 *Ako je funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ diferencijabilna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$, onda funkcije u i v imaju parcijalne izvode u tački (x_0, y_0) i važe jednakosti:*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} . \tag{12}$$

Dokaz. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački z_0, onda postoji granična vrednost

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} . \tag{13}$$

Ako uzmemo da je $h \in \mathbf{R}$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i\, \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \right) . \end{aligned}$$

Odavde vidimo da funkcije u i v u tački (x_0, y_0) imaju parcijalne izvode po x, kao i da je

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\, \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} . \tag{14}$$

Ako u (13) uzmemo da je $h = ik$, gde je $k \in \mathbf{R}$, dobijamo na sličan način da je

$$f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\ . \tag{15}$$

Iz jednakosti (14) i (15) dobijaju se jednakosti (12). $\square$

Relacije (12) poznate su pod nazivom **Cauchy-Riemannovi uslovi** (skraćeno C-R uslovi). Iz (15), uz primenu C-R uslova, dobijaju se četiri oblika izvoda: !

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\ . \tag{16}$$

Primer 81. Ako je $f'(z) = 0$ u nekoj otvorenoj oblasti D, onda je, prema (16),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad x \in D,$$

pa zaključujemo da je $f(z) = \text{const.}$ za $z \in D$. Ovo može da se izvede i direktno, polazeći od definicije izvoda.

Teorema 4.4 *Neka je funkcija $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ diferencijabilna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$. Tada su realne funkcije u i v diferencijabilne u (x_0, y_0), kao funkcije dve promenljive.*

Dokaz. Iz pretpostavke o diferencijabilnosti funkcije f dobija se, primenom teoreme 4.2:

$$\begin{aligned} &u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \\ &\qquad = f'(z_0)(\Delta x + i\Delta y) + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}). \end{aligned} \tag{17}$$

Kako je, prema (16), $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}$, zamenom u (17) i izjednačavanjem realnih delova sa obe strane, dobijamo da je

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$

a ovo po definiciji znači da je funkcija $(x, y) \mapsto u(x, y)$ diferencijabilna u tački (x_0, y_0). Diferencijabilnost funkcije v se dokazuje na isti način, pošto se $f'(z_0)$ izrazi kao $\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Uz dodatnu pretpostavku da su u i v diferencijabilne funkcije, C-R uslovi su i dovoljni za diferencijabilnost funkcije $z \mapsto f(z)$. To tvrdi sledeća teorema.

Teorema 4.5 *Kompleksna funkcija $z \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ diferencijabilna je u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ ako i samo ako su funkcije u i v diferencijabilne (kao funkcije dve promenljive) u tački (x_0, y_0) i ako u toj tački važe C-R uslovi (12).*

Dokaz. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$, prema teoremama 4.3 i 4.4, važe C-R uslovi i funkcije u i v su diferencijabilne. Obrnuto, neka su funkcije u i v diferencijabilne u tački (x_0, y_0) i neka važe C-R uslovi. Zbog diferencijabilnosti funkcija u i v, kad $z = x + iy \to z_0 = x_0 + iy_0$ imamo da je

$$\Delta u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

gde su svi parcijalni izvodi u tački (x_0, y_0) i $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Odavde je

$$\begin{aligned}\Delta f(z_0) &= \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).\end{aligned}$$

Ako iskoristimo uslove (12) i zamenimo $\frac{\partial u}{\partial y}$ sa $-\frac{\partial v}{\partial x}$, odnosno $\frac{\partial v}{\partial y}$ sa $\frac{\partial u}{\partial x}$, dobijamo da je

$$\Delta f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).$$

Stavimo sada da je $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$. Deljenjem poslednje jednakosti sa Δz nalazimo da je

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z},$$

odakle je

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Prema tome, funkcija f ima izvod u tački z_0. □

Primer 82. Neka je $f(z) = (x + y) + i(x - y)$. Funkcije $u(x, y) = x + y$ i $v(x, y) = x - y$ su diferencijabilne u svakoj tački iz $\mathbf{R}^2$. Međutim, kako je $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, ni u jednoj tački ne važe C-R uslovi, pa zaključujemo da funkcija f nema izvod ni u jednoj tački kompleksne ravni. Zaista, kako je

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = (1 + i)\Delta x + (1 - i)\Delta y\Delta x + i\Delta y,$$

granična vrednost ovog količnika kad $\Delta z \to 0$ i $\Delta y = 0$ jednaka je $1 + i$, dok je u slučaju kada je $\Delta x = 0$ jednaka $1 - i$.

Primer 83. Neka je $u(x, y) = x$. Potražimo diferencijabilnu kompleksnu funkciju f za koju je Re $f(z) = u(x, y)$. Ako je Im $f(x) = v(x, y)$ tada, prema uslovima (12) važi da je

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Iz uslova $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$ dobijamo (integracijom) da je

$$v(x, y) = y + \varphi(x),$$

gde je φ proizvoljna funkcija samo od x (koja ima ulogu integracione konstante). Sada iz drugog uslova, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, nalazimo da je

$$\frac{\partial}{\partial x}(y + \varphi(x)) = \varphi'(x) = 0, \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = C \in \mathbf{R} \ .$$

Odavde je $v(x, y) = y + C$, pa je $f(z) = x + i(y + C) = z + iC$, za $C \in \mathbf{R}$.

Prema tome, jedina diferencijabilna funkcija f čiji je realni deo x je funkcija $z \mapsto z + iC$. $\square$

Na isti način kao u primeru 83, može se pokazati da je i u opštem slučaju diferencijabilna funkcija f određena (sa tačnošću do konstante) ako je poznat ili samo njen realni deo ili samo njen imaginarni deo. Ovo je interesantna i korisna osobina kompleksnih funkcija.

Navodimo sada nekoliko ekvivalentnih oblika C-R uslova, za različite reprezentacije funkcije f. Dokazi ovih tvrđenja se izvode slično dokazu teoreme 4.3, i stoga ih izostavljamo.

Ekvivalentni oblici Cauchy-Riemannovih uslova.

- Ako se z predstavi u trigonometrijskom obliku, $z = re^{i\theta}$, onda je $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, a C-R uslovi glase:

(18)
$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta} \ .$$

- Ako se f predstavi u trigonometrijskom obliku, kao $f(z) = R(x, y)e^{i\varphi(x,y)}$, C-R uslovi glase:

(19)
$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \varphi}{\partial x} \ .$$

- Ako se f predstavi u obliku $f(z) = R(r, \theta)e^{i\varphi(r,\theta)}$, gde je $r = |z|, \theta = \operatorname{Arg} z$, C-R uslovi su:

(20)
$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial R}{\partial \theta} = -Rr\frac{\partial \varphi}{\partial r} \ .$$

- Koristeći se vezom $x = (z+\bar{z})/2, y = (z-\bar{z})/2i$, funkcija f se može predstaviti i kao $f(z) = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z}) = g(z, \bar{z})$. U ovom slučaju, C-R uslovi su ekvivalentni sa

(21)
$$\frac{\partial g(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Primer 84. Neka je $f(z) = \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$. Kako je $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1/2$, ova funkcija nije nigde diferencijabilna. Za funkciju $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ imamo da je $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$, tako da ova funkcija ima izvod samo u tački $z = 0$. Uporediti sa primerima 79 i 80, na strani 155. $\square$

U kompleksnoj analizi se za funkciju koja je diferencijabilna kaže da je analitička, regularna ili holomorfna. Ne postoji opšta saglasnost oko ovih termina i njihovog preciznog značenja. U daljem tekstu ćemo se pridržavati sledeće konvencije.

Definicija 4.6 *Funkcija f je* **regularna** *u tački z_0 ako je diferencijabilna u toj tački i nekoj njenoj okolini.*

Funkcija $z \mapsto f(z)$ je regularna u tački ∞ ako je funkcija $u \mapsto f(1/u)$ regularna u tački $t = 0$.

Funkcija je regularna u otvorenoj oblasti $D \subset \mathbf{C}$ ako je regularna u svakoj tački te oblasti, ili, što je isto, ako ima izvod u svakoj tački oblasti. Ako oblast D nije otvorena, onda kažemo da je funkcija regularna u oblasti D ako je regularna u nekoj otvorenoj oblasti $D_1 \supset D$.

Za funkciju f kažemo da je **analitička** *u nekoj oblasti D ako ima izvod u svakoj tački te oblasti, sa eventualnim izuzetkom konačno mnogo tačaka. Ove tačke se zovu* **singulariteti** *analitičke funkcije. Tačke u kojima je funkcija regularna zovu se* **regularne tačke**.

Primer 85. 1° Funkcija $z \mapsto e^z$ je regularna u svakoj tački kompleksne ravni, kao i funkcija $z \mapsto z^n$, gde je n prirodan broj.

2° Funkcija $z \mapsto \log z$ regularna je u svakoj tački kompleksne ravni osim u nuli i na negativnom delu x-ose. Na primer, za tačke $z_0 = -x = xe^{i\pi}$ $(x > 0)$ i $z = xe^{i(-\pi+\theta)}$ $(0 < \theta < 2\pi)$ imamo da je $\ln z_0 = \ln x + i\pi$, $\ln z = \ln x + i(\theta - \pi)$, tako da je $|\ln z - \ln z_0| = 2\pi - \theta$. S druge strane, $|z - z_0| = x|e^{i\theta} - 1|$. Dakle, kad $\theta \to 0$ imamo da $z \to z_0$, dok $\ln z \not\to \ln z_0$, pa funkcija $\ln z$ nije neprekidna u tački z_0 na negativnom delu x-ose, tako da u toj tački nije ni diferencijabilna. U svakoj otvorenoj oblasti koja ne sadrži nulu ili tačke negativnog dela x-ose, ova funkcija je regularna.

Zadaci

61. Naći analitičku funkciju čiji je realni deo dat sa

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - x.$$

62. Izvesti C-R uslove u obliku (18).

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, jednakost $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ postaje

$$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Kako je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\theta = \operatorname{arctg}(y/x) + C$[1], nalaženjem parcijalnih izvoda i sređivanjem dobijamo:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta. \tag{22}$$

[1] Konstanta C zavisi od kvadranta i ovde nam nije bitna njena vrednost.

Na sličan način se, iz jednakosti $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ dobija da je

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sin\theta = -\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta. \tag{23}$$

Množenjem (22) sa $\cos\theta$ i (23) sa $\sin\theta$, i sabiranjem, dobijamo da je

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0.$$

Dalje, množenjem (22) sa $\sin\theta$ i (23) sa $-\cos\theta$ i sabiranjem, dobijamo da je

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

63. Neka je $f(z) = e^{-1/|z|^2}$, $z \neq 0$ i $f(0) = 0$. Ispitati regularnost ove funkcije.

Rešenje. Kako je $|z| = z\bar{z}$, zaključujemo da definicija funkcije zavisi od $\bar{z}$, tako da data funkcija nije diferencijabilna ni u jednoj tački $z \neq 0$. U tački $z = 0$ postoji izvod $f'(0) = 0$, što se dokazuje nalaženjem izvoda po definiciji. Međutim, kako u okolini nule ne postoji izvod, funkcija nije regularna ni u jednoj tački kompleksne ravni.

4.3 Kompleksna integracija

4.3.1 Definicija kompleksnog integrala

Ako je $t \mapsto g(t) = u(t)+iv(t)$ kompleksna funkcija realnog argumenta t, Riemannov integral ove funkcije duž segmenta $[a, b]$ definiše se pomoću integrala realnog i imaginarnog dela:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_{\alpha}^{\beta} v(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Primer 86. Neka je $f(t) = e^{it}$. Tada je

$$\int_0^{2\pi} e^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos t + i\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t + i\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 0. \quad \Box$$

Dakle, integral kompleksne funkcije realnog argumenta se svodi na dva Riemannova integrala. Videćemo sada da se integral kompleksne funkcije kompleksnog argumenta svodi na dva krivolinijska integrala.

Neka je u kompleksnoj ravni data glatka kriva L u parametarskom obliku $z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$, tj. jednačinama

$$x = x(t), y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta\ .$$

Za kompleksnu funkciju f, neprekidnu na krivoj L, definišemo

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t\ . \tag{24}$$

U razvijenom obliku, imamo da je (uz oznake $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ i $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$):

$$
\begin{aligned}
(25)\quad \int_L f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\alpha^\beta (u+iv)(\dot{x}+i\dot{y})\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (u\dot{x}-v\dot{y})\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta (v\dot{x}+u\dot{y})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_L u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_L v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Prema tome, kompleksni integral se svodi na dva krivolinijska integrala.

Ako se integrali po zatvorenoj konturi C, upotrebljava se oznaka $\oint_C$.

Primer 87. Neka je

$$I = \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} \quad \text{gde je} \quad C = \{z \mid |z-a| = r\}\ .$$

Parametarska jednačina kruga C je $z = a + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, pa je $\dot{z} = ie^{it}$, odakle je

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Kao što vidimo, vrednost integrala ne zavisi od r. Ovo nije slučajno; nešto kasnije ćemo pokazati da vrednost integrala u ovom i sličnim slučajevima ne zavisi ni od krive po kojoj integralimo. □

Ako je kriva L zadata sa $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, definišemo

$$\int_L f(z)|\,\mathrm{d}z| = \int_\alpha^\beta f(z(t))|\dot{z}|\,\mathrm{d}t.$$

Primer 88. Ako je $x = x(t), y = y(t)$ jednačina krive L, orijentisane u smeru u kome t raste, onda je

$$\int_L |\,\mathrm{d}z| = \int_L \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t,$$

a ovo je dužina luka krive L. Na primer, ako je L kružnica $|z-a| = r$, odnosno $z = a + re^{it}$, onda je $|\dot{z}| = |ire^{it}| = r$, pa je

$$\oint_C |\,\mathrm{d}z| = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2r\pi. \quad \square$$

Kompleksni integral, kao i svi integrali ima osobinu linearnosti i osobinu aditivnosti. Od ostalih osobina navodimo jednu nejednakost, koja se dobija primenom nejednakosti trougla u (25):

$$(26)\qquad \left|\int_L f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_L |f(z)|\cdot|\,\mathrm{d}z|\ .$$

4.3.2 Osnovne teoreme integralnog računa

U ovom i sledećim odeljcima **oblast**, ukoliko se drugačije ne precizira, isto kao u delu o funkcijama više promenljivih, znači zatvorenu oblast, zajedno sa svojom granicom koju čine deo po deo glatke krive.

Pretpostavimo da kontura C zatvara neku oblast D, pri čemu je funkcija f regularna u oblasti D i da je $f'(z)$ neprekidna funkcija na D. Pod ovim pretpostavkama, funkcije u i v, kao i njihovi parcijalni izvodi su neprekidne funkcije, pa primenom GREEN-RIEMANNove formule dobijamo:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C (u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y) + i\oint_C (v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y)\\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,\end{aligned}$$

jer su oba dvojna integrala jednaka nuli zbor C-R uslova. U navedenom izvođenju bilo nam je potrebno da pretpostavimo da je $f'(z)$ neprekidna funkcija, jer smo koristili GREEN-RIEMANNovu formulu. Može se pokazati da je dobijeni rezultat važi i bez pretpostavke o neprekidnosti funkcije f', ali je onda dokaz komplikovaniji[1].

Teorema 4.6 Cauchy-Goursatova teorema za jednostruko povezanu oblast. *Neka je funkcija f regularna u jednostruko povezanoj oblasti D, koja je ograničena deo po deo glatkom konturom C. Tada je*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Iz teoreme 4.6, na isti način kao kod krivolinijskih integrala, izlazi da se za funkciju f koja je regularna u nekoj oblasti D može definisati

$$\int_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

jer ovaj integral ne zavisi od puta integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Ako se fiksira tačka z_0, dobija se funkcija promenljive z, za koju se može pokazati da je regularna u oblasti D i da je njen izvod jednak funkciji f. Ova funkcija se zove **primitivna funkcija**.

Teorema 4.7 *Ako je funkcija f regularna u jednostruko povezanoj oblasti D, onda je funkcija*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad z_0 \in D,$$

[1] U stvari, kasnije će se pokazati da je funkcija f' uvek diferencijabilna, dakle i neprekidna, ali je dokaz te činjenice zasnovan upravo na rezultatu koji sada dokazujemo. Stoga bi pozivanje na neprekidnost funkcije f' u ovom trenutku značilo tzv. *circulus vitiosis*.

regularna u oblasti D i $F'(z) = f(z)$ za svako $z \in D$. Za svake dve tačke $z_1, z_2 \in D$ važi da je

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1).$$

Dokaz ove teoreme je veoma sličan dokazu odgovarajućeg rezultata za krivolinijske integrale u ravni, pa ga izostavljamo.

Za višestruko povezanu oblast, primenom odgovarajuće verzije GREEN-RIEMANNove formule dobija se sledeći rezultat.

Teorema 4.8 Cauchy-Goursatova teorema za višestruko povezanu oblast. *Neka je funkcija f regularna u višestruko povezanoj oblasti D, koja je ograničena deo po deo glatkim konturama $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$, gde je C spoljna kontura. Tada je*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

pri čemu su sve konture orijentisane u pozitivnom smeru.

Sledeći rezultat odnosi se na činjenicu da je regularna funkcija u nekoj oblasti potpuno određena svojim vrednostima na granici te oblasti. Ovo je veoma važna osobina regularnih funkcija.

Teorema 4.9 Osnovna integralna formula. *Neka je f regularna funkcija u jednostruko povezanoj oblasti D ograničenoj deo po deo glatkom zatvorenom konturom C. Tada za svaku tačku $a \in \overset{\circ}{D}$ važi*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z. \tag{27}$$

Dokaz. Definišimo funkciju

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad (z \neq a), \qquad g(a) = f'(a).$$

Iz definicije izvoda sleduje da je funkcija g neprekidna u tački a, a kako je f regularna funkcija, g je neprekidna i u svim ostalim tačkama zatvorene oblasti D. Stoga postoji konačan $\max_{z\in D} |g(z)| = M$.

Kako $a \in \overset{\circ}{D}$, za dovoljno malo $r > 0$, oblast D sadrži i disk $D_r = \{z \mid |z-a| < r\}$. Neka je G oblast koja se dobija kada se iz D odstrani D_r. Oblast G je dvostruko povezana, a njenu granicu čini kontura C i kružnica $\gamma_r = \{z \mid |z-a| = r\}$. Prema teoremi 4.8 imamo da je

$$\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_r} g(z)\,\mathrm{d}z\ ,$$

i dalje,

$$\oint_{\gamma_r} g(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - f(a)\oint_{\gamma_r}\frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \oint_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - f(a)\cdot 2\pi i, \tag{28}$$

gde je primenjen rezultat iz primera 87. Kako je $|g(z)| \le M$, iz nejednakosti (26) dobijamo

$$\left|\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\oint_{\gamma_r} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le M\oint_{\gamma_r} |\,\mathrm{d}z| = M\cdot 2\pi r.$$

S obzirom da r može biti proizvoljno malo, a $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ ne zavisi od r, zaključujemo da je

$$\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \text{a time i} \quad \oint_{\gamma_r} g(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{za svako } r > 0.$$

Sada iz (28) dobijamo da je

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z,$$

pri čemu je u drugoj jednakosti korišćena regularnost funkcije $z \mapsto f(z)/(z-a)$ u oblasti G. Ovim je dokaz završen. □

Varijanta teoreme 4.9 za višestruko povezanu oblast glasi:

Teorema 4.10 *Neka je f regularna funkcija u višetruko povezanoj oblasti D ograničenoj spoljašnjom konturom C i unutrašnjim konturama $C_1, \dots C_n$ (sve konture su deo po deo glatke). Tada za svaku tačku $a \in \mathring{D}$ važi*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z\ . \tag{29}$$

Dokaz. Neka je γ dovoljno mala zatvorena kontura takva da je oblast ograničena konturom γ podskup oblasti D i sadrži tačku a. Tada je

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z,$$

dok je, na osnovu Cauchy-Goursatove za višestruko povezane oblasti,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z + f(a),$$

odakle se dobija traženo tvrđenje. □

Formalnim diferenciranjem po a leve i desne strane u (27) dobija se

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Daljim formalnim diferenciranjem n puta dobijamo

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z. \tag{30}$$

Može se pokazati da je diferenciranje pod znakom integrala dozvoljeno, ali dokaz te činjenice izostavljamo. Dakle, imamo sledeći važan rezultat:

Teorema 4.11 *Neka je f regularna funkcija u oblasti D, ograničenoj deo po deo glatkom konturom C. Tada funkcija f ima izvode proizvoljnog reda u svakoj tački $a \in \overset{\circ}{G}$ i važi jednakost (30).*

Kao što vidimo, regularnost je u kompleksnom domenu veoma jaka osobina, koja implicira mnogo više od obične diferencijabilnosti u realnom domenu. U sledećim odeljcima ćemo se upoznati sa još nekim neočekivanim posledicama regularnosti.

4.3.3 Cauchyjeva nejednakost, cele funkcije i osnovni stav algebre

U ovom odeljku ćemo dokazati tri važne teoreme koje se odnose na regularne funkcije.

Cauchyjeva nejednakost

Teorema 4.12 Cauchyjeva nejednakost. *Neka je funkcija f regularna u zatvorenom disku ograničenom kružnicom $C = \{z \mid |z-a| = r\}$. Neka je $M = \max_{z\in C}|f(z)|$. Tada je*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{Mn!}{r^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{31}$$

Dokaz. Polazeći od izraza za n-ti izvod funkcije f (teorema 4.11), nalazimo da je

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &= \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{M}{|z-a|^{n+1}}|\,\mathrm{d}z| \\ &= \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}r\,\mathrm{d}t \qquad (\text{smena } z = a + re^{it}) \\ &= \frac{Mn!}{r^n}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Primedba. Za $n = 0$, iz prethodne teoreme se dobija da je $|f(a)| \le M$, tj. da vrednost funkcije u tački a po modulu ne može biti veća od maksimalne vrednosti modula na bilo kakvoj kružnici opisanoj oko te tačke. Ovaj rezultat je slabija verzija tzv. **principa maksimuma modula** koji tvrdi da se maksimum modula regularne funkcije u nekoj oblasti dostiže na granici te oblasti. Dakle, ako je $M_0 = \max_{|z-z_0|\le r}|f(z)|$, onda je $M_0 = M$. U vezi sa tim, primetimo da M i M_0 postoje jer je f neprekidna funkcija u kompaktnoj oblasti (disku $|z-a| \le r$).

Cele funkcije

Kompleksna funkcija koja je definisana i regularna u celoj kompleksnoj ravni $\mathbf{C}$ zove se **cela funkcija**. Na primer, funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$, z^n $(n \in \mathbf{N})$ su cele. Funkcije $\log z$, $\operatorname{arctg} z$ ili $(z-a)^{-n}$ nisu cele.

Teorema 4.13 Liouvilleova teorema. *Ako je cela funkcija f ograničena u celoj kompleksnoj ravni, onda je $f(z) \equiv c$, za neko $c \in \mathbf{C}$.*

Dokaz. Neka je f cela funkcija i neka je $|f(z)| \le M$ za neko $M > 0$ i za svako $z \in \mathbf{C}$. Uslovi teoreme 4.12 ispunjeni su za svako $a \in \mathbf{C}$ i $r > 0$, pa je

$$|f'(a)| \le \frac{M}{r}, \qquad \text{za svako } a \in \mathbf{C}.$$

Puštajući da $r \to +\infty$, dobija se da je $|f'(a)| = 0$ za svako $a \in \mathbf{R}$, odakle je $f(a) = \text{const.} = c$ za neko $c \in \mathbf{C}$. □

Sledeći rezultat je direktna posledica Liouvilleove teoreme.

Teorema 4.14 *Ako je f cela funkcija i ako je $\lim_{z\to\infty} f(z) = c$, za neko $c \in \mathbf{C}$, onda je $f(z) = c$ za svako $z \in \mathbf{C}$.*

Dokaz. Iz postojanja granične vrednosti funkcije f kad $z \to \infty$ zaključujemo da je f ograničena funkcija u nekoj okolini beskonačnosti, dakle postoji M_0 i r tako da je $|f(z)| \le M_0$ za $|z| > r$. Kako je f cela funkcija, onda je i neprekidna na $\mathbf{C}$, pa je u zatvorenom disku $|z-a| \le r$ ograničena, tj. $|f(z)| \le M_1$ za $|z-a| \le r$. Prema tome, za svako $z \in \mathbf{C}$ imamo da je $|f(z)| \le \max\{M_0, M_1\}$, odnosno, f je ograničena funkcija, pa je prema LIOUVILLEovoj teoremi jednaka konstanti, a zbog pretpostavke o graničnoj vrednosti, ta konstanta je c.

Osnovni stav algebre

Teorema 4.15 Osnovni stav algebre. *Svaki polinom*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad (a_0 \ne 0,\ n \ge 1)$$

ima bar jedan koren.

Dokaz. Ako je $a_n = 0$, tada je $P(0) = 0$, pa polinom zaista ima jedan koren. Ako je $a_n \ne 0$ i ako P nema ni jedan koren, tada je $1/P$ cela funkcija. Kako je $a_0 \ne 0$, imamo da je $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$, tj. $\lim\limits_{z\to\infty} 1/P(z) = 0$. Prema teoremi 4.14, funkcija $z \to 1/P(z)$ je identički jednaka nuli, što je nemoguće. Dakle, P mora imati bar jedan koren.

Primedba. Kao što je poznato iz Algebre, Teorema 4.15 je ekvivalentna sa tvrđenjem da svaki polinom stepena n nad poljem kompleksnih brojeva ima tačno n korena. Navedeni dokaz je najkraći poznati dokaz osnovnog stava algebre.

4.4 Razvoji analitičkih funkcija u redove

4.4.1 Kompleksni funkcionalni redovi

Za kompleksne funkcionalne redove

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z), \tag{32}$$

gde su f_n $(n = 0, 1, \ldots)$ kompleksne funkcije kompleksne promenljive, važi istovetna teorija kao i za realne redove. Ovde dajemo kratak pregled osnovnih pojmova i teorema.

Kažemo da red (32) uniformno konvergira u nekoj oblasti $D \subset \mathbf{C}$ ako se za svako $\varepsilon > 0$ može naći neki prirodan broj N takav da je ostatak posle n-tog člana reda (32) po modulu manji od ε u svim tačkama $z \in D$, za svako $n \ge N$. Uniformna konvergencija je od značaja u aproksimaciji funkcije

Sledeća teorema se dokazuje primenom sličnih ideja kao u realnom domenu; stoga izostavljamo njen dokaz.

Teorema 4.16 *Neka je red (32) konvergentan u svakoj tački z skupa D i neka je $F(z)$ njegova suma.*

- *Neka je za svako $z \in D$, $|f_n(z)| \le c_n$, gde su c_n nenegativni realni brojevi takvi da je red $\sum c_n$ konvergentan. Tada je red (32) uniformno konvergentan na skupu D (WEIERSTRASSov kriterijum).*
- *Ako su f_n regularne funkcije na D i ako red (32) uniformno konvergira na D, onda je i funkcija F (njegova suma) regularna na D.*
- *Ako je red (32) uniformno konvergentan na skupu D i ako je funkcija $z \mapsto g(z)$ ograničena na D, tada je i red*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(z) f_n(z)$$
uniformno konvergentan na D.
- *Ako je red (32) uniformno konvergentan na krivoj L, može se integraliti član po član:*
$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_L f_n(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Stepeni redovi, tj. redovi oblika

$$(33) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \qquad c_n \in \mathbf{C}$$

imaju posebnu ulogu u Kompleksnoj analizi. Dajemo kratak pregled njihovih osobina.

Teorema 4.17 *Posmatrajmo stepeni red (33) za neko $a \in \mathbf{C}$.*

- *Ako stepeni red konvergira u nekoj tački z_0, onda on apsolutno konvergira u svakoj tački z takvoj da je $|z-a| < |z_0 - a|$.*
- *Ako stepeni red divergira u nekoj tački z_0, onda on divergira u svakoj tački z takvoj da je $|z-a| > |z_0 - a|$.*
- *Iz prethodne dve osobine izlazi da se može definisati* **poluprečnik konvergencije** *stepenog reda (33) kao poluprečnik najvećeg kruga unutar koga red konvergira, tj.*
$$R = \sup\{ r \in \mathbf{R} \mid \sum a_n (z-a)^n \text{ konvergira za } |z-a| < r\ \}.$$
- *Poluprečnik konvergencije reda (33) nalazi se po formuli*
$$(34) \qquad R = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}\ .$$

- *Unutar diska $|z-a| < R$ red konvergira apsolutno; na svakom disku $|z-a| \leq r$ ($r < R$) red konvergira uniformno; u oblasti $|z-a| > R$ red divergira. Na kružnici $|z-a| = R$ red može divergirati ili konvergirati (uslovno ili apsolutno), zavisno od slučaja.*
- *Zbir stepenog reda je regularna funkcija u oblasti $|z-a| < R$.*
- *Stepeni red se može integraliti član po član po svakoj krivoj koja pripada nekoj zatvorenoj oblasti $|z-a| \leq r$ ($r < R$).*

Primer 89. Posmatrajmo geometrijsku progresiju sa količnikom $q \in \mathbf{R}$. Primenom formule (34) nalazimo da je $R = 1$, pa je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Na granici oblasti konvergencije imamo da je $|q| = 1$, odnosno da je $q = e^{i\theta}$, gde je $\theta \in [0, 2\pi)$. Detaljnijom analizom pokazuje se da red nije konvergentan ni za jedno θ, pa je posmatrani stepeni red (apsolutno) konvergentan u oblasti $|q| < 1$ i divergentan za sve ostale $q \in \mathbf{C}$. Dalje, posmatrani stepeni red je uniformno konvergentan u svakoj oblasti oblika $|q| \leq r$, gde je $r < 1$, ali nije uniformno konvergentan u oblasti $|q| \leq 1$. $\square$

Sledeća teorema daje opšti oblik razvoja analitičke funkcije u red. Neka je $a \in \mathbf{C}$ data tačka (singularitet ili regularna tačka za funkciju f). Sa centrom u toj tački možemo opisati kružnice na kojima se nalaze singulariteti funkcije f; na taj način smo podelili ravan na kružne prstenove $r_i < |z-a| < r_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots$) unutar kojih je funkcija f regularna, s tim što na obema granicama prstena ima po jedan ili više singulariteta. Prvi prsten ima unutrašnji poluprečnik $r_1 = 0$, a poslednji (ukoliko ih je konačno mnogo) ima beskonačan spoljašnji poluprečnik. Prema tome, možemo posmatrati funkciju f koja je regularna u prstenu $r < |z-a| < R$, gde je $0 \leq r < R \leq +\infty$. Ovo je standardna postavka za primenu razvoja koji ćemo sada izvesti.

Teorema 4.18 Laurentov red. *Neka je f regularna funkcija u kružnom prstenu $G = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z-a| < R\}$, gde je $a \in \mathbf{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$. Tada za svako $z \in G$ važi razvoj*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \tag{35}$$

gde je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{36}$$

za proizvoljnu konturu Γ koja pripada oblasti G.

Dokaz. Neka je z_0 proizvoljna, ali fiksirana tačka u oblasti G (videti sliku 55). Neka su γ_1 i C_1 krugovi sa centrom u a i poluprečnikom r_1, odnosno R_1 ($0 < r_1, R_1 < +\infty$), takvi da se tačka z_0 nalazi unutar prstena ograničenog krugovima γ_1 i C_1.

Slika 55.

Primenom osnovne integralne formule[1] za višestruko povezanu oblast $\{z \in \mathbf{C} \mid r_1 < |z-a| < R_1\}$ (teorema 4.10) dobija se da je

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z_0}\, \mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(s)}{s - z_0}\, \mathrm{d}s \,. \tag{37}$$

Sada ćemo podintegralne funkcije u integralima u (37) razviti u red, koristeći se činjenicom (kao u primeru 89) da je

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad |q| < 1,$$

pri čemu ovaj red uniformno konvergira u svakoj oblasti $|q| \le r_0$.

Za s na kružnici C_1 imamo da je

$$\frac{f(s)}{s - z_0} = \frac{f(s)}{s - a - (z_0 - a)} = \frac{f(s)}{s-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - a}{s - a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} (z_0 - a)^n. \tag{38}$$

Kako je $|q| = |z_0 - a|/|s - a| = |z_0 - a|/R_1 = r_0 < 1$ za $s \in \mathbf{C}_1$, a $s \mapsto f(s)$ je ograničena funkcija na C_1 (jer je neprekidna), red u (38) je uniformno konvergentan na C_1, pa se može integraliti član po član:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z_0}\, \mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{C_1} \frac{f(s)\, \mathrm{d}s}{(s-a)^{n+1}} \right) (z_0 - a)^n.$$

Zbog regularnosti funkcije $s \mapsto f(s)/(s-a)^{n+1}$ u prstenu $r < |s - a| < R$, kontura C_1 može se zameniti proizvoljnom konturom Γ koja pripada ovom prstenu. Na taj način dobijamo da je

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z_0}\, \mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z_0 - a)^n, \quad \text{gde je} \tag{39}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)\, \mathrm{d}s}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Drugi integral u (37) razvija se u red primenom iste ideje na kružnici γ_1:

$$-\frac{f(s)}{s - z_0} = \frac{f(s)}{(z_0 - a) - (s - a)} = \frac{f(s)}{z_0 - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s-a}{z_0-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(s)}{(z_0 - a)^{n+1}} (s-a)^n,$$

[1] S obzirom da funkcija f može imati singularitet na krugu $|z - a| = r$ ili na $|z - a| = R$, kružne konture γ_1 i C_1 su potrebne da bi se obezbedila regularnost funkcije u zatvorenoj oblasti. Osim toga, ove konture su potrebne i u slučajevima kada je $r = 0$ ili $R = +\infty$.

pri čemu poslednji red uniformno konvergira po s na γ_1, jer je $|z_0 - a|/|s - a| = |z_0 - a|/r_1 < 1$. Integracijom član po član dobija se

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(s)}{s - z_0}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(s)(s-a)^n\,\mathrm{d}s\right)\cdot\frac{1}{(z_0 - a)^{n+1}}.$$

Kako je funkcija $s \mapsto f(s)(s-a)^n$ regularna u oblasti $r < |s - a| < R$, integral po γ_1 može se zameniti integralom po proizvoljnoj konturi Γ u navedenoj oblasti; stoga je

$$(40)\quad -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(s)}{s - z_0}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{(z_0 - a)^{n+1}}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(s)(s-a)^n\,\mathrm{d}s\ .$$

Konačno, (40) se može formalno napisati u istom obliku kao (39), ako se uvede smena $n + 1 = -m$, $m = -1, -2, \ldots$:

$$(41)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(s)}{s - z_0}\,\mathrm{d}s = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m (z_0 - a)^m, \quad \text{gde je}$$

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(s)}{(s-a)^{m+1}}\,\mathrm{d}s, \quad m = -1, -2, \ldots$$

Iz (39) i (41) dobija se formula (35), koju je i trebalo dokazati. □

Kao što se vidi iz formule (35), LAURENTov razvoj je u stvari zbir dva reda. Red koji sadrži negativne stepene zove se **glavni deo**, a red sa nenegativnim stepenima je **pravilni deo** LAURENTovog razvoja. Pravilni deo ima isti oblik kao TAYLORov razvoj; sledeća teorema daje uslove pod kojima se dobija upravo TAYLORov razvoj.

Teorema 4.19 Taylorov red. *Ako je funkcija f regularna u oblasti $|z - a| < R$, važi razvoj*

$$(42)\qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\ , \quad |z - a| < R.$$

Dokaz. Ako je funkcija f regularna u oblasti $|z - a| < R$, može se primeniti LAURENTov razvoj iz teoreme 4.18, sa $r = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

gde je

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} f(s)(s-a)^{n-1}\,\mathrm{d}s = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

jer je podintegralna funkcija regularna u oblasti ograničenoj konturom Γ. Dalje je, prema teoremi 4.11,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}s = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ovim je teorema dokazana za svako $z \neq a$ u oblasti $0 < |z-a| < R$. U tački $z = a$, jednakost (42) je trivijalno tačna, jer se svodi na $f(a) = f(a)$.

Primedba. 1° Na osnovu dokazanog, zaključujemo da se, ako je funkcija regularna u tački a, njen LAURENTov razvoj svodi na TAYLORov, odnosno, LAURENTov razvoj ima samo pravilni deo. Ako f nije regularna u tački a, koeficijenti pravilnog dela se izražavaju pomoću integrala, kao u teoremi 4.18, ali ne preko izvoda (jer izvodi ne postoje), pa se pravilni deo ne svodi na TAYLORov razvoj.

2° U realnom domenu se može konstruisati funkcija f čiji TAYLORov red konvergira, ali ne ka f. U kompleksnom domenu ovakva mogućnost ne postoji, kao što se vidi iz dokaza prethodnih teorema. U stvari, u kompleksnom domenu svaka regularna funkcija je određena svojim izvodima u jednoj tački iz oblasti svoje regularnosti. Ovo tvrdi sledeća teorema.

!

Teorema 4.20 *Neka je funkcija f regularna u nekom disku $G = \{z \mid |z-a| < R\}$ i neka je $f^{(n)}(a) = 0$ za svako $n = 0, 1, \ldots$ Tada je funkcija f identički jednaka nuli na G.*

Dokaz. Prema teoremi 4.19, u oblasti G važi TAYLORov razvoj (42). Kako su svi koeficijenti uz $(z-a)^n$ u ovom razvoju jednaki nuli, zaključujemo da je $f(z) = 0$ za svako $z \in G$.

Primer 90. S obzirom da se koeficijenti TAYLORovog reda nalaze pomoću izvoda u tački a, TAYLORovi razvoji svih elementarnih funkcija u kompleksnom domenu imaju isti oblik kao odgovarajući razvoji u realnom domenu. Na primer,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \text{ itd.} \quad \square$$

LAURENTovi i TAYLORovi razvoji se retko nalaze izračunavanjem koeficijenata pomoću integrala, jer je to u principu komplikovano. Standardna tehnika je korišćenje razvoja osnovnih elementarnih funkcija i razne smene promenljive, kao i u realnom domenu. Od velikog značaja u primeni je sledeća teorema, čiji dokaz izostavljamo.

Teorema 4.21 Teorema o jedinstvenosti Laurentovog razvoja. *Ako je funkcija f regularna u disku $r < |z-a| < R$, gde je $0 \leq r < R \leq +\infty$, i ako se u tom disku može razviti u konvergentan red*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

onda je ovaj red LAURENTov red date funkcije, odnosno, koeficijenti c_n zadovoljavaju jednakost (36).

Primer 91. Posmatrajmo funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

i odredimo njene LAURENTove razvoje u odnosu na tačku $a = 0$. Data funkcija je regularna u sledećim prstenima sa centrom u koordinatnom početku: $G_1 = \{z \mid |z| < 1\}$, $G_2 = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$ i $G_3 = \{z \mid 2 < |z|\}$. Koristeći se razvojem

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^n, \qquad |q| < 1,$$

nalazimo da je

- U oblasti G_1 (TAYLORov razvoj):

$$f(z) = -\frac{1}{2(1-z/2)} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

- U oblasti G_2:

$$f(z) = -\frac{1}{2(1-z/2)} - \frac{1}{z(1-1/z)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

- U oblasti G_3:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-2/z)} - \frac{1}{z(1-1/z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}.$$

4.4.2 Nule regularnih funkcija

Definicija 4.7 *Neka je f regularna funkcija u tački a i neka je $f(a) = 0$. Kažemo da je a* **nula reda** *k funkcije f ako je*

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Za nulu reda 1 kažemo da je **prosta nula**.

Ako funkcija f nije identički jednaka nuli u nekoj okolini tačke a, onda (na osnovu teoreme 4.20) red nule $z = a$ mora biti konačan.

Teorema 4.22 *Neka je f regularna funkcija u disku $|z-a| < R$ i neka je a njena nula reda k. Tada važi sledeće:*

1° *U disku $|z-a| < R$ funkcija f se može predstaviti u obliku*

$$f(z) = (z-a)^k g(z),$$

gde je g regularna funkcija u disku $|z-a| < R$, za koju je $g(a) \neq 0$.

2° *Za red nule važi relacija:*

$$k = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

3° *Ako funkcija f nije identički jednaka nuli, postoji $\delta > 0$ tako da u disku $|z-a| < \delta$ funkcija f nema drugih nula osim a.*

Dokaz. 1° Ako je a nula reda k funkcije f, onda njen TAYLORov razvoj oko tačke a glasi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \cdots \\ &= (z-a)^k\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a) + \cdots\right) = (z-a)^k g(z), \end{aligned}$$

gde je $g(z)$ regularna funkcija (jer je data kao suma stepenog reda) i $g(a) \neq 0$ (jer je $f^{(k)}(a) \neq 0$).

2° Na osnovu 1° dobijamo

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z),$$

odakle je

$$(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^k g(z) + (z-a)^{k+1}g'(z)}{(z-a)^k g(z)} = k+(z-a)\frac{g'(z)}{g(z)} \to k \quad \text{kad } z \to a.$$

3° Pretpostavimo suprotno, tj. da u svakoj okolini tačke a postoji bar još jedna nula funkcije f. To znači da postoji niz tačaka $\{z_n\}$, $z_n \neq a$, takav da $z_n \to a$ i da je $f(z_n) = 0$. S obzirom na reprezentaciju dokazanu u 1°, imamo da je $g(z_n) = 0$ za svako n (jer je svakako $(z_n - a)^k \neq 0$), pa iz neprekidnosti funkcije g izlazi da je $g(a) = 0$, što je kontradikcija. Prema tome, mora postojati bar jedna okolina tačke a u kojoj funkcija f nema drugih nula osim a.

Teorema 4.23 *Neka su f i g regularne funkcije u oblasti $|z-a| < R$ i neka je z_n proizvoljan niz tačaka takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$. Ako je $f(z_n) = g(z_n)$ za svako $n = 1, 2, \ldots$, tada je $f(z) = g(z)$ za svako z u disku $|z-a| < R$.*

Dokaz. Ako su f i g regularne funkcije u disku $|z-a| < R$, onda je i njihova razlika $F(z) = f(z) - g(z)$ regularna u istom disku, i po pretpostavci je $F(z_n) = 0$ za svako n. Kako $z_n \to a$, zbog neprekidnosti je i $F(a) = 0$. Dakle, u svakoj okolini tačke a nalazi se bar jedna (u stvari beskonačno mnogo) tačka z_n takva da je $F(z_n) = 0$, što je, prema teoremi 4.22 moguće samo ako je F identički jednaka nuli, odnosno ako je $f(z) = g(z)$ za svako z iz posmatrane okoline $|z-a| < R$.

Primedba. Prema teoremi 4.23, regularna funkcija je određena sa prebrojivo mnogo svojih vrednosti. To znači, na primer, da postoji samo jedna funkcija f koja je regularna u oblasti $|z| < 1$ i za koju je $f(1/n) = 1/n^2$; to je funkcija $f(z) = z^2$! !
Ova osobina nema paralelu u realnom domenu.

4.4.3 Izolovani singulariteti

Ako funkcija f nema izvod u tački $a \in \mathbf{C}$, a regularna je u otvorenoj oblasti $0 < |z-a| < \varepsilon$ za neko $\varepsilon > 0$, tada kažemo da funkcija f ima u tački a **izolovani singularitet**. Drugim rečima, a je izolovani singularitet ako je funkcija f diferencijabilna u svim tačkama neke ε-okoline tačke a, osim u samoj tački a.

Kažemo da funkcija f ima izolovani singularitet u tački ∞ ako funkcija $t \mapsto f(1/t)$ ima izolovani singularitet u tački 0.

Primer 92. 1° Funkcija $1/(z-i)$ ima izolovani singularitet u tački i. Funkcija $e^{1/z}$ ima izolovani singularitet u tački 0.

2° Funkcija $\ln z$ ima singularitet u tački 0, ali on nije izolovan (videti primer 85). Funkcija $\sqrt[n]{z}$ (u smislu glavne vrednosti) ima singularitet u nuli, ali ni on nije izolovan (što se dokazuje na osnovu veze između ove funkcije i logaritma).

3° Funkcija $z \mapsto e^z$ je ima izolovani singularitet u beskonačnosti, jer funkcija $t \mapsto e^{1/t}$ ima izolovani singularitet u nuli. Funkcija $z \mapsto 1/z^3$ nema singularitet u beskonačnosti, jer je funkcija $t \mapsto t^3$ regularna u nuli.

Teorema 4.24 *Neka je funkcija f regularna u oblasti $0 < |z-a| < R$ za neko $R > 0$. Tada je f diferencijabilna u tački a ako i samo ako je neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Potrebno je dokazati samo da neprekidnost implicira diferencijabilnost, jer obrnuta implikacija važi za sve funkcije.

Pretpostavimo da je f neprekidna u tački a i regularna u oblasti $0 < |z-a| < R$. U toj oblasti važi LAURENTov razvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

Dokazaćemo da su koeficijenti u glavnom delu ovog razvoja jednaki nuli. Funkcija f je, prema datim uslovima, neprekidna u svakom disku $|z-a| \le \rho$ za $\rho < R$. Iz neprekidnosti izlazi da postoji $M = \max_{|z-a|\le\rho_0} |f(z)|$, gde je $\rho_0 < R$ proizvoljan fiksiran broj. Kako je

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{n-1}\,\mathrm{d}z,$$

imaćemo da je, za $\rho < \rho_0$,

$$|c_{-n}| \le \frac{M\rho^{n-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\,\mathrm{d}z| = M\rho^n,$$

odakle se dobija, puštanjem da $\rho \to 0$, da je $c_{-n} = 0$, tj,

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots .$$

Zbog neprekidnosti u tački a imamo da je $c_0 = f(a)$, odakle se dobija da postoji $\lim\limits_{z\to a}(f(z) - f(a))/(z-a) = c_1$. Dakle, funkcija f je diferencijabilna u tački a (i to beskonačno diferencijabilna, prema teoremi 4.11). $\square$

Na osnovu teoreme 4.24 zaključujemo da svaka funkcija koja ima izolovani singularitet u tački a mora u toj tački imati prekid. Stoga izolovane singularitete klasifikujemo prema vrsti prekida.

Neka je tačka a izolovani singularitet funkcije f. Tada kažemo da je tačka a:

- **Otklonjiv singularitet** ako postoji $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbf{C}$
- **Pol** ako je $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$,
- **Esencijalni singularitet** ako granična vrednost funkcije f kad $z \to a$ ne postoji (ni konačna ni beskonačna).

Videćemo sada da ova klasifikacija implicira određenu strukturu glavnog dela Laurentovog razvoja.

Teorema 4.25 *Neka je funkcija f regularna u oblasti $G = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z-a| < R\}$, gde je je tačka a njen izolovani singularitet. Posmatrajmo* Laurent*ov razvoj ove funkcije po stepenima $(z-a)$ u oblasti G.*

(i) Tačka a je otklonjiv singularitet ako i samo ako su svi koeficijenti u glavnom delu Laurent*ovog razvoja jednaki nuli.*

(ii) Tačka a je pol ako i samo ako glavni deo Laurent*ovog razvoja sadrži bar jedan, ali samo konačno mnogo članova različitih od nule.*

(iii) Tačka a je esencijalni singularitet ako i samo ako glavni deo Laurent*ovog razvoja sadrži beskonačno mnogo članova različitih od nule.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo da su svi koeficijenti u glavnom delu Laurentovog razvoja u oblasti G jednaki nuli, tj. da je

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots .$$

S obzirom na uniformnu konvergenciju ovog razvoja, imamo da je $\lim_{z\to a} f(z) = c_0$, odnosno da je tačka a otklonjiv singularitet. Obrnuto, ako je a otklonjiv singularitet, funkcija f je ograničena u nekom disku oko tačke a, pa se isto kao u dokazu teoreme 4.24, dobija da je $c_{-n} = 0$ za svako $n = 1, 2, \ldots$.

(ii) Pretpostavimo sada da je

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots, \tag{43}$$

gde je $k \geq 1$ i $c_{-k} \neq 0$. Množenjem obe strane jednakosti (43) sa $(z-a)^k$ nalazimo da je $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z) = c_{-k} \neq 0$, pa je $f(z) \sim c_{-k}/(z-a)^k \to \infty$ kad $z \to a$, što znači da funkcija ima pol u tački a. Obrnuto, ako je a pol, tj. ako je $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, postoji neko $r \in (0, R)$ tako da je $|f(z)| \geq K > 0$ (a time i $f(z) \neq 0$) u oblasti $U = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z-a| \leq r\}$, pri čemu je zbog $r < R$ funkcija f regularna na U. Posmatrajmo funkciju g definisanu sa

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad (z \neq a), \qquad g(a) = 0.$$

Funkcija g je neprekidna u tački a, jer $f(z) \to \infty$ kad $z \to a$, dok zbog $f(z) \neq 0$, u svakoj tački oblasti U postoji izvod $g' = -f'/f^2$. Prema teoremi 4.24, g je regularna u celom disku $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| \leq r\}$. Dalje, tačka a je njena jedina nula u tom disku. Ako je k $(1 \leq k < +\infty)$ red nule $z = a$, prema teoremi 4.22 postoji regularna funkcija h za koju je $h(a) \neq 0$, takva da je

$$g(z) = (z-a)^k h(z), \qquad z \in D.$$

Kako g nema drugih nula u disku D, onda je $h(z) \neq 0$ za svako $z \in D$, pa je funkcija $1/h$ regularna u disku D i važi TAYLORov razvoj

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots, \qquad z \in D, \quad b_0 \neq 0$$

Odavde je za svako z u oblasti $0 < |z-a| \leq r$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-a)^k} \cdot \frac{1}{h(z)} \\ &= \frac{b_0}{(z-a)^k} + \frac{b_1}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z-a) + b_{k+2}(z-a)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{44}$$

Prema tome, LAURENTov razvoj funkcije f sadrži najviše k $(1 \leq k < +\infty)$ članova u glavnom delu. Primetimo da, s obzirom da je funkcija f regularna u oblasti $0 < |z-a| < R$, jednakost (44) važi u celoj oblasti $0 < |z-a| < R$, iako je izvedena samo za $0 < |z-a| \leq r$.

Najzad, deo (iii) je posledica dokazanog, jer je uslov iz (iii) jedina preostala mogućnost ako tačka a nije ni otklonjiv singularitet ni pol.

Primedba. 1° Ako funkcija f ima u tački a otklonjiv singularitet, i ako je R rastojanje od tačke a do najbližeg drugog singulariteta funkcije f, iz dokazanog izlazi da se u oblasti $0 < |z-a| < R$ funkcija f može razviti u red:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

U stvari, ovaj red konvergira i u tački a, ali je njegova suma $\lim_{z\to a} f(a)$. Funkcija f^* definisana sa

$$f^*(z) = f(z) \quad (z \neq a), \qquad f^*(a) = \lim_{z\to a} f(z),$$

je regularna u tački a i $c_n = f^{*(n)}(a)/n!$. Zato se ova vrsta singulariteta i naziva otklonjivim.

2° Ako LAURENTov razvoj koji se pominje u teoremi 4.25 ima u glavnom delu koeficijent $c_{-k} \neq 0$, a svi koeficijenti c_{-n} za $n > k$ su jednaki nuli, kaže se da je tačka a **pol reda** k funkcije f. Iz dokaza teoreme 4.25 izlazi da je a pol reda k funkcije f ako i samo ako je a nula reda k funkcije $1/f$.

Primer 93. 1° Funkcija $z \mapsto \sin z$ je regularna u nuli i njen MACLAURINov razvoj glasi

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

Stoga je

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots,$$

iz čega zaključujemo da funkcija $\sin z/z$ ima u nuli otklonjiv singularitet i da je

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2° Funkcija $f(z) = z^{-2}$ ima u tački $z = 0$ pol drugog reda, jer je $z = 0$ nula drugog reda funkcije $1/f(z) = z^2$.

3° Funkcija $z \mapsto e^{1/z}$ ima u nuli esencijalni singularitet, jer njen razvoj

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}, \qquad 0 < |z| < +\infty$$

sadrži u glavnom delu beskonačno mnogo članova različitih od nule.

4.5 Račun ostataka

4.5.1 Teorema o ostacima

Definicija 4.8 *Koeficijent c_{-1} u LAURENTovom razvoju po stepenima osnove $(z-a)$ u disku $0 < |z-a| < R$ zove se* **ostatak** *funkcije f u tački a, u oznaci* $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$

Kao što ćemo u ovom odeljku videti, upravo ovaj koeficijent sadrži značajnu informaciju o funkciji f i prirodno se pojaljuje pri izračunavanju integrala. Osnovu za ovakav zaključak daje sledeća činjenica, koju je jednostavno direktno dokazati: Od svih integrala oblika

$$I_n = \oint_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

gde je C kontura opisana oko tačke a, samo je I_{-1} različit od nule; prema primeru 87, $I_{-1} = 2\pi i$. To znači da, ako se LAURENTov red $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ integrali član po član po konturi C, jedino što ostaje je $2\pi i c_{-1}$.

Isti zaključak se dobija kada se primeni formula za koeficijente LAURENTovog reda, prema kojoj je

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{45}$$

gde je C bilo koja zatvorena kontura u unutrašnjosti prstena u kome LAURENTov red konvergira.

Teorema 4.26 Teorema o ostacima. *Neka je funkcija f analitička u oblasti D ograničenoj konturom C, pri čemu je na konturi C regularna, a u otvorenoj oblasti $\overset{\circ}{D}$ ima izolovane singularitete u tačkama $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Tada je*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{46}$$

gde je kontura C orijentisana u pozitivnom smeru.

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi postavljeni u formulaciji teoreme. Oko svakog singulariteta z_k opišimo kružnicu C_k dovoljno malog poluprečnika r_k tako da je funkcija f regularna u oblasti $0 < |z - z_k| < r_k$ i na konturi $C_k : \ |z - z_k| = r_k$. Neka je G višestruko povezana oblast ograničena spoljašnjom konturom C i unutrašnjim konturama C_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Prema osnovnoj integralnoj formuli za višestruko povezane oblasti, primenjujući i jednakost (45) imamo da je

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{m} \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{47}$$

čime je dokaz završen. □

Primedba. Ukoliko uvedemo konvenciju da je $\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0$ ako je $m = 0$, tj. ako u posmatranoj oblasti nema singulariteta, onda se teorema o ostacima može shvatiti kao generalizacija CAUCHY-GOURSATove teoreme 4.6. □

!

Prema formuli (45), ostatak u tački a se nalazi integracijom po konturi u nekoj okolini tačke a. Analogno, ostatak u beskonačnosti se nalazi integracijom po konturi koja ograničava neku okolinu beskonačnosti, što se svodi na sledeću definiciju.

Definicija 4.9 *Ostatak funkcije f u beskonačnosti definiše se pomoću*

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_-} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

gde je C_- kontura orijentisana u negativnom smeru, i takva da je izvan oblasti ograničene konturom C funkcija f regularna u svim tačkama osim možda u ∞.

Navodimo sada neke osobine ostataka koje se lako dokazuju polazeći od definicije.

Teorema 4.27 Pravila za nalaženje ostatka.

(i) Ostatak u konačnoj tački jednak je nuli ako je u toj tački funkcija regularna ili ima otklonjiv singularitet. Za ostatak u beskonačnosti ovo pravilo ne važi.

(ii) Ako funkcija f ima u tački a pol reda k, onda je

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \big((z-a)^k f(z)\big)^{(k-1)}$$

(iii) Za funkciju f koja je analitička (tj. ima samo konačno mnogo singulariteta) u celoj kompleksnoj ravni, zbir svih ostataka u proširenoj ravni jednak je nuli, odnosno

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

gde su $z_1, \dots, z_m$ svi singulariteti funkcije f u kompleksnoj ravni.

Dokaz. (i) Ako je funkcija u tački a regularna ili ima otklonjiv singularitet, odgovarajući LAURENTov red se svodi samo na pravilni deo, pa su svi koeficijenti iz glavnog dela, uključujući i c_{-1} jednaki nuli. Videti primer 94 za detalje u vezi sa ovim.

(ii) Ako funkcija f u tački a ima pol reda k, odgovarajući LAURENTov razvoj glasi:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-(k-1)}}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

Odavde dobijamo da je

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-(k-1)}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + c_0(z-a)^k + c_1(z-a)^{k+1} + \cdots,$$

i dalje,

$$\big((z-a)^k f(z)\big)^{(k-1)} = c_{-1}(k-1)! + c_0 k!(z-a) + c_1\frac{(k+1)!}{2}(z-a)^2 + \cdots,$$

odakle se neposredno dobija traženo tvrđenje.

(iii) Prema definiciji ostatka u beskonačnosti, imamo da je

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

gde je C kontura van koje se ne nalazi ni jedan konačni singularitet funkcije f; prema tome, svi singulariteti funkcije f se nalaze u oblasti ograničenoj konturom C. Stoga je, prema teoremi o ostacima,

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\sum_{i=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z),$$

čime je dokaz završen.

Primer 94. 1° Kako je

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots ,$$

imamo da je $\operatorname*{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1$ (koeficijent uz $1/z$).

2° Na osnovu 1°, tačka ∞ je esencijalni singularitet funkcije $z \mapsto e^z$. Kako ova funkcija nema singulariteta u konačnoj z-ravni i kako je zbir svih ostataka jednak 0, onda mora biti $\operatorname*{Res}_{z=\infty} e^z = 0$.

3° I u singularitetu u konačnoj tački može se dogoditi da je ostatak nula. Na primer, funkcija $z \mapsto z^{-2}$ ima pol drugog reda u nuli, ali je $\operatorname*{Res}_{z=0} z^2 = 0$.

4° Kao što je već rečeno, funkcija može biti regularna u ∞, sa ostatkom koji nije nula. Na primer, funkcija $z \mapsto 1/z$ je regularna u ∞ (jer je funkcija z regularna u nuli); prema tvrđenju (iii) teoreme 4.27 imamo da je

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^{-1} + \operatorname*{Res}_{z=\infty} z^{-1} = 0,$$

pa je $\operatorname*{Res}_{z=\infty} z^{-1} = -1$.

5° Funkcija $z \mapsto 1/\sin z$ ima polove prvog reda u tačkama $z = n\pi$, gde je n ceo broj. Primenom formule iz dela (ii) teoreme 4.27 (sa $k = 1$), nalazimo da je

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} 1/\sin z = \lim_{z\to k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin z} = \frac{1}{\cos k\pi} = (-1)^k,$$

pri čemu smo primenili L'HOSPITALovo pravilo.

6° Neka je $f(z) = g(z)/(z-a)$, pri čemu je $g(a) \neq 0$. Tačka a je pol prvog reda funkcije f, pa je

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) = g(a).$$

Na primer, ako je $f(z) = 1/(z-a)(z-b)$, gde je $a \neq b$, dobijamo da je ostatak u tački a jednak $1/(a-b)$. Uopšte, ako je

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)(z-a)}$$

a ako je $h(a) \neq 0$, onda je

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)g(z)}{h(z)(z-a)} = \frac{g(a)}{h(a)}.$$

4.6 Izračunavanje realnih integrala

4.6.1 Izračunavanje integrala

Mnogobrojne su primene računa ostataka u Matematici. U ovom delu navešćemo samo primene na izračunavanje realnih integrala. Ideja je sledeća: Ako se realni integral može izraziti preko podesno izabranog konturnog integrala, onda se izračunavanje integrala može svesti na izračunavanje ostataka. Veliki broj integrala čije bi izračunavanje standardnim metodama realne analize bilo veoma komplikovano, na ovaj način se izračunava bez teškoća.

Postoji nekoliko klasa realnih integrala koji se mogu rešiti pomoću računa ostataka. Na primer, integral

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

može se svesti na konturni integral pomoću smene $z = e^{it}$, odakle je

$$f(\cos t, \sin t) = f\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right), \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{iz},$$

pa je

$$I = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Poslednji integral se dalje rešava primenom teoreme o ostacima.

Primer 95. Neka je

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t + 2\sin t + 3}\ .$$

Uvođenjem smene $z = e^{it}$ dobijamo da je

$$I = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(1-2i)z^2 + 6z + 1 + 2i}.$$

Kvadratni trinom u imeniocu podintegralne funkcije ima korene

$$z_1 = -1 - 2i, \quad z_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i,$$

od kojih se samo z_2 nalazi u disku $|z| < 1$. Stoga je

$$I = \frac{2}{i}\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z), \text{ gde je } g(z) = \frac{1}{(1-2i)(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Kako je z_2 pol prvog reda funkcije g, nalazimo da je

$$I = 4\pi \cdot \frac{1}{(1-2i)(z_2 - z_1)} = \pi. \quad \square$$

Za rešavanje nekih klasa integrala od značaja su sledeće tri teoreme, u literaturi poznate kao Jordanove leme. Neka je D_R oblast na slici 56, ograničena dvema polupravama koje polaze iz tačke z_0 i zaklapaju ugao α, kao i lukom kružnice sa centrom u tački z_0, poluprečnika R. Sa D_∞ označavamo neograničeni deo ravni između polupravih.

Slika 56.

Teorema 4.28 Jordanova lema I. *Neka je f analitička funkcija u oblasti D_R i regularna na granici te oblasti, osim u tački z_0 gde može imati pol prvog reda. Ako je*

(48)
$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D_R}} (z - z_0) f(z) = A,$$

tada je

$$\lim_{R \to 0} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = iA\alpha.$$

Dokaz. S obzirom na uslov (48), u dovoljno maloj okolini tačke z_0 važi da je

$$f(z) = \frac{A}{z - z_0} + \frac{g(z)}{z - z_0}, \qquad z \in D_R$$

gde je $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$. Prema tome,

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = A \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{C_R} \frac{g(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Kako $g(z) \to 0$ kad $z \to z_0$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da na luku $|z - z_0| = R < \delta$ važi da je $|g(z)| < \varepsilon$. Dakle, za takvo δ i za $R < \delta$ imamo da je

$$\left| \int_{C_R} \frac{g(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \right| \le \varepsilon \int_{C_R} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z - z_0|} = \varepsilon \frac{R\alpha}{R} = \varepsilon\alpha,$$

pa ovaj integral teži nuli kad $z \to z_0$. Dalje, smenom $z = z_0 + Re^{it}$ dobijamo da je

$$A \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = iA\alpha,$$

čime je teorema dokazana.

Sledeća teorema se dokazuje na isti način kao prethodna, pa dokaz izostavljamo.

Teorema 4.29 Jordanova lema II. *Neka su ispunjeni uslovi teoreme 4.28. Ako je*

(49)
$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in D_\infty}} (z - z_0) f(z) = A,$$

tada je

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = iA\alpha.$$

Teorema 4.30 Jordanova lema III. *Neka je D_R oblast kao na slici 57, gde je $z_0 = 0$, a poluprave koje zatvaraju oblast D_R su pozitivni i negativni deo x-ose. Ako su ispunjeni uslovi teoreme 4.28 i ako je*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \operatorname{Im} z > 0}} f(z) = 0,$$

tada je za svako realno $a > 0$,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

Slika 57.

Dokaz. Za dato $\varepsilon > 0$ neka je R_0 takvo da je $|f(z)| < \varepsilon$ za svako z sa $\operatorname{Im} z > 0$ za koje je $|z| > R_0$. Neka je $R > R_0$ i neka je $I_R = \int_{C_R} e^{iaz} f(z)\, \mathrm{d}z$. Na krivoj C_R imamo da je $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, tako da je

$$I_R = iR \int_0^{\pi} e^{iaR\cos\theta} e^{-aR\sin\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta, \quad \text{odnosno,}$$

$$|I_R| \leq \varepsilon R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Kako je $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, izlazi da je

$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta,$$

a prema Jordanovoj nejednakosti (videti sliku 58) je $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$, pa je $-aR\sin\theta \leq -2aR\theta/\pi$. Stoga je konačno

$$|I_R| \leq 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi}\, \mathrm{d}\theta = \frac{\varepsilon\pi}{a}(1 - e^{-a/R}) < \frac{\varepsilon\pi}{a}.$$

Prema tome, dokazali smo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji R_0 tako da za svako $R > R_0$ važi da je $|I_R| < \varepsilon\pi/a$, tj. da je $\lim_{R \to +\infty} |I_R| = 0$.

Slika 58. Jordan*ova nejednakost: zbog konkavnosti funkcije $x \mapsto \sin x$ za $x \in [0, \pi/2]$, grafik funkcije je iznad sečice, pa je $\sin x \geq 2x/\pi$. (sjornej)*

Primer 96. Uslov da $f(z) \to 0$ nije dovoljan da $\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$, ali, prema teoremi koju smo upravo dokazali, jeste dovoljan da $\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ kad $R \to +\infty$. Na primer, iako $1/z \to 0$ kad $z \to \infty$, imamo da

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln R + i\pi \to \infty, \quad \text{ali} \quad \int_{C_R} e^{iz} \frac{\mathrm{d}z}{z} \to 0.$$

Primer 97. Neka je

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8}.$$

Neka je C kontura koju čine: odsečak x-ose od 0 do R, deo kružnice poluprečnika R sa centrom u $z = 0$ u prvom kvadrantu (C_R) i odsečak y-ose od R do 0. Neka je

$$f(z) = \frac{1}{1+z^8}.$$

Od rešenja jednačine $1 + z^8 = 0$ u prvom kvadrantu se nalaze dva:

$$z_1 = e^{\pi i/8} \quad \text{i} \quad z_2 = e^{3\pi i/8},$$

tako da je, za $R > 1$,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) \right).$$

Ostatak funkcije f u polu z_i dobija se iz

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) = \lim_{z\to z_i} \frac{z-z_i}{1+z^8} = \frac{1}{8z_i^7},$$

pa je

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} = \frac{\pi i}{4} \left(e^{-7\pi i/8} + e^{-5\pi i/8} \right) = (1-i)\frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\,. \tag{50}$$

S druge strane je

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} = \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} + \int_R^0 \frac{i\,\mathrm{d}y}{1+y^2}.$$

Kako je

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^8} = 0,$$

primenom JORDANove leme II zaključujemo da je

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8}\,\mathrm{d}z = 0,$$

tako da je

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8} + i\int_{+\infty}^0 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^8} = (1-i)I,$$

pa iz (50) zaključujemo da je

$$I = \frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

4.6.2 Kompleksne smene u integralima po realnoj promenljivoj

S obzirom da se tablice izvoda i integrala formalno ne razlikuju u realnom i kompleksnom domenu, prirodno se postavlja pitanje da li je moguće izračunati kompleksne integrale znajući njihove realne vrednosti. Posmatrajmo tri karakteristična primera:

1° Da li je ispravno u integralu

$$I_1 = \int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,\mathrm{d}x, \qquad a,b\in\mathbf{R}$$

uvesti smenu $(\alpha+i\beta)x = t$ i tako formalno dobiti da je

$$I_1 = \frac{1}{\alpha+i\beta}\int_{a\alpha+ia\beta}^{b\alpha+ib\beta} e^t\,\mathrm{d}t = \frac{e^{b\alpha+ib\beta}-e^{a\alpha+ia\beta}}{\alpha+i\beta}?$$

2° Znajući da je

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi},$$

možemo li u integralu

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2/2}\,\mathrm{d}x$$

uvesti smenu $x+iy=t$ i tako dobiti da je

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\ ?$$

3° Znajući da je

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(a), \qquad (a>0)$$

možemo li zaključiti da za proizvoljno $u\in\mathbf{C}$ važi

$$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-ux}x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{u^a}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{u^a}\Gamma(a),$$

pri čemu smo primenili smenu $ux=t$?

!

Teorema 4.7 daje potvrdan odgovor na pitanja tipa 1° i slična, za slučaj kada se integral može predstaviti kao integral regularne kompleksne funkcije kompleksne promenljive, jer u tom slučaju važi NEWTON-LEIBNIZova formula. U primeru 1° imamo da je

$$I_1 = \int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,\mathrm{d}x = \int_{z_1}^{z_2} e^{(\alpha+i\beta)z}\,\mathrm{d}z,$$

gde je $z_1 = a, z_2 = b$, jer integral regularne funkcije ne zavisi od puta integracije. Funkcija

$$F(z) = \frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)z}$$

je očigledno jedna primitivna funkcija za funkciju $z \mapsto e^{(\alpha+i\beta)z}$, tako da je $I_1 = F(b) - F(a)$, što je isti rezultat kao u 1°.

U slučajevima kao što su 2° i 3°, stvari su nešto komplikovanije.

Teorema 4.31 *Neka je f analitička funkcija u delu kompleksne ravni ograničenom x–osom i pravom $L : y = b$, za neko $b \in \mathbf{R}$, pri čemu u unutrašnjosti ove oblasti može imati konačno mnogo singulariteta $z_1, \dots, z_m$. Ako je $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \mathrm{Im}\, z \in I}} f(z) = 0$, gde je I segment čije su krajnje tačke 0 i b, tada je*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ib)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)\,.$$

Dokaz. Neka je C pravougaona kontura koju čine duži dobijene presecima pravih $y = 0$, $y = b$, $x = -R$, $x = R$. Pretpostavimo radi određenosti da je $b > 0$. Ako je R dovoljno veliko da kontura C obuhvati sve singularitete pomenute u formulaciji teoreme, na osnovu teoreme o ostacima imamo da je

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z),$$

S druge strane,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + i\int_0^b f(R+it)\,\mathrm{d}t - \int_{-R}^{R} f(x+ib)\,\mathrm{d}x - i\int_0^b f(-R+it)\,\mathrm{d}t\,.$$

Uslov $f(z) \to 0$ kad $z \to \infty$ u pojasu $0 \le \mathrm{Im}\, z \le b$ znači sledeće:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists K)(\forall t \in [0,b]) \quad R^2 + t^2 > K^2 \Rightarrow |f(\pm R + it)| < \varepsilon,$$

što onda implicira da je

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{0\le t\le b} |f(\pm R + it)| = 0.$$

Odavde se dobija:

$$\left| i\int_0^b f(\pm R+it)\,\mathrm{d}t \right| \le |b| \sup_{t\in I} |f(\pm R+it)| \to 0.$$

Prema tome,

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-R}^{R} f(x+ib)\,\mathrm{d}x\right) = 2\pi i\sum_{i=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z),$$

odakle sleduje tvrđenje koje je trebalo dokazati.

Primer 98. Funkcija $f(z) = e^{-z^2/2}$ je regularna u celoj kompleksnoj ravni i $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Na osnovu teoreme 4.31 zaključujemo da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,,$$

pa je odgovor na pitanje 2° potvrdan.

Ako se integrali u granicama od 0 do $+\infty$, na sličan način kao u dokazu teoreme 4.31, pokazuje se da je

$$\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x + i\int_0^y f(R+it)\,\mathrm{d}t - \int_0^R f(x+iy)\,\mathrm{d}x - i\int_0^y f(it)\,\mathrm{d}t = 0,$$

pa je, kada se pusti da $R\to+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} f(x+iy)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - i\int_0^y f(it)\,\mathrm{d}t,$$

odakle je

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x+iy)^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - i\int_0^y e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Interesantno je da se i ovaj rezultat može dobiti formalnom smenom promenljive $x+iy=t$, jer onda granice integracije postaju iy i $+\infty$, pa je $\int_{iy}^{+\infty} = \int_0^{+\infty} - \int_0^{iy}$.

Primer 99. Primenom Newton-Leibnizove formule dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-i)^2} = -\frac{1}{x-i}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Ovaj formalan rezultat može se lako opravdati integracijom po konturi koja je sastavljena od odsečka $[-R,R]$ x-ose i polukruga $z = Re^{it}$, $0\le t\le\pi$, kao i primenom Jordanove leme II (ostatak u polu $z=i$ je nula). Primetimo da teorema

4.31 ovde nije primenljiva, jer funkcija $z \mapsto 1/z^2$ nije regularna duž x-ose. Dakle, u ovom slučaju, smena promenljive $t = x - i$ dovodi do

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-i)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

što je pogrešno, jer integral sa desne strane ne postoji. Zapravo, ovde se radi o formalizmu koji je pogrešno primenjen. Ispravno bi bilo pisati da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-i)^2} = \int_{-\infty-i}^{+\infty-i} \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

i onda ispitati da li se u poslednjem integralu granice mogu zameniti sa $-\infty$, odnosno $+\infty$.

Kod integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2i)^2+1},$$

smena promenljive $x + 2i = t$ dovodi do pogrešnog rezultata:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2i)^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Isti rezultat se dobija i primenom „korektnijeg” postupka:

$$\int_{-\infty+2i}^{+\infty+2i} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty\,+\,2i}^{+\infty\,+\,2i} = \pi,$$

gde se može primeniti definicija funkcije arctg u kompleksnom domenu. Teorema 4.31, međutim, tvrdi da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2i)^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z).$$

Kako je

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right),$$

imamo da je

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2i}, \quad \text{odakle nalazimo da je}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2i)^2+1} = 0.$$

Teorema 4.32 *Neka je f analitička funkcija u delu kompleksne ravni ograničenom pozitivnim delom x-ose i polupravom L koja polazi iz koordinatnog početka i zatvara ugao α sa x-osom. Pretpostavimo da je funkcija f regularna na naznačenoj konturi osim možda u $z = 0$, pri čemu važi:*

$$(i) \quad \lim_{z\to 0} zf(z) = 0, \qquad (ii) \quad \lim_{z\to\infty} zf(z) = 0,$$

pri čemu je u oba slučaja dovoljno da se uzme samo granična vrednost po oblasti koja je ograničena pozitivnim delom x-ose i polupravom L. Tada je

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Posmatrajmo konturu kao na slici 59. Imamo da je

$$0 = \int_\varepsilon^R f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Slika 59.

Kada $\varepsilon \to 0$, prema JORDANovoj lemi I, zbog uslova (i) dobijamo

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0,$$

dok primenom JORDANove leme II, iz uslova (ii) nalazimo da

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{kada } R \to +\infty.$$

Odavde je

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \left(\int_\varepsilon^R f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z \right) = 0\,,$$

i teorema je dokazana.

Primer 100. Neka je $f(z) = e^{-z} z^{a-1}$, gde je $a > 0$. Ako je $a < 1$, funkcija f ima singularitet u koordinatnom početku, ali je, za svako θ,

$$|rf(re^{i\theta})| = r^a e^{-r\cos\theta} \le r^a e^r \to 0 \quad \text{kada } r \to 0,$$

dok je za $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $\theta \in [0, \alpha]$

$$|Rf(Re^{i\theta})| \le R^a e^{-R\cos\alpha} \to 0 \quad \text{kada } R \to +\infty.$$

Primenom dokazane teoreme zaključujemo da je

$$\int_L e^{-z} z^{a-1}\,\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \Gamma(a),$$

po svakoj polupravoj L koja polazi iz koordinatnog početka i prolazi kroz prvi ili četvrti kvadrant. Prema tome, odgovor na pitanje 3° je potvrdan ako je $\operatorname{Re} u > 0$. □

Pored navedenih, postoje brojni slučajevi različitih smena koje se opravdavaju na sličan način. Kao što smo videli u ovom odeljku, poznavanje realnih integrala može se iskoristiti za nalaženje kompleksnih. Pri tome, u slučaju regularne funkcije i konačnog intervala integracije, može se primeniti NEWTON-LEIBNIZova formula, dok je u slučaju beskonačnih granica potrebno opravdati postupak.

Glava 5

Fourierovi redovi

Razvoj periodičnog signala u harmonike je jedan od osnovnih metoda kojima se služe istraživači u oblasti elektrotehnike. Matematičari ovaj postupak nazivaju razvijanjem funkcije u FOURIER*ov red. Ovo je samo jedan poseban slučaj opšteg koncepta ortogonalnosti u* HILBERT*ovim prostorima, koji je takođe važan u primenama jer se iz njega dalje razvijaju posebne metode, kao što su, recimo,* talasići (wavelets)*. Ovu glavu stoga započinjemo sa izlaganjem o* HILBERT*ovim prostorima i ortogonalnim razvojima uopšte, a zatim posebno razmatramo slučaj trigonometrijskih redova.*

5.1 Ortogonalni razvoji u Hilbertovim prostorima

FOURIERovi redovi su deo opštijeg koncepta ortogonalnih razvoja koji počiva na pojmu skalarnog proizvoda. Ideja je da se skalarni proizvod dva vektora iz $\mathbf{R}^3$ uopšti na proizvoljne vektorske prostore.

5.1.1 Skalarni proizvod

Definicija 5.1 *Neka je H vektorski prostor nad poljem skalara F, gde je $F = \mathbf{R}$ ili $F = \mathbf{C}$. Neka je $\langle x, y\rangle$ funkcija $H \times H \mapsto F$ koja zadovoljava sledeće uslove:*

1° $\overline{\langle y, x\rangle} = \langle x, y\rangle$,

2° $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + \mu\langle x_2, y\rangle$,

3° $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$,

za svako $x, y \in H$ i za svako $\lambda, \mu \in F$, pri čemu $\overline{\langle y, x\rangle}$ znači konjugovano kompleksan broj od $\langle y, x\rangle$. Funkcija $\langle x, y\rangle$ zove se **skalarni proizvod**.

Kako je, prema uslovu 3°, $\langle x, x\rangle \geq 0$, može se definisati funkcija $x \mapsto \|x\|$ pomoću

(1) $$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad x \in H.$$

Da je $\|x\|$ zaista norma pokazaćemo kasnije (teorema 5.2).

Primer 101. 1° Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbf{R}^n$ i funkciju

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Nije teško proveriti da su uslovi definicije 5.1 ispunjeni. Norma je euklidska norma, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

2° Vektorski prostor $\mathbf{C}^n$ čine uređene n-torke kompleksnih brojeva. Ako je $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, gde su u_i i v_i kompleksni brojevi, skalarni proizvod definišemo sa

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i,$$

dok je norma data sa

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}.$$

Uslovi navedeni u definiciji 5.1 obezbeđuju strukturu bogatu osobinama, od kojih neke dajemo u sledećoj teoremi.

Teorema 5.1 *Neka je H vektorski prostor sa skalarnim proizvodom. Tada za svako $x, y \in H$ i za svako $\lambda \in F$ važi:*

(i) $\langle \lambda x, \mu y\rangle = \lambda\bar{\mu}\langle x, y\rangle$,

(ii) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$,

(iii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$,

(iv) $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

Dokaz. (i) Iz uslova 1° i 2° dobija se da je

$$\langle \lambda x, \mu y\rangle = \lambda\langle x, \mu y\rangle = \lambda\overline{\langle \mu y, x\rangle} = \lambda\bar{\mu}\overline{\langle y, x\rangle} = \lambda\bar{\mu}\langle x, y\rangle.$$

(ii) Prema osobini (i), imamo da je

$$\langle x, 0\rangle = \langle x, 0 - 0\rangle = \langle x, 0\rangle - \langle x, 0\rangle = 0.$$

(iii) Primenom jednakosti (1) i osobina skalarnog proizvoda, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

(iv) Ako je $\langle x, y\rangle = 0$, nejednakost je tačna zbog pozitivnosti norme. Pretpostavimo da je $x \ne 0$ i $y \ne 0$ i razmotrimo najpre slučaj kada je $\|x\| = \|y\| = 1$. U ovom slučaju nejednakost (iii) svodi se na $|\langle x, y\rangle| \le 1$. Neka je $c \in F$ proizvoljni skalar. Tada je

$$0 \le \langle cx - y, cx - y\rangle = |c|^2 \cdot \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\, c\langle x, y\rangle,$$

odakle se, zbog $\|x\| = \|y\| = 1$ dobija da je

$$2\mathrm{Re}\, c\langle x, y\rangle \le |c|^2 + 1.$$

Poslednja nejednakost važi za proizvoljno c. Ako stavimo da je $c = |\langle x, y\rangle|/\langle x, y\rangle$, tada je $|c| = 1$ i izlazi da je

$$2|\langle x, y\rangle| \le 2,$$

odakle se dobija tražena nejednakost. U opštem slučaju, za proizvoljne $x, y \ne 0$, stavimo da je $x' = x/\|x\|$ i $y' = y/\|y\|$. Tada je $\|x'\| = \|y'\| = 1$ i prema dokazanoj nejednakosti za taj slučaj imamo da je

$$|\langle x', y'\rangle| \le 1, \quad \text{odnosno} \quad \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1,$$

što je, zbog $x, y \neq 0$, ekvivalentno sa nejednakosti koju je trebalo dokazati.

Primedba. 1° Ako je $\langle x, y\rangle = 0$, kažemo da su x i y **ortogonalni**. Prema (ii) teoreme 5.1, nula je ortogonalna sa svakim elementom iz H. Nije teško videti da nijedan element $x \neq 0$ nema tu osobinu.

2° Osobina (iv) iz teoreme 5.1 poznata je pod nazivom CAUCHY-SCHWARZova nejednakost. Ona se često koristi u ekvivalentnom obliku

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Primer 102. CAUCHY-SCHWARZova nejednakost u prostoru $\mathbf{C}^n$ uvedenom u primeru 101 glasi:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2,$$

gde su $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$ proizvoljni kompleksni brojevi.

Teorema 5.2 *Neka je H vektorski prostor sa skalarnim proizvodom i neka je funkcija $x \mapsto \|x\|$ definisana sa (1). Tada je $\|x\|$ norma na H, tj. za svako $x, y \in H$ i za svako $\lambda \in F$ važi da je*

1° $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$

2° $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$

3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(nejednakost trougla).*

Dokaz. Iz definicije skalarnog proizvoda imamo da je

$$\|x\| \geq 0, \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

Dalje, iz dela (i) teoreme 5.1 dobijamo da je

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \cdot \|x\|^2} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Najzad, kako je za svako $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$, iz (iii) i (iv) teoreme 5.1 nalazimo da je

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,\end{aligned}$$

odakle se korenovanjem dobija nejednakost trougla.

Primer 103. Označimo sa $L_2[a, b]$ vektorski prostor svih kompleksnih funkcija f realne promenljive $t \in [a, b]$, čiji je modul kvadratno integrabilan, tj.

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{2}$$

Definišimo
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Ovako definisan skalarni proizvod zadovoljava prva dva uslova definicije 5.1. Treći uslov nije uvek zadovoljen, jer je moguće da bude $\|f\| = 0$ a da je $f \neq 0$. Na primer, ako je $a = -1, b = 1$ i ako je $f(x) = 0$ za $x \neq 0$ i $f(0) = 1$, tada $f \neq 0$ (tj. f nije identički jednaka nuli), ali je $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Stoga se prostor $L_2[a, b]$ definiše tako da podrazumevamo da su funkcije f i g jednake ukoliko je $\|f - g\| = 0$. Striktno govoreći, elementi prostora $L_2[a, b]$ su klase ekvivalencije u odnosu na relaciju ekvivalencije definisanu pomoću
$$f \sim g \iff \|f - g\| = 0.$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost ovde glasi
$$\left|\int_a^b f(t)\bar{g}(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$
Nejednakost (3) implicira da je skalarni proizvod konačan za svake dve funkcije iz $L_2[a, b]$, tj. za svake dve funkcije čija je norma konačna.

Često se umesto kompleksnih funkcija na $[a, b]$ posmatraju samo realne kvadratno integrabilne funkcije; odgovarajući prostor se takođe označava sa $L_2[a, b]$. Skalarni proizvod u ovom slučaju je
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Nije teško videti da je u realnom slučaju skalarni proizvod simetrična funkcija: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

Primedba. Mi smo, polazeći od skalarnog proizvoda, definisali normu kao $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$. Ako je ova jednakost ispunjena za svako $x \in H$, kažemo da su norma i skalarni proizvod saglasni. Obrnut postupak, tj. definisanje skalarnog proizvoda koji bi bio saglasan sa postojećom normom nije uvek moguć. Pokazuje se da je potreban i dovoljan uslov da bi se skalarni proizvod mogao definisati dat sa:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{za svako } x, y \in H \tag{4}$$
i u tom slučaju skalarni proizvod se definiše sa
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|)^2. \tag{5}$$
Iz (5) za $x = y$ dobijamo da je $\|x\|^2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Primer 104. Sa $C[a,b]$ označavamo vektorski prostor svih neprekidnih realnih funkcija definisanih na segmentu $[a,b]$, sa normom

$$\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

ili sa normom

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Nijedna od ove dve norme ne zadovoljava uslov (4), pa se u $C[a,b]$ ne može uvesti skalarni proizvod koji bi bio saglasan sa nekom od ovih normi. Međutim, kako je svaka neprekidna funkcija kvadratno integrabilna, imamo da je $C[a,b] \subset L_2[a,b]$, tako da se ovde mogu uvesti norma i skalarni proizvod kao u primeru 103.

Sa $L_p[a,b]$ označava se vektorski prostor realnih ili kompleksnih funkcija definisanih na $[a,b]$ za koje je

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^p < +\infty.$$

Za svako $p > 0$ ovo je norma (ako se usvoji da je $f = g$ ako je $\|f - g\|_p = 0$); međutim, jedino se za $p = 2$ može definisati skalarni proizvod koji je saglasan sa normom. $\square$

Skalarni proizvod je ustvari kompleksna (ili realna, zavisno od toga šta je polje skalara F) funkcija dve promenljive iz H. Iz CAUCHY-SCHWARZove nejednakosti jednostavno izlazi da je ova funkcija neprekidna u odnosu na normu. Naime, ako su $x_0, y_0, x, y \in H$, uz oznake $\Delta x = x - x_0$ i $\Delta y = y - y_0$ imamo da je

$$\begin{aligned}
(6)\qquad |\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| &= |\langle x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \\
&= |\langle x_0,\Delta y\rangle + \langle \Delta x, y_0\rangle + \langle \Delta x,\Delta y\rangle| \\
&\le |\langle x_0,\Delta y\rangle| + |\langle \Delta x, y_0\rangle| + |\langle \Delta x,\Delta y\rangle| \\
(7)\qquad &\le \|x_0\|\cdot\|\Delta y\| + \|y_0\|\cdot\|\Delta x\| + \|\Delta x\|\cdot\|\Delta y\|.
\end{aligned}$$

Kad $x \to x_0$ i $y \to y_0$, onda $\|\Delta x\| \to 0$ i $\|\Delta y\| \to 0$, pa se iz nejednakosti (6) dobija da $|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \to 0$, odnosno da važi sledeća teorema.

Teorema 5.3 *U vektorskom prostoru H sa skalarnim proizvodom $\langle x,y\rangle$ i normom $\|x\| = \sqrt{\langle x,y\rangle}$, funkcija $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ je neprekidna.*

Teorema 5.4 Besselova nejednakost. *Neka je $\{e_i\}$ jedan ortonormiran skup vektorskog prostora H u kome je definisan skalarnim proizvod. Tada za svako $n \in \mathbf{N}$ važi da je*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Dokaz. Za fiksirano $x \in H$ i $n \in \mathbf{N}$, definišimo $x_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Kako je $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ za $i \neq j$ i $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

S druge strane,

$$\langle x, x_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

tako da zaključujemo da je za svako $n \in \mathbf{N}$,

$$\langle x, x_n \rangle = \|x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2. \tag{8}$$

Stoga je

$$0 \leq \|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\, \langle x, x_n \rangle = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\|x_n\|^2 = \|x\|^2 - \|x_n\|^2,$$

odakle je $\|x_n\|^2 \leq \|x\|^2$, pa se s obzirom na (8) dobija traženo tvrđenje.

5.1.2 Hilbertovi prostori i ortogonalnost

Potsetimo se da za normirani prostor kažemo da je kompletan ako u njemu svaki CAUCHYjev niz konvergira. U ovom odeljku posmatramo kompletne normirane prostore sa skalarnim proizvodom.

Definicija 5.2 *Neka je u vektorskom prostoru H definisan skalarni proizvod $\langle x, y\rangle$ i norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Ako je H kompletan normirani prostor, H se zove* **Hilbertov prostor**.

Neka je $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ konačan ili beskonačan skup međusobno različitih elemenata iz HILBERT*ovog prostora H.*

Ako za skup E važi

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0, \qquad (i \neq j),$$

onda kažemo da je E **ortogonalan** *skup.*

Ako je E takav skup da je

$$\langle e_i, e_i\rangle = 1, \qquad \langle e_i, e_j\rangle = 0, \quad (i \neq j),$$

kažemo da je E **ortonormiran skup**.

Ako za ortonormiran skup E važi još i

$$(\forall e_i \in E)(\langle x, e_i\rangle = 0) \iff x = 0,$$

onda kažemo da je E **potpun ortonormiran skup** *ili* **ortonormirana baza** HILBERT*ovog prostora H. Drugim rečima, E je ortonormirana baza ako je jedino nula ortogonalna na svim elementima iz E.*

Primer 105. 1° Vektorski prostor $\mathbf{R}^3$ je prototip HILBERTovog konačno-dimenzionalnog prostora. Neka su $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jedinični koordinatni vektori. Skup $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ je jedan ortonormiran skup, jer je $\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}\rangle = \langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}\rangle = 1$. Međutim, ovo nije ortonormirana baza, jer, na primer, za vektor $\boldsymbol{x} = (0, 0, 3)$ važi da je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{i}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{j}\rangle = 0$, ali $\boldsymbol{x} \neq 0$. U prostoru $\mathbf{R}^3$, jednu ortonormiranu bazu čini skup od tri vektora $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Ovo nije jedina mogućnost: kao što je iz analitičke geometrije poznato, svaka tri jedinična vektora koja su međusobno ortogonalna, čine jednu ortonormiranu bazu za $\mathbf{R}^3$. Analogno se definiše ortonormirana baza u $\mathbf{R}^n$ ili u $\mathbf{C}^n$; to je skup od n vektora

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0),\ \ldots\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Kao što znamo, svi ovi prostori su kompletni.

2° Neka je l_2 vektorski prostor čije „tačke” čine kompleksni nizovi $z = \{z_n\}$ takvi da je $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^2 < +\infty$. Skalarni proizvod i norma se definišu sa

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \bar{v}_n, \quad \|z\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^2}.$$

Može se pokazati da je i ovo jedan HILBERTov prostor. Neka je e_n čiji je n-ti član jednak 1, a svi ostali su nule. Na primer, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, $e_3 =$

$(0,0,1,0,0,\ldots)$ itd. Tada beskonačan skup $\{e_1, e_2, \ldots\}$ čini jednu ortonormiranu bazu HILBERTovog prostora l_2. Dokaze ovih tvrđenja izostavljamo, jer prevazilaze nivo složenosti ovog teksta.

Primer 106. Od suštinske važnosti za dalje izlaganje je HILBERTov prostor $L_2[-\pi,\pi]$, sa skupom funkcija

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Jednostavno je videti da je

$$\|e_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e_n(t)\bar{e}_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-int}\,\mathrm{d}t = 1,$$

kao i da je, za $m \neq n$,

$$\langle e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Prema tome, skup funkcija $\{e_i \mid i = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ je ortonormiran. Pokazuje se da je ovaj skup i potpun, ali dokaz nije jednostavan. Uglavnom, važna je činjenica da pomenuti skup čini jednu ortonormiranu bazu HILBERTovog prostora $L_2[-\pi,\pi]$.

Teorema 5.5 Ortogonalni razvoj. *U HILBERTovom prostoru H sa ortonormiranom bazom $\{e_i\}$ za svako $x \in H$ važi da je*

$$x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \tag{9}$$

što se može predstaviti i u obliku razvoja

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i\rangle e_i. \tag{10}$$

Dokaz. Kao u dokazu BESSELove nejednakosti, definišimo $x_n = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$. Pokazaćemo da je niz $\{x_n\}$ CAUCHYjev, a time i konvergentan (jer je po pretpostavci H kompletan prostor). Bez teškoća se pokazuje da je

$$\|x_{n+k} - x_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} |\langle x, e_i\rangle|^2. \tag{11}$$

Kako su, prema BESSELovoj nejednakosti, parcijalne sume pozitivnog reda $\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ ograničene, on je konvergentan, pa njegov ostatak posle n-tog člana teži nuli kad $n \to +\infty$. Stoga iz (11) dobijamo da je

$$\|x_{n+k} - x_n\|^2 \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

što znači da je niz $\{x_n\}$ CAUCHYjev. Dakle, postoji $y \in H$ za koje je

$$y = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Sada ćemo pokazati da je $x = y$, čime će teorema biti dokazana. Kako je za svako i, n,

$$\langle x_n, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle,$$

iz neprekidnosti skalarnog proizvoda zaključujemo da je i

$$\langle y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle,$$

odnosno, da je

$$\langle y - x, e_i\rangle = 0 \quad \text{za svako } i = 1, 2, \ldots$$

Kako je po pretpostavci $\{e_i\}$ potpun ortonormiran sistem, iz ovoga sleduje da je $y = x$.

Primedba. Kao što je rečeno u primeru 103, jednakost dve funkcije u prostoru $L_2[a, b]$ znači samo da je norma njihove razlike jednaka nuli. Ta činjenica znatno umanjuje praktični značaj značaj relacije (10), jer ova relacija u $L_2[a, b]$ znači samo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\| = 0,$$

gde je x funkcija iz $L_2[a, b]$. U praktičnim primenama od značaja je konvergencija tačka po tačka, tj. jednakost

$$x(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i\rangle e_i(t), \qquad t \in [a, b]. \tag{12}$$

Ispostavlja se da je za (12) potrebno postaviti još neke dodatne uslove osim da je modul funkcije kvadratno integrabilan. Ovo će biti tema sledećeg odeljka.

Teorema 5.6 Parsevalova jednakost. *U HILBERTovom prostoru H sa ortonormiranom bazom $\{e_i\}$ za svako $x \in H$ važi jednakost*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2 \tag{13}$$

Dokaz. Prema teoremi 5.5,

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n, \quad \text{gde je} \quad x_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

To znači da je

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = 0,$$

odnosno, koristeći jednakosti (8),

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\|^2 = \lim_{n\to+\infty} (\|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x, x_n\rangle) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (\|x\|^2 - \|x_n\|^2) = \|x\|^2 - \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2,\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

5.2 Fourierovi redovi

5.2.1 Definicija Fourierovog reda i njegova konvergencija

Fourierov red i Fourierovi koeficijenti

U prostoru $L_2[-\pi, \pi]$, kao što smo videli u primeru 106, ortonormiranu bazu čine funkcije $e_n(t) = (1/\sqrt{2\pi})e^{int}$ za $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Neka je

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{14}$$

Posmatrajmo funkcionalni red

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \tag{15}$$

gde su koeficijenti c_n definisani sa (14). Red (15) nazivamo **Fourierovim redom** funkcije f na segmentu $[-\pi, \pi]$, a koeficijente c_n nazivamo **Fourierovim koeficijentima**. Prema teoremi 5.5, ovaj red konvergira ka funkciji f po normi u prostoru $L_2[-\pi, \pi]$, što samo znači (videti primedbu na strani 201) da je

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{i=-n}^{n} c_n e^{int} \right|^2 \mathrm{d}t = 0. \tag{16}$$

Od interesa je poznavati uslove pod kojima važi razvoj

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \tag{17}$$

u svakoj tački t, kao i uslove pod kojima Fourierov red uniformno konvergira ka funkciji f.

Periodično produženje

Primetimo da je suma reda sa desne strane u (17) periodična funkcija sa periodom 2π. To znači da ako (17) važi na segmentu $(-\pi, \pi]$, onda ova jednakost važi i za svako $\mathbf{R}$ pod uslovom da se funkcija f **periodično produži** na $\mathbf{R}$. Dva primera takvog produženja data su na slici 60. Ako je funkcija f neprekidna na $(-\pi, \pi]$, njeno periodično produženje na $\mathbf{R}$ biće neprekidna funkcija ako i samo ako je $\lim_{t\to-\pi_+} f(t) = f(\pi)$; u suprotnom slučaju produžena funkcija će imati prekide u tačkama $(2k+1)\pi$. Na primer, funkcija $t \mapsto e^t$ je neprekidna, ali njeno periodično produženje sa $(-\pi, \pi]$ na $\mathbf{R}$ ima prekide u svim tačkama oblika $(2k+1)\pi$, jer je $e^{-\pi} \neq e^{\pi}$. U nastavku, pod funkcijom podrazumevamo njeno periodično produženje sa intervala $(-\pi, \pi]$ na $(-\infty, +\infty)$.

Slika 60. Periodično produženje neprekidne funkcije u slučajevima kada je a) $f(-\pi_+) = f(\pi)$; b) $f(-\pi_+) \neq f(\pi)$. (sperpro)

Napomenimo da je izbor intervala $(-\pi, \pi]$ stvar dogovora; umesto toga može se uzeti proizvoljan segment dužine 2π, na primer $(0, 2\pi]$. Isto tako, svejedno je da li posmatramo funkcije na $(-\pi, \pi]$ ili na $[-\pi, \pi)$.

Konvergencija Fourierovog razvoja

Sledeća teorema, čiji dokaz izostavljamo, daje dovoljne uslove pod kojima jednakost (17) važi u svakoj tački. Podsetimo se da su funkcije o kojima se ovde govori u opštem slučaju kompleksne funkcije realnog argumenta, tako da je

$$f(t) = u(t) + iv(t), \qquad f'(t) = u'(t) + iv'(t), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Teorema 5.7 *(i) Ako je funkcija f neprekidna u tački a i ima konačan levi i desni izvod u toj tački, onda* FOURIER*ov red funkcije f u tački $t = a$ konvergira ka $f(a)$, odnosno važi jednakost (17) za $t = a$.*

(ii) Ako funkcija f u tački a ima prekid prve vrste i ako postoje konačne granične vrednosti

$$\lim_{t\to a_-} f'(t) \quad \text{i} \quad \lim_{t\to a_+} f'(t),$$

onda FOURIER*ov red u tački a konvergira ka vrednosti* $(f(a_-)+f(a_+))/2$, *tj, važi jednakost*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{f(a_-)+f(a_+)}{2}.$$

U primenama se uglavnom pojavljuju funkcije f koje su svuda neprekidne i diferencijabilne osim u komačno mnogo tačaka u kojima f ili f' imaju izolovane prekide prve vrste. Takve su sve funkcije čiji se grafik može nacrtati. Formalna definicija je slična definiciji glatke krive.

Definicija 5.3 *Za funkciju f definisanu na nekom intervalu $I=(a,b]$ kažemo da je* **deo po deo neprekidna** *ako postoji podela intervala I tačkama $a=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$, tako da je funkcija f neprekidna na svakom otvorenom intervalu (a_{i-1},a_i) i u svakoj tački a_i $(1\le i\le n-1)$ postoje konačne granične vrednosti $f(a_{i-})$ i $f(a_{i+})$, dok u tačkama a i b postoje $f(a_+)$ i $f(b_-)$ respektivno. Za funkciju kažemo da je* **deo po deo diferencijabilna** *ako je deo po deo neprekidna i ako je njen izvod f' deo po deo neprekidan. Za funkciju sa periodom 2π kažemo da je deo po deo neprekidna (ili diferencijabilna) ako je deo po deo neprekidna (diferencijabilna) na $(-\pi,\pi]$.*

Iz teoreme 5.7 dobija se sledeće jednostavno pravilo.

Teorema 5.8 *Ako je funkcija f periodična sa periodom 2π i deo po deo diferencijabilna, onda u svakoj tački $t\in\mathbf{R}$ važi da je*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{f(t_-)+f(t_+)}{2},$$

gde su c_n $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ FOURIER*ovi koeficijenti funkcije f.*

Primer 107. Neka je $f(t)=e^{iat}$, gde je $a\in C$, $a\notin\mathbf{Z}$. FOURIERovi koeficijenti ove funkcije su

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iat}e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i(a-n)\pi}(e^{(a-n)\pi i}-e^{-(a-n)\pi i}) = \frac{\sin(a-n)\pi}{(a-n)\pi} \end{aligned}$$

Kako je na intervalu $(-\pi,\pi)$ data funkcija neprekidna, imamo da je

$$e^{iat} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a-n)\pi}{(a-n)\pi} e^{int}, \qquad -\pi<t<\pi.$$

Grupisanjem simetričnih članova sa istim $|n|$, dobijamo, posle sređivanja:

$$e^{iat} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(a\cos nt + in\sin nt)}{a^2 - n^2}\right). \tag{18}$$

U tački $t = \pi$, funkcija koja se dobija kao periodično produženje date funkcije ima prekid prve vrste: $f(\pi_-) = e^{ia\pi}$, $f(\pi_+) = e^{-ia\pi}$, tako da je

$$\frac{f(\pi_-) + f(\pi_+)}{2} = \cos a\pi$$

i iz desne strane razvoja (18) za $t = \pi$ dobijamo da je

$$\cos a\pi = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2 - n^2}\right).$$

Parsevalova jednakost

Kako je $c_n = \langle f, e_n\rangle/\sqrt{2\pi}$, teorema 5.6 primenjena u HILBERTovom prostoru $L_2[-\pi,\pi]$ daje

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Veza izmedju Fourierovog i Laurentovog razvoja

FOURIERovi razvoji imaju veliki teorijski i praktičan značaj. Njihovom primenom se veoma složene funkcije mogu **aproksimirati** jednostavnim trigonometrijskim funkcijama. Ideja je slična kao kod TAYLORovih razvoja, gde se funkcija aproksimira polinomom, ili LAURENTovih razvoja, gde se dobija aproksimacija racionalnom funkcijom. U stvari, FOURIERov razvoj se može dobiti iz LAURENTovog razvoja na sledeći način. Neka je $z \mapsto g(z)$ regularna funkcija u oblasti $0 < |z| < R$, gde je $R > 1$. Tada, kao što znamo iz Kompleksne analize, važi LAURENTov razvoj po stepenima z:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{g(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Ako se ovde stavi da je $z = e^{it}$ i $g(z) = f(t)$, onda je $z^n = e^{int}$, dok se za koeficijente c_n dobija

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-(n+1)t}ie^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t.$$!

Prema tome, FOURIERov razvoj funkcije $t \mapsto f(t)$ je ustvari LAURENTov razvoj funkcije $z \mapsto g(z)$ u okolini nule, pri čemu je $z = e^{it}$ i $g(z) = f(t)$. Međutim, ova veza važi samo za slučaj kada se $f(t)$ može predstaviti kao regularna funkcija $g(z)$, tako da FOURIERov razvoj ima širu oblast primene, jer se regularnost ne zahteva.

Na primer, za funkciju $f(t) = e^{iat}$, čiji smo FOURIERov red našli u primeru 107, odgovarajuća funkcija g je $g(z) = z^a$ $(z = e^{it})$; međutim, ova funkcija za $a \notin \mathbf{Z}$ nije regularna oko nule, tako da se ne može razviti u LAURENTov red.

Značaj Fourierovih razvoja u elektrotehnici

U elektrotehnici predstavljanje funkcije pomoću FOURIERovog razvoja ima značajnu ulogu u analizi i sintezi periodičnih signala bilo kakve prirode. U matematici je polinom najjednostavnija funkcija, jer se njeno izračunavanje svodi na osnovne računske operacije. Ulogu polinoma u matematici, u elektrotehnici imaju funkcije e^{int}, odnosno trigonometrijske funkcije $\cos nt$ i $\sin nt$, kao i uopšte $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$, za proizvoljno $\omega \in \mathbf{R}$. Njihovo generisanje i reprodukovanje je u elektrotehnici izuzetno jednostavno, jer se dobijaju kao talasni oblici naizmeničnih struja frekvencije ω u vremenu t. Teorija FOURIERovih razvoja nas uverava da se svaki periodični signal periode $T = 2\pi$ (čija je vremenska trajektorija deo po deo diferencijabilna, a takvi su svi signali koji se fizički mogu realizovati) može prikazati kao zbir beskonačnog reda trigonometrijskih funkcija čije su periode $+\infty, T, T/2, T/3, T/4$ itd. Jednostavnom smenom promenljive može se videti da isto važi za proizvoljno T. Funkcije koje efektivno učestvuju u FOURIERovom razvoju (sa koeficijentom koji nije nula) zovu se **harmonici**. S obzirom na Parsevalovu jednakost (19), red $\sum |c_n|^2$ je konvergentan, što znači da ostatak posle n-tog člana teži nuli kad $n \to +\infty$ pa amplituda harmonika $(|c_n|)$ teži nuli. U praksi je dovoljno nekoliko harmonika da bi se dobro aproksimirao dati periodični signal (videti primer **??**). Ove činjenice su razlog što je tehnika FOURIERovih razvoja i FOURIERove transformacije (koju ćemo izučavati kasnije u ovom tekstu) neizostavno oruđe svakoga ko se bavi elektrotehnikom.

5.2.2 Fourierov red u trigonometrijskom obliku

Fourierovi koeficijenti u trigonometrijskom obliku

Kompaktan zapis FOURIERovog reda u obliku $\sum c_n e^{int}$ se često zamenjuje sumom po trigonometrijskim funkcijama, pri čemu se dobija red bez negativnih indeksa, što daje pregledniju predstavu o ponašanju funkcije f, pogotovu ukoliko je f realna funkcija. U primeru 107 smo pretvorili kompleksan oblik FOURIERovog reda u trigonometrijski. U opštem slučaju imamo da je

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\cos nt + i \sin nt) + c_{-n}(\cos nt - i \sin nt) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_{-n}) \cos nt + i(c_n - c_{-n}) \sin nt.\end{aligned}$$

Uvedimo oznake:

$$A_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$A_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(e^{int} + e^{-int}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(e^{int} - e^{-int}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Koeficijenti A_n i B_n se takođe nazivaju FOURIERovim koeficijentima funkcije f. Ukoliko je f realna funkcija, onda su i ovi koeficijenti realni, što je dodatna prednost trigonometrijskog oblika. FOURIERov razvoj u trigonometrijskom obliku glasi

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

i važi pod uslovima teoreme 5.7.

Pretpostavimo sada da je f realna funkcija. Ako se koeficijenti c_n izraze pomoću A_n i B_n, dobija se

$$c_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2}, \quad c_n = \frac{A_n - iB_n}{2},$$

odnosno, s obzirom da su A_n i B_n realni,

$$|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{A^2 + B^2}{4}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Sada iz (19) dobijamo PARSEVALovu jednakost za realnu funkciju:

$$2A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n^2 + B_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Primer 108. FOURIERove koeficijente je obično lakše izračunati u kompleksnom obliku, jer to zahteva izračunavanje samo jednog integrala. Iz kompleksnog oblika mogu se, kao što smo naveli, dobiti koeficijenti u trigonometrijskom obliku, ako nam je to potrebno. Posmatrajmo na primer razvoj funkcije $f(t) = t$, tj. periodičnog produv zenja ove funkcije sa $(-\pi, \pi]$ na $\mathbf{R}$. Za ovu funkciju je

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} (-1)^n \frac{i}{n}, & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

Odavde je

$$A_0 = c_0 = 0, \quad A_n = c_n + c_{-n} = 0, \quad B_n = i(c_n - c_{-n}) = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}, \ n \geq 1.$$

Prema tome, imamo da je

$$t = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nt}{n} \qquad (-\pi < t < \pi).$$

Primer 109. U ovom primeru ilustrovaćemo primenu FOURIERovih razvoja u aproksimaciji funkcija. Ideja: periodična funkcija koja se na $(-\pi, \pi)$ dobro aproksimira sa nekoliko harmonika. Uzeti upravo prethodni primer: zupčasta funkcija koja se dobija kao periodično produženje od x i nekoliko sinusoida preko nje.

Razvoji parnih i neparnih funkcija

Pretpostavimo da je funkcija f periodična sa periodom 2π i da je parna, odnosno da je $f(-t) = f(t)$. U tom slučaju je funkcija $t \mapsto f(t)\sin nt$ neparna za svako n, tako da je njen integral u simetričnim granicama jednak nuli. Prema tome, FOURIERov razvoj parne funkcije sadrži samo kosinusni deo. Analogno tome, FOURIERov razvoj neparne funkcije sadrži samo sinusni deo. Osim toga, lako je videti da je periodično produženje neprekidne parne funkcije neprekidna funkcija na $\mathbf{R}$, jer je $f(-\pi) = f(\pi)$. S druge strane, ako je f neparna i neprekidna, njeno periodično produženje ima prekide u tačkama $(2k+1)\pi$, osim u slučaju kada je $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Dakle, FOURIERov razvoj neprekidne i parne funkcije f konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački segmenta $[-\pi, \pi]$, dok FOURIERov razvoj neprekidne neparne funkcije f konvergira ka $f(x)$ samo za $x \in (-\pi, \pi)$, osim ako je $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Formule za koeficijente razvoja mogu se, koristeći se osobinama integrala i parnošću funkcija, napisati u sledećem obliku.

Parna funkcija:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t, \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,\ (n \geq 1) \qquad B_n = 0\ (n \geq 1).$$

Neparna funkcija:

$$A_n = 0\ (n \geq 0), \quad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t,\ (n \geq 1).$$

Primer 110. Nađimo FOURIERov razvoj funkcije $f(t) = t^2$ na $[-\pi, \pi]$. Data funkcija je parna, tako da razvoj sadrži samo kosinuse. Koeficijenti u razvoju su:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}, \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2\cos nt\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{4}{n^2}\ (n \geq 1).$$

Prema tome, za svako $t \in [-\pi, \pi]$ važi razvoj

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{n^2}. \tag{21}$$

Primer 111. Interesantno je da se primenom Fourierovih razvoja mogu sumirati redovi čiju bi sumu ponekad bilo nemoguće naći na drugi način.

Na primer, ako se u razvoju (21) stavi da je $t = \pi$, dobija se da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Na sličan način se mogu izračunati i sume redova oblika $\sum 1/n^k$, gde je $k \geq 2$ prirodan broj. !

Parsevalova jednakost (20) je takođe izvor raznih sumacionih formula.

Razvoji na segmentu $[0, \pi]$

Ako je funkcija f zadata samo na segmentu $[0, \pi]$, prethodni razvoji ostaju u važnosti ako se primene na funkciju g definisanu na segmentu $[0, \pi]$ kao $g(t) = f(t)$ i na segmentu $[-\pi, 0]$ proizvoljno. Razvoji funkcija f i g se onda poklapaju na segmentu $[0, \pi]$, gde se i funkcije poklapaju. Zahvaljujući proizvoljnosti u definisanju funkcije g na segmentu $[-\pi, 0]$, postoje tri u principu različita razvoja koja se ovako mogu dobiti. To su:

- razvoj koji sadrži samo kosinuse (ako je g parna funkcija),
- razvoj koji sadrži samo sinuse (ako je g neparna),
- razvoj koji sadrži i sinuse i kosinuse (ako g nije ni parna ni neparna).

Slika 61. Tri načina produženja funkcije f sa $[0, \pi]$ na $[-\pi, \pi]$: produžena funkcija može biti a) parna; b) neparna; c) ni parna ni neparna. (sparnep)

Primer 112. U primeru 108 našli smo Fourierov razvoj funkcije $f(t) = t$ na segmentu $[-\pi, \pi]$; kako je ovo neparna funkcija, razvoj sadrži samo sinuse. Međutim, na segmentu $[0, \pi]$, ova funkcija se može razviti i u red po kosinusima. Neka je $g(t) = |t|$, $t \in [-\pi, \pi]$. Ovo je parna funkcija, tako da Fourierov razvoj sadrži samo kosinuse:

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2}.$$

Kako je $g(t) = t$ za $t \in [0, \pi]$, ovo je razvoj funkcije $f(t) = t$ na segmentu $[0, \pi]$.

Razvoji na segmentu $[-l, l]$

Segment $[-\pi, \pi]$ (ili bilo koji segment dužine 2π) je prirodan zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija. Za funkciju koja je periodična sa periodom T, prirodno je da se posmatra segment $[-l, l]$, gde je $l = T/2$. Jednostavnom smenom promenljive $t = \pi\tau/l$, gde $t \in [-\pi, \pi]$, $\tau \in [-l, l]$, u integralnim formulama koje smo izveli za segment $[-\pi, \pi]$, dobijaju se formule za segment $[-l, l]$. Radi kompletnosti, ovde ih navodimo neke od formula.

Fourierov razvoj na segmentu $[-l, l]$**:**

- Ortonormirana baza u $L_2[-l, l]$:

5.2.3 Ne znam dobar naslov

Uniformna konvergencija Fourierovog reda

Aproksimacija funkcije trigonometrijskim polinomima

Ponašanje koeficijenata Fourierovog reda u zavisnosti od glatkosti funkcije

Glava 6

Fourierova i Laplaceova transformacija

Transformacije iz "vremenskog" u "frekventni" domen olakšavaju posao mnogim primenjenim matematičarima. Diferencijalne jednačine se pretvaraju u algebarske, konvolucije postaju proizvodi, itd. Cena koju plaćamo jednostavnosti nije velika: treba samo naći transformaciju i njoj inverznu.

6.1 Laplaceova transformacija

6.1.1 Definicija i egzistencija Laplaceove transformacije

Opšta ideja kod LAPLACEove i ostalih sličnih transformacija je da se za funkciju f realne promenljive t definiše funkcija kompleksne promenljive s pomoću integrala

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t) f(t)\, \mathrm{d}t,$$

gde je K data funkcija promenljivih s i t (tzv. integralno jezgro). Funkcija f se naziva **originalom**, a njoj odgovarajuća funkcija F se zove **slika**. Transformacija je određena izborom funkcije K. U primenama se t obično interpretira kao vreme, pa se kaže da se funkcija f transformiše iz vremenskog u kompleksan domen. U nekim transformacijama se za domen uzima samo imaginarna osa, $s = i\omega$, $\omega \in \mathbf{R}$, što se u obradi signala interpretira kao frekvencija, a za transformaciju se onda kaže da preslikava funkciju f iz vremenskog u frekventni domen.

Definicija 6.1 LAPLACEova *transformacija funkcije* $t \mapsto f(t)$ *je funkcija* $s \mapsto F(s)$ *definisana sa*

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad s \in \mathbf{C}. \tag{1}$$

Ako je F LAPLACEova transformacija funkcije f, koristimo oznaku $F = \mathcal{L}(f)$ ili manje preciznu, ali informativniju notaciju $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Nesvojstveni integral u (1) može da konvergira ili da divergira, zavisno of funkcije f. Skup kompleksnih brojeva s za koje ovaj integral konvergira zove se **oblast konvergencije** LAPLACEove transformacije.

Primer 113. 1° Ako je $f(t) = e^{-t^2}$, tada je (sa $s = a + ib$):

$$|e^{-st} f(t)| = |e^{-ibt} \cdot e^{-at-t^2}| = e^{-(t+a/2)^2} \cdot e^{a^2/4}.$$

Kako je funkcija $t \mapsto e^{-(t+a/2)^2}$ integrabilna na $(0, +\infty)$ za svako $a \in \mathbf{R}$, zaključujemo da integral (1) postoji za svako $s \in \mathbf{C}$.

2° Za funkciju $f(t) = e^t$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} F(a+ib) &= \int_0^{+\infty} e^{-(a-1)t} (\cos bt - i \sin bt)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(a-1)t} \cos bt\, \mathrm{d}t - i \int_0^{+\infty} e^{-(a-1)t} \sin bt\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Oba integrala konvergiraju ako je $a > 1$, dakle $F(s)$ postoji za svako $s \in \mathbf{C}$ sa $\operatorname{Re} s > 1$.

3° Za funkciju $f(t) = e^{t^2}$, integral (1) se svodi na

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2}\, \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{t^2 - at} \cdot e^{-ibt}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-a^2/4} e^{(t-a/2)^2} \cos bt\, \mathrm{d}t - i \int_0^{+\infty} e^{-a^2/4} e^{(t-a/2)^2} \sin bt\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Može se pokazati da ni realni ni imaginarni deo integrala ne konvergiraju ni za jedno $s = a + ib \in \mathbf{C}$. Prema tome, posmatrana funkcija nema LAPLACEovu transformaciju ni za jedno $s \in \mathbf{C}$.

Definicija 6.2 *Kompleksnu funkciju realne promenljive $t \mapsto f(t)$ nazivamo* **originalom** *ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

- $f(t) = 0$ *za* $t < 0$ *(*kauzalnost*);*
- *Funkcija f je deo po deo neprekidna, zajedno sa svojim izvodima;*
- *Postoje realne pozitivne konstante M i p takve da je $|f(t)| < Me^{pt}$ za svako $t > 0$ (*uslov maksimalno eksponencijalnog rasta*).*

Uslov kauzalnosti se postavlja zbog inverzije LAPLACEove transformacije. Sve fizički ostvarljive funkcije mogu se smatrati kauzalnim, jer "startuju" od nekog vremenskog trenutka. Uslov deo po deo neprekidnosti funkcije i njenih izvoda postavlja se zbog integrabilnosti na konačnom segmentu. Na kraju, uslov maksimalno eksponencijalnog rasta je dovoljan za konvergenciju nesvojstvenog integrala kojim se definiše LAPLACEova transformacija u poluravni $\operatorname{Re} s > p$, kao što ćemo videti u teoremi 6.1. Iz ovog uslova izlazi i da je funkcija f ograničena u oblasti $t > 0$. Napomenimo da su postavljeni uslovi samo dovoljni za egzistenciju LAPLACEove transformacije, i da se mogu postaviti i opštiji dovoljni uslovi koji obuhvataju širu klasu funkcija.

Teorema 6.1 *Ako su za funkciju f ispunjeni uslovi definicije 6.2, njena* LAPLACEova *transformacija $F(s)$ postoji za svako $s = a + ib$ za koje je $a > p$. Integral (1) apsolutno i uniformno konvergira u svakoj poluravni* $\operatorname{Re} s \geq a_0$*, gde je $a_0 > p$.*

Dokaz. Neka je $a_0 > p$ i neka su ispunjeni uslovi iz definicije 6.2. Za $s = a + ib$, ako je $a \geq a_0$ imamo da je

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-at} |f(t)| \leq M e^{(p-a_0)t}.$$

Kako je

$$\int_0^{+\infty} M e^{(p-a_0)t} \, \mathrm{d}t = \frac{M}{a_0 - p} < +\infty,$$

prema WEIERSTRASSovom kriterijumu integral (1) apsolutno i uniformno konvergira u oblasti $\operatorname{Re} s \geq a_0$. Ako je $s = a + ib$ proizvoljan kompleksan broj takav da je $a > p$, tada sa recimo, $a_0 = (a + p)/2$ imamo da je $\operatorname{Re} s = a > a_0 > p$, tako da integral (1) postoji u tački s.

Sledeća teorema, koju dajemo bez dokaza, tvrdi da je F regularna funkcija.

Teorema 6.2 *Ako su za funkciju f ispunjeni uslovi definicije 6.2, njena* Laplaceova *transformacija $F(s)$ je regularna funkcija kompleksne promenljive s u poluravni* $\{s \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} s > p\}$.

! U nastavku ovog odeljka, uvek pod funkcijom $f(t)$ podrazumevamo njenu kauzalnu modifikaciju, tj. funkciju $f(t)H(t)$, gde je H Heavisideova funkcija ($H(t) = 1$ za $t \geq 0$ i $H(t) = 0$ za $t < 0$). Na primer, kada govorimo o funkciji $f(t) = e^t$, podrazumevamo da je $f(t) = 0$ za $t < 0$ i $f(t) = e^t$ za $t \geq 0$.

Primer 114. 1° Funkcija $f(t) = e^t$ je original; uslov eksponencijalnog rasta je zadovoljen sa $M = 1$ i $p = 1$. Prema teoremi 6.1, Laplaceova transformacija $F(s)$ ove funkcije postoji za $\operatorname{Re} s > 1$ i

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-1)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s-1}.$$

2° Ponekad se posmatra i tzv. **dvostrana Laplaceova transformacija**, koja je definisana integralom (1) u granicama od $-\infty$ do $+\infty$. U tom slučaju funkcija f ne mora da bude kauzalna, ali se oblast konvergencije integrala sužava. Na primer, funkcija $t \mapsto e^t$ nema dvostranu transformaciju ni za jedno kompleksno s. Zaista, kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^t \, \mathrm{d}t = \lim_{\substack{\alpha \to +\infty \\ \beta \to +\infty}} \int_{-\alpha}^{\beta} e^{(1-a)t} e^{-ibt} \, \mathrm{d}t, \qquad (s = a + ib)$$

vidimo da je za konvergenciju kad $\alpha \to +\infty$ potrebno da bude $1 - a > 0$, dok je za konvergenciju kad $\beta \to +\infty$ potrebno $1 - a < 0$.

3° Potencijalna funkcija $t \mapsto t^a$ ($a \in \mathbf{R}$) je original za $a \geq 0$, dok za $a < 0$ ima prekid druge vrste u nuli. Međutim, pokazaćemo da Laplaceova transformacija ove funkcije postoji ako je $a > -1$. Po definiciji je

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^a \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s^{a+1}} \int_L e^{-z} z^a \, \mathrm{d}z,$$

gde je uvedena smena $z = st$ i time je oblast integracije postala poluprava L sa početkom u $z = 0$ i koja prolazi kroz tačku s u kompleksnoj ravni. Prema primeru 100, poslednji integral jednak je $\Gamma(a+1)$, tako da je

$$\mathcal{L}(t^a) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \qquad (a > -1).$$

U posebnom slučaju, za $a = 0$, nalazimo da je $\mathcal{L}(1) = 1/s$.

Primedba. Laplaceovu transformaciju nekih originala je nemoguće izraziti preko elementarnih funkcija. Ovde se često pojavljuju tzv. specijalne funkcije, koje nisu elementarne, ali su poznate u matematici, i mogu se izračunati njihove vrednosti numeričkim metodama. Jedna od takvih funkcija je i funkcija $\Gamma(t)$.

Zadaci

64. Dokazati da je funkcija $t \mapsto t^2$ original. Zatim naći LAPLACEovu transformaciju ove funkcije, direktno po definiciji.

Rešenje. U zadacima uvek uzimamo kauzalnu modifikaciju, odnosno, posmatramo funkciju $t \mapsto t^2 H(t)$. Za $t > 0$ imamo da je

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots > \frac{1}{2} t^2,$$

odakle izlazi da je $|t^2| < 2 \cdot e^t$, za svako $t > 0$, pa je ispunjen uslov maksimalno eksponencijalnog rasta, sa $M = 2$ i $p = 1$. Osim toga, data funkcija je svuda neprekidna, zajedno sa svim svojim izvodima.

Prema definicji, LAPLACEova transformacija date funkcije je

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^2 \,\mathrm{d}t,$$

pri čemu Teorema 6.1 tvrdi da je integral konačan u poluravni u kojoj je $\mathrm{Re}\, s > 1$. Parcijalnom integracijom sa $u = t^2$, $\mathrm{d}v = e^{-st}\,\mathrm{d}t$, dobijamo da je

$$F(s) = -\frac{t^2}{2} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t \,\mathrm{d}t.$$

Za $s = a + ib$, gde je $a > 1$, imamo da je

$$|t^2 e^{-st}| = |t^2 e^{-at} \cdot e^{-ibt}| = t^2 e^{-at} \to 0 \quad \text{kad } s \to \infty,$$

odakle je

$$F(s) = \frac{2}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t \,\mathrm{d}t,$$

a sa još jednom parcijalnom integracijom dobijamo da je $F(s) = \frac{2}{s^3}$. Primenjeni postupak važi i za svako s za koje je $\mathrm{Re}\, s > 0$.

65. Neka je $f(t) = \mathcal{L}(t^a)$. Naći a ako je $F(t) = Cf(t)$ za neko $C \in \mathbf{R}$, a zatim odrediti C.

[$a = -1/2$, $\mathcal{L}(t^{-1/2}) = \Gamma(1/2) \cdot s^{-1/2}$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.]

66. Dokazati da su sledeće funkcije originali: $\sin t$, $\frac{\sin t}{t}$, $\log(1 + t)$.

67. Koje od sledećih funkcija su originali: $t \mapsto 1/t^2$, $t \mapsto 1/(1+t)^2$, $t \mapsto 1/(1-t)^2$?

Rešenje. Ako je f original, mora biti $|f(t)| < Me^{pt}$ za svako $t > 0$, što znači da je f ograničena u okolini svake tačke $t > 0$. Funkcije $t \mapsto 1/t^2$ i $t \mapsto 1/(1-t)^2$ ne ispunjavaju taj uslov u okolini tačaka $t = 0$, odnosno $t = 1$, pa one nisu originali. Funkcija $t \mapsto 1/(1+t)^2$ jeste original; uslov maksimalno eksponencijalnog rasta je ispunjen, jer je $\dfrac{1}{1+t^2} < 1 = 1 \cdot e^{0 \cdot t}$.

68. Da li su originali funkcije $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ i $t \mapsto e^{t^2}$?

69. Može li funkcija koja nije original da ima LAPLACEovu transformaciju?

[Može. Na primer, funkcija $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ nije original, ali ima LAPLACEovu transformaciju.]

70. Ako je funkcija f original, da li i izvod f' mora biti original? Da li primitivna funkcija $\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u$ mora biti original? Navesti primere.

Uputstvo. Ako je funkcija f original, tj. ako zadovoljava uslove definicije 6.2, onda i izvod i primitivna funkcija zadovoljavaju prva dva uslova. Treći uslov je zadovoljen za integral (dokazati!), ali ne obavezno i za izvod. Na primer, funkcije $t \mapsto \sqrt{t}$ i $t \mapsto \sin\frac{1}{t}$ su originali, ali njihovi izvodi nisu.

6.1.2 Osobine Laplaceove transformacije

Ovde navodimo niz osobina LAPLACEove transformacije, koje su od suštinskog značaja u primenama. U sledećim teoremama pretpostavljamo da su sve funkcije koje se pominju originali (tj. da su ispunjeni uslovi definicije 6.2), kao i da kompleksna promenljiva s ima dovoljno veliki realni deo kako bi postojale transformacije svih funkcija koje učestvuju u izrazima.

Teorema 6.3 Linearnost. *Ako su f_1 i f_2 originali i ako su α i β proizvoljni kompleksni brojevi, tada je funkcija $\alpha f_1 + \beta f_2$ takođe original i važi da je*

$$\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\mathcal{L}(f_1) + \beta\mathcal{L}(f_2).$$

Ova osobina proizilazi neposredno iz osobine linearnosti integrala kojim se definiše LAPLACEova transformacija, pa izostavljamo formalan dokaz.

Teorema 6.4 Pomeranje *Ako je $F = \mathcal{L}(f)$, tada je*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a), \qquad a \in \mathbf{C}.$$

Dokaz. Imamo da je

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t)) = F(s-a).$$

Primer 115. U primeru 114 našli smo da je $\mathcal{L}(1) = 1/s$. Otuda je, prema teoremi o pomeranju,

$$\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a), \qquad a \in \mathbf{C}.$$

Dalje, koristeći linearnost, dobijamo da je

$$\mathcal{L}(\cos t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) = \frac{s}{s^2+1},$$

dok na sličan način nalazimo da je

$$\mathcal{L}(\sin t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Teorema 6.5 Sličnost. *Za svako $a > 0$ važi da je*

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F(s/a),$$

gde je $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Dokaz. Neposredno dobijamo da je

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-sx/a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(s/a).$$

Primetimo da je ovde bitno da bude $a > 0$, jer se funkcija f anulira za negativne vrednosti argumenta.

Primer 116. Kako je $\mathcal{L}(\cos t) = s/(s^2+1)$, primenom teoreme o sličnosti nalazimo da je

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

gde je $\omega > 0$. Na isti način, iz $\mathcal{L}(\sin t) = 1/(s^2+1)$ dobijamo

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Znajući da je $\mathcal{L}(e^t) = 1/(s-1)$, dobijamo da je

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \qquad a > 0.$$

Teorema 6.6 Diferenciranje originala. *Ako je funkcija f original i ako je $\mathcal{L}(f) = F$, onda je*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

i uopšte, za sliku n-tog izvoda važi

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Dokaz. Pretpostavljajući da su f i f' originali, primenom parcijalne integracije u integralu kojim se definiše Laplaceova transformacija funkcije f', dobijamo da je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-st} f(t)\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{t\to+\infty} e^{-st} f(t) - f(0) + sF(s) = -f(0) + F(s),\end{aligned}$$

jer zbog pretpostavki iz definicije originala, za $\mathrm{Re}\ s > p$

$$|e^{-st} f(t)| \le M e^{-(\mathrm{Re}\ s - p)} \to 0 \quad \text{kad } t \to +\infty.$$

Ovim je dokazana formula za sliku funkcije f'. Formula za sliku funkcije $f^{(n)}$ za proizvoljno n dokazuje se matematičkom indukcijom.

Primer 117. Primenom teoreme o diferenciranju originala diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima svode se na obične algebarske jednačine. Posmatrajmo jednačinu sa početnim uslovima

$$y'' - y = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Primenom LAPLACEove transformacije na obe strane ove jednačine, znajući da je $\mathcal{L}(1) = 1/s$, uz oznaku $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, dobijamo

$$s^2F(s) - F(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{odnosno} \quad F(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+1)}.$$

Dalje, razlaganjem na parcijalne razlomke dobijamo da je

$$F(s) = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s}.$$

Ovo je LAPLACEova transformacija rešenja date diferencijalne jednačine. Da bismo našli rešenje u „vremenskom domenu ” treba odrediti funkciju $f(t)$ takvu da je $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. U primeru 116 našli smo da je $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$, pa primenom linearnosti dobijamo da je

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - 1.$$

Teorema 6.7 Diferenciranje slike. *Ako je $\mathcal{L}(f) = F$, onda je*

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Dokaz. U oblasti u kojoj je $F(s)$ regularna funkcija imamo da je

$$F^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (e^{-st})^{(n)} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t)),$$

čime je teorema dokazana. Diferenciranje pod integralom je dozvoljeno jer je integral uniformno konvergentan (teorema 6.1).

Primer 118. Ako je $f(t) = te^t$, prema teoremi o diferenciranju slike nalazimo da je

$$F(s) = -\left(\frac{1}{s-1}\right)' = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Na isti način dobijamo da je

$$\mathcal{L}(t\cos t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\mathcal{L}(t\sin t) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

Teorema 6.8 Integracija originala. *Ako je $\mathcal{L}(f) = F$, tada je*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau\,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{s}F(s).$$

Dokaz. Neka je $g(t) = \int_0^t f(\tau \, \mathrm{d}\tau$ i neka je $G = \mathcal{L}(g)$. Tada je $g'(t) = f(t)$ i $\mathcal{L}(g') = F$. Dalje, kako je $g(0) = 0$, prema teoremi o diferenciranju originala imamo da je $\mathcal{L}(g'(t)) = sG(s)$, odnosno da je $G(s) = F(s)/s$, što je i trebalo dokazati.

Sledeća teorema odnosi se na integraciju slike. Ako je F regularna funkcija u nekoj oblasti koja sadrži polupravu $\operatorname{Im} z = b$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, onda u toj oblasti postoji primitivna funkcija za funkciju F i može se definisati integral $\int_s^{+\infty} F(z) \, \mathrm{d}z$, kao integral po polupravoj $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} s$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Teorema 6.9 Integracija slike. *Ako je $F = \mathcal{L}(f)$ i ako za $s = a + ib$ postoji $\int_{a+ib}^{+\infty+ib} F(u) \, \mathrm{d}u$, onda je*

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{+\infty} F(u) \, \mathrm{d}u.$$

Dokaz. Dokaz. Polazeći od definicije LAPLACEove transformacije, dobijamo

$$\begin{aligned}\int_s^{+\infty} F(u) \, \mathrm{d}u &= \int_s^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f(t) \left(\int_s^{+\infty} e^{-ut} \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano.

Teorema 6.10 Kašnjenje. *Ako je $\mathcal{L}(f) = F$, onda je*

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-s\tau} F(s), \qquad \tau \geq 0.$$

Dokaz. Zbog kauzalnosti, funkcija f jednaka je nuli ako je njen argument manji od nule. Stoga je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t-\tau)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-\tau) \, \mathrm{d}t = \int_\tau^{+\infty} e^{-st} f(t-\tau) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} f(u) \, \mathrm{d}u = e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} e^{-su} f(u) \, \mathrm{d}u \\ &= e^{-s\tau} F(s).\end{aligned}$$

Primer 119. Ako je f original, onda je, u skladu sa definicijom originala, $f(t) = f(t) \cdot H(t)$, tako da je, za $\tau > 0$, $f(t-\tau) = f(t-\tau) \cdot H(t-\tau)$. Ovu funkciju treba razlikovati od funkcije $f(t-\tau) \cdot H(t)$, koja počinje od $t = 0$.

Konkretno, $\mathcal{L}((t-1)^2 H(t-1)) = 2e^{-s}/s^3$, dok je $\mathcal{L}((t-1)^2 H(t)) = \mathcal{L}(t^2 - 2t + 1) = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$.

Teorema 6.11 Periodični original. *Ako je f periodična funkcija sa periodom T, onda je*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Dokaz. Na osnovu aditivnosti integrala, imamo da je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-s(kT+\tau)} f(kT+\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT}\right) \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Sumiranjem geometrijskog reda dobija se tražena formula.

Teorema 6.12 Originali sa parametrom. *Neka je* $\mathcal{L}(f(t,a)) = F(s,a)$, *gde je* a *realni ili kompleksni parametar. Tada je*

- $\mathcal{L}(\lim_{a\to a_0} f(t,a)) = \lim_{a\to a_0} F(s,a)$,
- $\mathcal{L}\left(\dfrac{\partial f(t,a)}{\partial a}\right) = \dfrac{\partial F(s,a)}{\partial a}$,
- $\mathcal{L}\left(\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)\,\mathrm{d}a\right) = \displaystyle\int_{a_1}^{a_2} F(s,a)\,\mathrm{d}a$,

pri čemu pretpostavljamo da su svi izrazi na levim stranama navedenih jednakosti definisani i konačni.

Dokaz. Sva tri tvrđenja su posledica uniformne konvergencije integrala kojim se definiše Laplaceova transformacija. Detalje dokaza izostavljamo.

Zadaci

71. Neka su f_1 i f_2 originali, koji se razlikuju u prebrojivo ili konačno mnogo tačaka $t_1, t_2, \ldots$ Dokazati da su Laplaceove transformacije ove dve funkcije iste.

72. Neka je $I_A(x)$ indikator skupa A, tj. funkcija koja je jednaka jedinici ako $x \in A$ i nuli inače. Dokazati da je

$$H(x-a) - H(x-b) = I_{[a,b)}(x), \quad H(b-x) - H(a-x) = I_{(a,b]}(x),$$

$$H(x-a)H(b-x) = I_{[a,b]}(x), \quad (1 - H(a-x))(1 - H(x-b)) = I_{(a,b)}, \qquad a < b.$$

73. Naći $\mathcal{L}(f(t))$, gde je

$$f(t) = \begin{cases} t-6, & 6 \le t < 7, \\ 8-t, & 7 \le t < 8, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-6)I_{[6,7)}(t) + (8-t)I_{[7,8)}(t) \\ &= (t-6)(H(t-6) - H(t-7)) + (8-t)(H(t-7) - H(t-8)) \\ &= (t-6)H(t-6) - 2(t-7)H(t-7) + (t-8)H(t-8). \end{aligned}$$

Prema osobini kašnjenja, imamo da je $\mathcal{L}((t-\tau)H(t-\tau)) = e^{-s\tau}\frac{1}{s^2}$, odakle je

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2}\left(e^{-6s} - 2e^{-7s} + e^{-8s}\right) = \frac{(e^{-3s} - e^{-4s})^2}{s^2}.$$

74. Naći LAPLACEovu transformaciju funkcije $t \mapsto |\sin t|$.

Rešenje. Data funkcija je periodična sa periodom π, pa je njena LAPLACEova transformacija data sa

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})}.$$

6.1.3 Konvolucija funkcija

Neka su f i g realne funkcije definisane na $\mathbf{R}$. Ako za svako $t \in D \subset \mathbf{R}$ postoji integral

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u, \tag{2}$$

ovim integralom je na domenu D definisana jedna funkcija promenljive t; ona se naziva **konvolucijom funkcija** f i g, u oznaci $h = f * g$.

Primer 120. 1° S obzirom da je konvolucija definisana kao nesvojstveni integral, ako se funkcije f i g ne anuliraju na nekim intervalima, može se dogoditi da konvolucioni integral divergira za svako t, i da konvolucija nije uopšte definisana ni za jedno $t \in \mathbf{R}$. Takav je slučaj, recimo, sa konvolucijom bilo kakvih stepenih funkcija $f(t) = t^m$ i $g(t) = t^n$, za $m, n > 0$.

2° Konvolucija funkcija $t \mapsto t$ i $t \mapsto e^{-t^2}$ je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-u)e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-u^2}\,\mathrm{d}u = t\sqrt{\pi},$$

gde smo iskoristili činjenicu da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

3° Neka je $f(t) = e^{-t}$ i $g(t) = e^{-2t}$ za $t \geq 0$ i $f(t) = g(t) = 0$ za $t < 0$. Odredićemo konvoluciju $h = f * g$. Prema definiciji ovih funkcija, $f(t-u) = 0$ za $t - u < 0$, odnosno za $u > t$, dok je $g(u) = 0$ za $u < 0$. Stoga je $f(t-u)g(u) = 0$ za $u \notin [0, t]$, pa je

$$h(t) = \int_0^t e^{-(t-u)}e^{-2u}\,\mathrm{d}u = e^{-t}\int_0^t e^{-u}\,\mathrm{d}u = e^{-t}(1-e^{-t}) = e^{-t} - e^{-2t}. \qquad \square$$

Konvolucija, kao operacija definisana nad funkcijama, ima veoma široku primenu u raznim oblastima. Na primer, u primenama vezanim za obradu signala, koristi se svojstvo konvolucije da „pegla” funkcije, odnosno povećava njihov stepen glatkosti. U vezi sa ovim, videti i zadatke 75 i 76.

Primer 121. Neka je

$$f(x) = 1 - |x| \quad \text{za } x \in [-1, 1]; \qquad f(x) = 0 \quad \text{inače.}$$

Funkcija f nije diferencijabilna u tačkama $x = 0$, $x = \pm 1$. Izračunavanjem integrala kojim je definisana konvolucija, nalazimo da je $f * f = h$, gde je funkcija h definisana sa

$$h(t) = \begin{cases} \frac{3|t|^3 - 6t^2 + 4}{6} & t \in (-1, 1) \\ h(t) = \frac{-|t|^3 + 6t^2 - 12t + 8}{6} & t \in (-2, -1] \cup [1, 2) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Nije teško proveriti da je funkcija h neprekidna i diferencijabilna u svakoj tački $t \in \mathbf{R}$ (videti i sliku 62). $\square$

Slika 62. Efekat konvolucije. (skonp)

U sledećoj teoremi dajemo neke osobine konvolucije.

Teorema 6.13 Osobine konvolucije *Na domenu na kome su konvolucije definisane, važi:*

(i) $f * g = g * f$ *(komutativnost)*

(ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ *(asocijativnost)*

(iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$ *(distributivnost u odnosu na sabiranje)*

(iv) $|f * g| \leq |f| * |g|$ *(nejednakost trougla)*

Dokaz. Smenom $v = t - u$ dobija se

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - u) g(u) \, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) g(t - v) \, \mathrm{d}v = (g * f)(t),$$

čime je dokazana osobina (i). Osobina (ii) dokazuje se pomoću dvojnih integrala, osobina (iii) pomoću linearnosti integrala, a osobina (iv) pomoću nejednakosti trougla za integral; detalje ovih dokaza izostavljamo.

6.1.4 Laplaceova transformacija konvolucije

U delu 6.1.3 definisali smo konvoluciju funkcija f i g kao integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Ako su f i g kauzalne funkcije, podintegralna funkcija u ovom integralu jednaka je nuli za $u > t$ i za $u < 0$, tako da se u ovom slučaju konvolucija $f * g$ svodi na

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u \qquad t > 0, \tag{3}$$

pri čemu je $h(t) = 0$ za $t < 0$. Konvolucija se posebno jednostavno može odrediti primenom LAPLACEove transformacije, jer je $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$, kao što tvrdi sledeća teorema.

Teorema 6.14 *Neka su funkcije f i g originali (u smislu definicije 6.2) i neka su F i G njihove slike dobijene* LAPLACE*ovom transformacijom. Tada je $\mathcal{L}(f*g) = F \cdot G$.*

Dokaz. Imamo da je

$$\mathcal{L}(f*g) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(u)\int_u^{+\infty} e^{-st}g(t-u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{+\infty} f(u)\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+u)}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-su}f(u)\,\mathrm{d}u\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

čime je dokaz završen.

Zadaci

75. Neka je $f(t) = 1$ za $t \in [0,1)$ i $f(t) = 0$ inače. Naći konvoluciju $f * f$ po definiciji, a zatim primenom LAPLACEove transformacije.

Rešenje. Data funkcija se može napisati u obliku

$$f(t) = H(t) - H(t-1), \tag{4}$$

odakle je (videti zadatak 72)

$$f(t-u)f(u) = (H(t-u) - H(t-u-1))(H(u) - H(u-1)) = I_{(t-1,t]}(u) \cdot I_{[0,1)}(u).$$

Za fiksirano t, neka je $h(u) = I_{(t-1,t]}(u) \cdot I_{[0,1)}(u)$. Ako je $t < 0$ ili $t \geq 2$, imamo da je $h(u) = 0$ za svako u. Ako je $t \in [0,1)$, tada je $h(u) = I_{(0,t)}(u)$, pa je

$$\int_0^t f(t-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u = t, \qquad 0 \leq t < 1.$$

Ako je $t \in [1,2)$, tada je $h(u) = I_{(t-1,1)}(u)$, odakle je

$$\int_0^t f(t-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t I_{(t-1,1)}(u)\,\mathrm{d}u = 2-t, \qquad 1 \leq t < 2.$$

Konvolucija $f * f$ se može izraziti i u obliku jedne formule, i to

$$\begin{aligned} f * f(t) &= tI_{[0,1)} + (2-t)I_{[1,2)} = t(H(t) - H(t-1)) + (2-t)(H(t-1) - H(t-2)) \\ &= tH(t) - 2(t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2). \end{aligned} \tag{5}$$

Primenom LAPLACEove transformacije, zadatak se može rešiti na sledeći način. Iz (4), dobijamo LAPLACEovu transformaciju funkcije f: $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}$. Odavde je $\mathcal{L}(f * f) = (F(s))^2 = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + e^{-2s}\frac{1}{s^2}$. Inverzne transformacije su:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = tH(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}e^{-s}\right) = 2(t-1)H(t-1), \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}e^{-2s}\right) = (t-2)H(t-2).$$

Odavde se ponovo dobija oblik (5).

Primedba. Funkcija f ima u ovom zadatku prekide u tačkama 0 i 1, dok je konvolucija $f * f$ neprekidna, kao što se iz rešenja vidi. Ako se uzme još jedna konvolucija, dobiće se funkcija koja je ne samo neprekidna, već i svuda diferencijabilna. To ćemo pokazati u sledećem zadatku.

76. **Konvolucioni stepen** funkcije f definiše se kao funkcija $f^{*n} = f * f * f * \cdots * f$, sa ukupno n konvolucija. Ako je f funkcija definisana kao u zadatku 75, naći f^{*3} i f^{*4}. Pokazati da su obe ove funkcije svuda diferencijabilne.

[$f^{*3} = \frac{t^2}{2}H(t) - \frac{3(t-1)^2}{2}H(t-1) + \frac{3(t-2)^2}{2}H(t-2) - \frac{(t-3)^2}{2}H(t-3)$; $f^{*4} = \frac{t^3}{6}H(t) - \frac{2}{3}(t-1)^3H(t-1) + (t-2)^3H(t-2) - \frac{2}{3}(t-3)^3H(t-3) + \frac{(t-4)^3}{6}H(t-4)$.]

77. Ako su f i g funkcije promenljive t, koje su jednake nuli za $t < 2$, u kojim granicama se kreće konvolucioni integral za ove dve funkcije i za koje t je konvolucija jednaka nuli?

[Od 2 do $t-2$; za $t < 4$.]

6.1.5 Inverzija Laplaceove transformacije

U prethodnim odeljcima videli smo da se pomoću LAPLACEove transformacije neki teški problemi u vremenskom domenu pretvaraju u lake probleme u kompleksnom domenu. Pošto se dobije rešenje u kompleksnom domenu, treba se vratiti natrag u vremenski domen, tj. naći original LAPLACEove transformacije kada se zna slika. Teorijski, od značaja je činjenica da se original uvek može jedinstveno odrediti, primenom formule koju ćemo navesti u teoremi 6.15. U primenama se ova formula praktično i ne koristi, već se inverzija određuje primenom tablica LAPLACEove transformacije i pravila koja smo naveli u prthodnom odeljku. Situacija je ovde ista kao kod nalaženja izvoda ili integrala: iako se izvod i integral definišu pomoću limesa, za efektivno nalaženje izvoda i integrala koriste se tablice i pravila diferenciranja, odnosno integracije.

Teorema 6.15 *Pretpostavimo da važe sledći uslovi (DIRICHLETovi uslovi):*

- *Funkcija f je original i postoje pozitivne konstante M i p takve da je za svako $t > 0$, $|f(t)| < Me^{pt}$;*

- *Realni i imaginarni deo f ima konačno mnogo ekstremuma na svakom konačnom segmentu $[a, b]$, gde je $0 < a < b < +\infty$.*
- *Postoji integral $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.*

Tada je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s, \tag{6}$$

za proizvoljan realan broj $b > p$ i za svaku tačku $t > 0$ u kojoj je funkcija f neprekidna.

Dokaz teoreme 6.15 je složen i izostavljamo ga. Jedna značajna posledica ove teoreme je jedinstvenost LAPLACEove transformacije. Naime, neka su f i g dve funkcije koje zadovoljavaju DIRICHLETove uslove, pri čemu obe funkcije imaju istu LAPLACEovu transformaciju F. Iz osobine linearnosti LAPLACEove transformacije izlazi da je $\mathcal{L}(f(t) - g(t)) = 0$, pa se iz formule (6) dobija da je $f(t) - g(t) = 0$ za svaku tačku t u kojoj su obe funkcije neprekidne. To znači da različitim neprekidnim originalima odgovaraju različite LAPLACEove transformacije.

Ako je funkcija F analitička u celoj kompleksnoj ravni, primenom teoreme o ostacima iz kompleksne analize, formula (6) svodi se na

$$f(t) = \sum \mathrm{Res}(e^{st}F(s)), \tag{7}$$

gde se sumira po svim konačnim izolovanim singularitetima funkcije $s \mapsto F(s)$.

Primer 122. Neka je $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2+1}$. Ova funkcija ima polove prvog reda u tačkama $s = 2 + i$ i $s = 2 - i$, pa se primenom formule (7) dobija

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{s=2+i} \frac{e^{st}}{(s-2)^2+1} + \operatorname*{Res}_{s=2-i} \frac{e^{st}}{(s-2)^2+1} = \frac{e^{(2+i)t}}{2i} + \frac{e^{(2-i)t}}{-2i} = e^{2t}\sin t.$$

Isti rezultat se jednostavnije dobija ako se pođe od činjenice da je $\mathcal{L}(\sin t) = \dfrac{1}{s^2+1}$. Ako poslednju funkciju nazovemo $G(s)$, onda je $F(s) = G(s-2)$, pa je na osnovu teoreme pomeranja, funkcija F LAPLACEova transformacija funkcije $e^{2t}\sin t$.

Primer 123. Zadatak nalaženja inverzne LAPLACEove transformacije nema uvek rešenja, jer funkcija F mora da ispunjava određene uslove da bi bila LAPLACEova transformacija nekog originala. Na primer, ako stavimo da je $s = a + ib$, dobijamo da je

$$F(s) = F(a+ib) = \int_0^{+\infty} e^{-at}(\cos bt + i\sin bt)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pretpostavljajući da je $|f(t)| < Me^{pt}$, nalazimo da je

$$|F(s)| < M\int_0^{+\infty} e^{(p-a)}t\,\mathrm{d}t,$$

odakle se dobija da je $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a+ib) = 0$. Prema tome, funkcije $1, s, s^2, \sin s$ itd., nisu LAPLACEove transformacije nijednog originala (u smislu definicije originala na strani 213).

6.1.6 Primene Laplaceove transformacije

U ovom delu, u obliku primera prikazaćemo neke od primena LAPLACEove transformacije u drugim oblastima matematike. Primene se uglavnom zasnivaju na činjenici da se ovom transformacijom izvod pretvara u množenje sa nekim stepenom promenljive, dok se integral pretvara u količnik. U primeru **??** smo pokazali kako se nalazi partikularno rešenje diferencijalne jednačine sa zadatim početnim uslovima. Uradićemo još nekoliko složenijih primera.

Primer 124. Naći funkciju $t \mapsto y(t)$ za koju je

$$y'' - y' = 3(2 - t^2), \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$$

Rešenje. Kod ovakvih zadataka podrazumeva se da se rešenje traži na intervalu $[0, +\infty)$; drugačije se ne bi mogla primeniti LAPLACEova transformacija. Transformisana jednačina glasi

$$s^3F(s) - sF(s) - s^2 - s = \frac{6}{s} - \frac{6}{s^3},$$

gde je $F(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Odavde je

$$F(s) = \frac{s^5 + s^4 + 6s^2 - 6}{s^4(s^2 - 1)} = \frac{s^4 + 6s - 6}{s^4(s - 1)} = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s - 1}.$$

Inverzija poslednje funkcije je $f(t) = t^3 + e^t$, i to je rešenje zadatka.

Primer 125. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}.$$

Rešenje. Ako se označi $y(0) = a$, $y'(0) = b$, gde su a, b realni brojevi, dobija se transformisana jednačina:

$$s^2F(s) - as - b - 3sF(s) - 3a + 2F(s) = \frac{4}{s - 2}, \quad \text{tj.}$$

$$F(s) = \frac{4}{(s - 1)(s - 2)^2} + \frac{as + b + 3a}{(s - 1)(s - 2)} = \frac{4 - b - 4a}{s - 1} + \frac{-4 + b + 5a}{s - 2} + \frac{4}{(s - 2)^2}.$$

Uvođenjem novih oznaka $C_1 = 4 - b - 4a$, $C_2 = -4 + b + 5a$, i nalaženjem inverzije, dobija se

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + 4te^{2t}.$$

Primer 126. Naći funkcije $t \mapsto x(t)$ i $t \mapsto y(t)$ koje zadovoljavaju sistem jednačina

$$\dot{x} = x + 2y + t, \quad \dot{y} = 2x + y + t, \qquad x(0) = 2,\ y(0) = 1.$$

Rešenje. Neka su $X(s)$ i $Y(s)$ LAPLACEove transformacije funkcija x i y. Iz datog sistema izlazi da je

$$sX(s) - 2 = X(s) + 2Y(s) + \frac{1}{s^2}, \quad sY(s) - 1 = 2X(s) + Y(s) + \frac{1}{s^2},$$

odnosno

$$\begin{aligned}(1-s)X + 2Y &= -2 - \frac{1}{s^2},\\ 2X + (1-s)Y &= -1 - \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

Na ovaj način smo dobili običan sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatima X i Y, čije se rešenje dobija na standardni način kao

$$X(s) = \frac{29}{18(s-3)} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{3s^2} - \frac{1}{9s}, \quad Y(s) = \frac{29}{18(s-3)} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{3s^2} - \frac{1}{9s}$$

Inverzijom se konačno dobija rešenje u vremenskom domenu:

$$x(t) = \frac{29}{18}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{9}, \quad y(t) = \frac{29}{18}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{9}$$

Primer 127. Naći funkciju $t \mapsto y(t)$ tako da za $t > 0$ važi da je

$$y(t) = t + \int_0^t \sin(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u. \tag{8}$$

Rešenje. Jednačine u kojima se nepoznata funkcija pojavljuje pod integralom zovu se integralne jednačine. S obzirom na teoremu o integraciji originala, ove jednačine se, isto kao i diferencijalne, svode na obične algebarske jednačine.

Zbog svojstva konvolucije imamo da je

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \sin(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u\right) = \mathcal{L}(\sin(t)) \cdot \mathcal{L}Y = \frac{Y(s)}{s^2+1},$$

gde je $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Transformisana jednačina (8) glasi

$$Y = \frac{1}{s^2} + \frac{Y(s)}{s^2+1},$$

odakle je $y(t) = t + \frac{t^3}{6}$.

6.2 Zadaci

Tablica Laplasove transformacije

Original	*Slika*
1	$\dfrac{1}{s}$
$t^a \ (a > -1)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{1}{s}F(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u$
$f(t-\tau) \ (\tau > 0)$	$e^{-s\tau}F(s)$
f sa periodom T	$\displaystyle\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$
f'	$sF(s)-f(0)$
f''	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
f'''	$s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$

78. Naći LAPLACEovu transformaciju $F(s)$ funkcije: **a)** $\sin^2 t$; **b)** $\sin 2t\cos 3t$; **c)** $\cos 2t\cos 3t$; **d)** $\cos^3 t$.

Rešenje. I način: Pretvaranjem stepena i proizvoda u zbir trigonometrijskih funkcija. **a)** Imamo da je $\sin^2 t = (1-\cos 2t)/2$, odakle je $F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}$. **b)** Kako je $\sin 2t\cos 3t = \frac{1}{2}(\sin 5t - \sin t)$, dobija se $F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{s^2+1}\right)$. **c)** Iz $\cos 2t\cos 3t = \frac{1}{2}(\cos 5t + \cos t)$, izlazi da je $F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+25} + \frac{s}{s^2+1}\right)$. **d)** Kako je $\cos^3 t = \cos^2 t\cdot\cos t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\cos t$ dobija se da je $F(s) = \frac{3s}{4(s^2+1)} + \frac{s}{4(s^2+9)}$.

II način: Primenom EULERove formule, dobijamo, na primer, za deo a): $\sin^2 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2it} - \frac{1}{2}e^{-2it}$, odakle se dobija da je $F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s-2i)} - \frac{1}{2(s+2i)} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}$. Ovaj način je očigledno jednostavniji od prvog.

79. Naći LAPLACEovu transformaciju funkcije $t^n e^{at}$, gde je $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{C}$.

Rešenje. Ovaj zadatak može se rešiti na dva načina. I način: Primenom teoreme o izvodu slike, nalazimo da je $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = (-1)^n \left(\frac{1}{s-a}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$. II način: Primenom teoreme o pomeranju, dobija se $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = F(s-a)$, gde je $F(s) = \mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$. Kako je $\Gamma(n+1) = n!$, dobijamo isti rezultat kao i primenom I načina.

80. Naći LAPLACEovu transformaciju $F(s)$ funkcije: **a)** te^t; **b)** $t^2 \operatorname{ch} 2t$; **c)** $t^3 \sin 2t$; **d)** $t^2 \operatorname{ch}^2 t$; **e)** $t^3 \sin^2 t$.

Rešenje. Sve date funkcije mogu se svesti na linearne kombinacije funkcija oblika $t^n e^{at}$, gde je n prirodan i a kompleksan broj. Dalje se radi na jedan od dva načina navedena u rešenju zadatka 79. Rezultati: **a)** $\frac{1}{(s-1)^2}$; **b)** $\frac{1}{(s-2)^3} + \frac{1}{(s+2)^3}$; **c)** $\frac{6(8s^3-32s)}{(s^2+4)^4}$; **d)** $\frac{1}{s^3} + \frac{1}{2(s-2)^3} + \frac{1}{2(s+2)^3}$; **e)** $\frac{12}{s^4(s^2+4)} + \frac{12}{s^2(s^2+4)^2} + \frac{96s^2}{(s^2+4)^4}$.

81. Naći LAPLACEovu transformaciju funkcije

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2a \le t < a+b, \\ -1, & a+b \le t < 2b, \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad (0 \le a < b).$$

$$\left[\ \frac{(e^{-as} - e^{-bs})^2}{s}\ \right]$$

82. Naći LAPLACEovu transformaciju funkcije f koja na intervalima $[0,2), [3,4), [4,5)$ uzima vrednosti $1, 2, -1$, respektivno, dok je u ostalim tačkama jednaka nuli.

$$\left[\ \frac{1 - e^{-2s} + 2e^{-3s} - 3e^{-4s} + e^{-5s}}{s}\ \right]$$

83. Neka je $f(t) = t^2$ za $t \in [1,2)$, $f(t) = t^3 - 4$ za $t \in [2,3)$ i $f(t) = 0$ u ostalim tačkama t. Naći $F(s)$.

Rešenje. Data funkcija se može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2(H(t-1) - H(t-2)) + (t^3-4)(H(t-2) - H(t-3)) \\ &= t^2 H(t-1) + (t^3 - t^2 - 4)H(t-2) + (4-t^3)H(t-3) \end{aligned}$$

Da bismo primenili osobinu kašnjenja, potrebno je da izrazimo prvi sabirak preko stepena osnove $(t-1)$, drugi preko $(t-2)$, a treći preko $(t-3)$. Na primer, za drugi sabirak dobija se $(t^3 - t^2 - 4)H(t-2) = ((x+2)^3 - (x+2)^2 - 4)H(x) = (x^3 + 5x^2 + 8x)H(x) = g_2(x)$, gde je $x = t-2$. Sličan postupak za prvi i treći sabirak daje $g_1(x) = (x^2 + 2x + 1)H(x)$, gde je $x = t-1$ i $g_3(x) = -(x^2 + 6x + 5)H(x)$, sa $x = t-3$. Prema tome, data funkcija postaje $f(t) = g_1(t-1) + g_2(t-2) + g_3(t-3)$, pa je njena LAPLACEova trasformacija data sa

$$\mathcal{L}(f(t)) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(\frac{6}{s^4} + \frac{10}{s^3} + \frac{8}{s^2}\right) - e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{5}{s}\right).$$

84. Naći LAPLACEove transformacije periodičnih funkcija: **a)** $t \mapsto t - [t]$, gde je $[t]$ ceo deo broja t (najveći ceo broj koji nije veći od t); **b)** $t \mapsto \operatorname{sgn}(\sin t)$; **c)** $t \mapsto |\cos t|$.

[**a)** $\dfrac{s+1-e^s}{s^2(1-e^s)}$; **b)** $\dfrac{2e^{-s\pi/2}+se^{-s\pi}-s}{(1-s^2)(1-e^{-s\pi})}$; **c)** $\dfrac{1-e^{-s\pi}}{s(1+e^{-s\pi})}$]

85. Računajući konvoluciju funkcija $t \mapsto t^p$ i $t \mapsto t^q$ po definiciji i primenom LAPLACEove transformacije, dokazati da je za $p, q > 0$,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \text{gde je } B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

Rešenje. Neka je, za $p, q > -1$, $t^p * t^q = g(t)$. Po definiciji konvolucije, imamo da je

$$g(t) = \int_0^t u^p(t-u)^q\,\mathrm{d}u = t^{p+q+1}\int_0^1 v^p(1-v)^q\,\mathrm{d}v = t^{p+q+1}B(p+1,q+1).$$

S druge strane, znajući da je $\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(t^p)\cdot\mathcal{L}(t^q) = \dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{s^{p+q+2}}$, nalaženjem inverzije (pomoću tablice), dobijamo da je

$$g(t) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}t^{p+q+1}.$$

Poređenjem dva dobijena izraza za g, dobijamo traženu formulu.

86. Odrediti LAPLACEovu transformaciju funkcije $t \mapsto \operatorname{ch} at \cos at$, gde je $a > 0$.

Rešenje. Zbog osobine sličnosti, dovoljno je rešiti zadatak za $a = 1$:

$$\operatorname{ch} t\cos t = \frac{(e^t+e^{-t})(e^{it}+e^{-it})}{4} = \frac{e^{t(1+i)}+e^{t(1-i)}+e^{t(-1+i)}+e^{t(-1-i)}}{4},$$

odakle je

$$\mathcal{L}(\operatorname{ch} t\cos t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1-i}+\frac{1}{s-1+i}+\frac{1}{s+1-i}+\frac{1}{s+1+i}\right) = \frac{s^3}{s^4+4}.$$

Ako se poslednja funkcija označi sa F, onda se LAPLACEova transformacija funkcije $t \mapsto \operatorname{ch} at\cos at$ dobija kao

$$\frac{1}{s}F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{s^3}{s^4+4a^4}.$$

87. Odrediti LAPLACEovu transformaciju funkcije $t \mapsto \operatorname{sh} at \sin at$, gde je $a > 0$.

[$\dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$]

88. Naći LAPLACEovu transformaciju funkcije $t \mapsto \log t$.

Rešenje. Za $a > -1$ imamo da je $\mathcal{L}(t^a) = \Gamma(a+1)/s^{a+1}$. Stoga je

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial t^a}{\partial a}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}(t^a)}{\partial a} = \frac{\Gamma'(a+1)-\Gamma(a+1)\log s}{s},$$

pa se stavljanjem $a = 1$ u poslednju jednakost, dobija da je

$$\mathcal{L}(\log t) = \frac{\Gamma'(1)-\Gamma(1)\log s}{s}.$$

Poznato je da je $\Gamma'(1) = -\gamma = -0.577215\ldots$, gde je γ tzv. EULERova konstanta.

89. Dokazati da je $\displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{s}$. Na osnovu toga, odrediti LAPLACEovu transformaciju funkcije $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$.

[$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}$]

90. Naći LAPLACEovu transformaciju funkcije $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin^2\tau}{\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$.

[$\dfrac{1}{s}\operatorname{arctg}\dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{4}\log(s^2+4) + \dfrac{1}{2}\log s$]

91. Naći inverznu LAPLACEovu transformaciju $t \mapsto f(t)$ sledećih kompleksnih funkcija:
a) $\dfrac{s+3}{s^3-4s^2+3s}$; **b)** $\dfrac{1}{(s-1)^3} + \dfrac{3}{(s+2)^5}$; **c)** $\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$

Rešenje. a) Rastavljanjem na parcijalne razlomke dobijamo

$$\frac{s+3}{s^3-4s^2+3s} = \frac{s+3}{s(s-1)(s-3)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-3}.$$

Odavde nalazimo da je $f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}$. **b)** Iz tablice nalazimo da je $\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = 1/s^3$, a primenom teoreme pomeranja dobijamo da je $\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}e^t\right) = \frac{1}{(s-1)^3}$. Na isti način zaključujemo da je $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^5} = \frac{t^4}{8}e^{-2t}\right)$, pa je tražena funkcija data sa $f(t) = \frac{t^2}{2}e^t + \frac{1}{8}t^4e^{-2t}$. **c)** Neka je F data funkcija (slika), a f tražena funkcija (original). Kako je $\left(\dfrac{s}{(s^2+1)}\right)' = \dfrac{1-s^2}{(s^2+1)^2} = \dfrac{1+s^2-2s^2}{(s^2+1)^2} = \mathcal{L}(\sin t) - 2F(s)$, a $\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}(\cos t)$, prema teoremi o izvodu slike imamo da je $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$.

92. Naći inverznu LAPLACEovu transformaciju sledećih funkcija: **a)** $\frac{36}{s^4+18s^2+81}$; **b)** $\frac{2}{(s-1)^3} - \frac{3}{(s-2)^2+9}$; **c)** $\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$; **d)** $\frac{3s^4+6s^2+24s+78}{s^6+4s^5+13s^4}$

[**a)** $\frac{2}{3}\sin 3t - 2t\cos 3t$; **b)** $t^2e^t - e^{2t}\sin 3t$; **c)** $(t-1)^2e^t$; **d)** $e^{-2t}\sin 3t + t^3$.]

93. Primenom računa ostataka naći inverznu LAPLACEovu transformaciju funkcije: **a)** $\frac{s}{s^4-1}$; **b)** $\frac{s^2-17}{s^3+2s^2+17s}$ **c)** $\frac{1}{s^3-8}$; **d)** $\frac{1}{s^5+5s^3+4s}$; **e)** $\frac{s^2}{(s^2+9)^3}$;

[**a)** $\frac{1}{2}\big(\operatorname{ch} t - \cos t\big)$; **b)** $2e^{-t}\cos 4t - 1$ **c)** $\frac{e^{2t}}{12} - \frac{e^t}{12}\big(\cos t\sqrt{3} + \sqrt{3}\sin t\sqrt{3}\big)$;
d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{12}\cos 2t$; **e)** $\frac{1}{216}(9t^2\sin 3t - 3t\cos 3t + \sin 3t)$.]

94. Odrediti funkciju $f(t)$, ako je

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{n!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

[$(1-e^{-t})^n$]

95. Ako se funkcija F može predstaviti u obliku LAURENTovog reda $F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{s^{n+1}}$, onda je ova funkcija slika funkcije $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$. Dokazati.

Rešenje. Dokaz izlazi iz formule $\mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ i osobine linearnosti.

96. Naći inverznu LAPLACEovu transformaciju funkcije $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

Rešenje. Razvojem u binomni red dobijamo da je

$$F(s) = \frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{s^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n! s^{2n+1}}.$$

Dalje, primenom ideje kao u zadatku 95, dobija se original u obliku

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(t/2)^{2n}}{(n!)^2}.$$

Ova funkcija nije elementarna, ali ima značajne primene u elektrotehnici. Ona se označava sa J_0 i pripada familiji BESSELovih funkcija.

97. Naći funkciju y koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y''+y = 4e^t$, sa početnim uslovima $y(0) = 4$ i $y'(0) = -3$.

Rešenje. Neka je $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)$. Primenom LAPLACEove transformacije na obe strane date jednačine, dobijamo transformisanu jednačinu $s^2Y(s) - 4s + 3 + Y(s) = \frac{4}{s-1}$, odakle je $Y(s) = \frac{4}{(s^2+1)(s-1)} + \frac{4s-3}{s^2+1} = \frac{4s^2-7s+7}{(s-1)(s^2+1)}$. Razlaganje na parcijalne razlomke je oblika

$$\frac{4s^2-7s+7}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s-1}, \quad \text{odakle je} \quad 4s^2-7s+7 = A(s^2+1)+(Bs+C)(s-1).$$

Ako u poslednju jednakost stavimo $s = 1$, dobijamo da je $A = 2$, a ako stavimo $s = i$, dobijamo jednakost $3-7i = -B+i(C-B)-C$, odnosno $-B-C = 3$ i $-B+C = -7$, odakle je $B = 2$ i $C = -5$. Prema tome, imamo da je

$$Y(s) = \frac{2}{s-1}+\frac{2s}{s^2+1}-\frac{5}{s^2+1}, \quad \text{odnosno} \quad y = 2e^t + 2\cos t - 5\sin t.$$

98. Naći opšte rešenje jednačine $y''+y = g(t)$, gde je $g(t) = 0$ za $t < 0$ i $g(t) = -\cos t$ za $t \geq \pi$.

Rešenje. Funkcija g može se predstaviti u obliku $g(t) = \cos(t-\pi)H(t-\pi)$, pa je njena LAPLACEova transformacija data sa $G(t) = e^{-s\pi}\dfrac{s}{s^2+1}$. LAPLACEova transformacija rešenja diferencijalne jednačine je $Y(s) = \dfrac{as}{s^2+1}+\dfrac{b}{s^2+1}+e^{-s\pi}\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$, gde je $a = y(0)$, $b = y'(0)$. Odavde je opšte rešenje dato sa $y = a\cos t + b\sin t + \dfrac{t-\pi}{2}\sin(t-\pi)H(t-\pi)$.

99. Naći funkciju y koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y'' - y' = -2\cos t$, sa početnim uslovima $y(0) = 1$ i $y'(0) = 1$.

[$y = \cos t + \sin t$]

100. Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 2y' + y = 6te^t$, sa početnim uslovima $y(0) = 1$ i $y'(0) = 2$.

[$y = e^t(t^3 + t + 1)$]

101. Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y' + 5y = e^t(18\cos 2t - 6\sin 2t)$, sa početnim uslovima $y(0) = 1$ i $y'(0) = 3$.

[$y = e^t(\cos 2t + \sin 2t)$]

102. Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y' - 6y = e^{-3t}(12\cos^2 t + 14\sin 2t - 6)$, sa početnim uslovima $y(0) = 0$ i $y'(0) = 8$.

[$y = 2e^{2t} + e^{-3t}(\cos 2t - \sin 2t - 3)$]

103. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2t} + 8\cos 2t + 8t^2$, gde je $y(0) = y'(0) = 0$.

[$y = 4e^{2t}(t^2 + t - 1) + 2t^2 + 4t + \cos 2t + 3$]

104. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 3y' + 2y = (7t - 12)\cos t + (t - 1)\sin t$, uz uslove $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

[$y = e^t + e^{2t} + (t - 2)\cos t - (2t - 1)\sin t.$]

105. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, gde je $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$.

[$y = -5e^t + 8e^{2t} - 3e^{3t}$]

106. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y^{(iv)} - y = -4e^{-x}$, sa početnim uslovima $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = -2$.

[$y = e^t + e^{-t} + \cos t - \sin t - te^t.$]

107. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 2y' + y = t$.

[$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + t - 2$]

108. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 4y' + 4y = 8t^2$.

[$y = (C_1 + C_2 t)e^{2t} + 2t^2 + 4t + 3$]

109. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$, gde je f proizvoljni original, i gde je $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.

$$\left[\ y(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) + \frac{1}{2}\int_0^t (e^{3u} - e^u) f(t-u)\,\mathrm{d}u.\ \right]$$

110. Naći funkcije $t \mapsto x(t)$ i $t \mapsto y(t)$ tako da je

$$\dot{x} = y + 4t, \quad \dot{y} = x + 4e^t, \qquad x(0) = 4, y(0) = 0.$$

$$[\ x = 3e^t + 5e^{-t} + 2te^t - 4,\ y = 5e^t - 5e^{-t} + 2te^t - 4t.\ ]$$

111. Naći partikularno rešenje sistema:

$$\ddot{x} = y, \quad \ddot{y} = x, \qquad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 4, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

$$[\ x = e^t - e^{-t} + 2\sin t,\ y = e^t - e^{-t} - 2\sin t\ ]$$

112. Naći partikularno rešenje sistema:

$$\dot{x} + x - 2y = 0, \qquad \dot{y} + x - y = \cos\omega t,$$

gde je $x(0) = y(0) = 0$ i ω je proizvoljan realan broj. Da li su funkcije x i y neprekidne po parametru ω?

[Ako je $\omega \neq 1$, onda je $x(t) = \frac{2}{\omega^2-1}(\cos t - \cos\omega t)$, $y(t) = \frac{1}{\omega^2-1}(\cos t - \cos\omega t - \sin t + \omega\sin\omega t)$. Ako je $\omega = 1$, onda je $x(t) = t\sin t$, $y(t) = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t + t\sin t$. Rešenja su neprekidne funkcije parametra ω.]

113. Rešiti integralnu jednačinu $y(t) = \sin t + 2\displaystyle\int_0^t \cos(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u$.

Rešenje. Prema teoremi o konvoluciji, imamo da je

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \cos(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{s}{s^2+1}Y(s),$$

gde je $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Transformisana jednačina glasi $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$, pa je $y(t) = te^t$.

114. Odrediti u obliku stepenog reda funkciju $t \mapsto y(t)$ koja zadovoljava jednačinu

$$y''(t) - 2y'(t-2) + y(t-4) = t, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(t) = 0 \text{ za } t < 0.$$

Rešenje. Ako je $F(s)$ LAPLACEova transformacija funkcije y, primenom teoreme kašnjenja dobijamo

$$s^2F(s) + 2se^{-2s}F(s) + e^{-4s}F(s) = \frac{1}{s^2},$$

odakle izlazi

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+e^{-2s})^2} = \frac{1}{s^4}\left(1 + \frac{e^{-2s}}{s}\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-2}{n}\frac{e^{-2ns}}{s^{n+4}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)e^{-2ns}}{s^{n+4}}.$$

Odavde je $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(t-2n)^{n+3}}{(n+3)!}$.

Primedba. Jednačine ovog tipa zovu se diferencijalno-diferencne jednačine.

6.3 Fourierova transformacija