

Milan Merkle

# Matematička analiza

*Teorija i hiljadu zadataka*

*Za studente tehnike*

– Treće izmenjeno i dopunjeno izdanje –

*Beograd, 2015.*

Prof. dr Milan Merkle

MATEMATIČKA ANALIZA  
teorija i hiljadu zadataka  
*za studente tehnike*

Treće izmenjeno i dopunjeno izdanje

*Izdavač*  
AKADEMSKA MISAO  
Primorska 21, Beograd

*Štampa*  
Planeta print, Beograd

*Tiraž*  
200 primeraka

ISBN 978-86-7466-556-5

Napomena: Fotokopiranje ili umnožavanje u bilo kom obliku ili ponovno objavljivanje sadržaja ove knjige - u celini ili u delovima - nije dozvoljeno bez izričite saglasnosti i pismenog odobrenja autora i izdavača.

# Predgovor trećem izdanju

Dopune i izmene u ovom izdanju su mnogobrojne, iako možda nisu na prvi pogled uočljive. Preko 100 jedinica teksta, u teorijskim delovima ili u zadacima, je izmenjeno ili dopunjeno objašnjenjima ili novim sadržajima, a dodat je i novi odeljak (1.4.6). Knjiga sada sadrži 1013 zadataka i 175 primera u teorijskim delovima. U skladu sa vremenom u kome živimo, na nekoliko mesta čitaoca upućujemo na Internet za „sveže podatke” o stanju matematike.

Zbog dodatog materijala došlo je do promene stranica na kojima se nalaze pojedine odrednice, tako da je bilo potrebno napraviti novi sadržaj kao i registre imena i pojmova.

Zvezdica koja je (u drugom izdanju 2008. godine) uvedena da označi teže zadatke, i dalje je tu u istoj ulozi, s tim što su mnogi zadaci koji nisu tada bili teški sada označeni kao takvi. U ovom izdanju uvedena je i posebna oznaka (videti spisak oznaka na strani xi) za zadatke koji su teorijske prirode, u smislu opštih rezultata koji se uglavnom koriste kao gotove formule u zadacima. Verujem da će ovakva klasifikacija zadataka doprineti orijentaciji svih studenata koji koriste ovu knjigu, u zavisnosti od njihovih interesovanja i ambicija.

Čitaoci i korisnici ove knjige su svojim komentarima znatno doprineli poboljšanjima u ovom izdanju. Posebno se zahvaljujem koleginicama sa ETF-a Tatjani Lutovac, Mariji Rašajski, Tamari Koledin, Ivani Jovović i Bojani Mihailović na primedbama i sugestijama koje su proizašle iz korišćenja knjige u nastavi, kao i Zoranu Radosavljeviću na nekoliko metodoloških primedbi koje su učinile boljim neke delove teksta. Zahvaljujem se Mirku Jovanoviću, Slobodanu Simiću i Nenadu Cakiću, kao i studentu Marku Ljubeniću na uočenim greškama u prethodnom izdanju. Diskusija sa Svetlanom Janković sa PMF-a u Nišu doprinela je značajnom poboljšanju teksta u uvodnom delu glave 7. Slike u ovom izdanju doradio je i osvežio Srđan Radovanović.

U ulozi autora odgovoran sam za sve preostale (ili nove) greške bilo da su „štamparske” ili suštinske, i biću veoma zahvalan svima koji mi dostave svoje komentare i primedbe preko mejl adrese koja je navedena ispod ovog teksta, ili na drugi način. Buduće korekcije, izmene i dopune, biće objavljene na nekom internet sajtu koga ćete sigurno uspeti da nađete pretragom preko Interneta sa dobro izabranim rečima za pretragu. Konačno, neverovatno precizno i brzo pretraživanje je ostvareno zahvaljujući matematičarima i inženjerima!

*Milan Merkle*  
emerkle@etf.rs

U Beogradu, 27. septembra 2015. godine

# Predgovor

*U Bolonji su studenti angažovali i otpuštali profesore, kažnjavali ih zbog neopravdanih izostanaka ili kašnjenja na predavanja, kao i zato što nisu umeli da odgovore na teška pitanja. Ako bi predavanje bili nezanimljivo, presporo, prebrzo ili naprosto nedovoljno glasno, studenti bi se izrugivali i gađali profesore raznim predmetima.<sup>1</sup>*

Ova knjiga je nastala kao sinteza, sažimanje i prerada moje dve prethodne knjige: *Matematička analiza - pregled teorije i zadaci*, čije prvo izdanje je izašlo 1994. godine, i *Matematička analiza - teorija*, iz 1996. godine. U toku vremena, duh *Bolonjske deklaracije*, kao i razne druge okolnosti, učinile su da te knjige postanu manje privlačne i previše teške za studente Elektrotehničkog fakulteta, kojima su prvenstveno i bile namenjene.

Ovaj udžbenik objedinjuje teoriju i zadatke, što je standard u savremenoj svet-skoj udžbeničkoj literaturi. Udžbenik je napisan za studente prve godine tehničkih fakulteta, a odnosi se na klasičnu matematičku analizu funkcija jedne promenljive, sa elementima diferencijalnih jednačina.

Na oko 500 stranica, korisnik ove knjige naći će 173 detaljno urađena primera i 1008 zadataka, od kojih je većina snabdevena detaljnim rešenjima ili rezultatima. U teorijskom delu, skoro sve teoreme su date sa dokazima, a na predavaču je da odabere teoreme koje će predavati sa dokazima, i one čije će dokaze izostaviti.

Oznake na marginama, koje sam uveo u svojoj prvoj knjizi iz 1994. godine, zadržao sam i u ovom udžbeniku. Nadam se da će to, uz ostale osobenosti teksta koji sledi, doprineti lakšem, bržem i uspešnijem savlađivanju materije.

Kao ni bilo koji matematički tekst, ni ovaj nije imun na greške. Iako sam u radnoj verziji teksta odstranio mnogobrojne nedostatke, nedoslednosti i notorne greške, u čemu mi je pomogao i dr Nenad Cakić, siguran sam da je dosta toga ostalo za eventualno sledeće izdanje; sa zahvalnošću ću primiti sve eventualne primedbe.

Zahvaljujem se mr Đorđu Baljuzoviću, dr Draganu Cvetkoviću i Koviljki Mladenović, na pomoći oko obrade 60 slika u knjizi.

U Beogradu, 19. septembra 2005. godine

*Milan Merkle*  
emerkle@etf.rs

---

<sup>1</sup>Iz knjige Leonarda Mlodinova *Euklidov prozor*, u prevodu Zorana Živkovića, izdavač Laguna, 2005.

# Sadržaj

Oznake .....	xi
<b>1 Priprema za analizu .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Kardinalni broj skupa .....</b>	<b>2</b>
<b>1.2 Realni brojevi i nejednakosti .....</b>	<b>4</b>
Poredak u skupu realnih brojeva (4) Neke nejednakosti (6)	
<b>1.3 Kompleksni brojevi .....</b>	<b>9</b>
<b>1.4 Realne funkcije .....</b>	<b>10</b>
Pregled osnovnih pojmova (10) Stepena funkcija (13) Polinomska i racionalna funkcija (14) Eksponencijalna i logaritamska funkcija (16) Trigonometrijske funkcije (19) Heaviside-ova funkcija i indikator (22) Elementarne funkcije (23)	
<b>1.5 Zadaci .....</b>	<b>27</b>
Kardinalni broj (27) Poredak u skupu realnih brojeva (28) Nejednakosti (29) Osobine realnih funkcija (30) Kompleksni brojevi i trigonometrijske funkcije (35) Eksponencijalna i logaritamska funkcija (42)	
<b>2 Nizovi i skupovi realnih brojeva .....</b>	<b>45</b>
<b>2.1 Realni nizovi .....</b>	<b>46</b>
Definicija i osnovni pojmovi (46) Osobine konvergentnih nizova (50) Beskonačne granične vrednosti (53) Dve teoreme o nizovima (56) Monotoni nizovi (57)	
<b>2.2 Tri (na prvi pogled) teorijske teme .....</b>	<b>60</b>
Umetnuti intervali (60) Podnizovi (61) Granične vrednosti podnizova (63) Cauchyjev kriterijum konvergencije nizova (64)	
<b>2.3 Osobine skupova realnih brojeva .....</b>	<b>66</b>
Otvoreni, zatvoreni i kompaktni skupovi (66) Banachov stav i metod iteracije (68)	
<b>2.4 Zadaci .....</b>	<b>73</b>
Definicija i osnovni pojmovi (73) Osobine konvergentnih nizova (75) Beskonačne granične vrednosti i neodređenosti (76) Monotoni nizovi (84) Umetnuti intervali (89) Podnizovi (90) Cauchyjev kriterijum (92) Otvoreni, zatvoreni i kompaktni skupovi (94) Banachov stav i metod iteracije (95)	
<b>3 Funkcije: granične vrednosti i neprekidnost .....</b>	<b>99</b>
<b>3.1 Granične vrednosti funkcija .....</b>	<b>100</b>

	Definicija i osnovne osobine (100) Veza između graničnih vrednosti nizova i funkcija (107)	
<b>3.2</b>	<b>Osobine neprekidnih funkcija</b> .....	110
	Teorema o međuvrednostima i metod polovljenja intervala (110) Neprekidne funkcije na kompaktnim skupovima. Uniformna neprekidnost (112)	
<b>3.3</b>	<b>Brzina konvergencije i beskonačno male veličine</b> .....	115
<b>3.4</b>	<b>Zadaci</b> .....	121
	Granične vrednosti funkcija (121) Osobine neprekidnih funkcija (132) Brzina konvergencije i beskonačno male veličine (135)	
<b>4</b>	<b>Diferencijalni račun</b> .....	139
<b>4.1</b>	<b>Izvod funkcije realne promenljive</b> .....	140
	Problem tangente i definicija izvoda (140) Formalizam diferenciranja (144) Diferencijal (148)	
<b>4.2</b>	<b>Teoreme o srednjoj vrednosti u diferencijalnom računu</b>	152
<b>4.3</b>	<b>Primene teorema o srednjoj vrednosti</b> .....	156
	Monotonost funkcija (156) Prekidi izvoda (158) Uniformna neprekidnost funkcija (159) Kontrakcija i Lagrangeova teorema (160) L'Hospitalovo pravilo (161)	
<b>4.4</b>	<b>Izvodi i diferencijali višeg reda</b> .....	163
	Izvodi višeg reda (163) Diferencijali višeg reda (164) Konveksnost i drugi izvod (165)	
<b>4.5</b>	<b>Taylorova formula</b> .....	169
	Taylorov polinom i ostatak (169) Nalaženje Taylorovih razvoja funkcija (171) Procena ostatka u Taylorovoj formuli (175)	
<b>4.6</b>	<b>Ispitivanje funkcija</b> .....	181
	Određivanje karaktera stacionarnih tačaka (181) Asimptote (183) Postupak ispitivanja funkcija (185)	
<b>4.7</b>	<b>Zadaci</b> .....	189
	Formalizam diferenciranja (189) Veza između neprekidnosti i diferencijabilnosti. Levi i desni izvodi (194) Tangenta i normala (196) Diferencijal (197) Teoreme o srednjoj vrednosti (200) Monotonost funkcija (202) Prekidi izvoda (205) Uniformna neprekidnost funkcija (206) Kontrakcija i Lagrangeova teorema (207) L'Hospitalovo pravilo (208) Izvodi višeg reda (211) Diferencijali višeg reda (214) Konveksnost (215) Taylorovi i MacLaurinovi razvoji (216) Procena ostatka (219) Teorema o jedinstvenosti i potencijalni razvoji (223) Taylorova formula za polinome (231) Određivanje karaktera stacionarnih tačaka (232) Asimptote (232) Ispitivanje funkcija (233) Analitičke osobine polinoma (258)	
<b>5</b>	<b>Integralni račun</b> .....	263
<b>5.1</b>	<b>Problem izračunavanja površine i definicija integrala</b> ...	264
<b>5.2</b>	<b>Određeni integral</b> .....	268
	Integrabilne funkcije (268) Osobine integrala (270)	
<b>5.3</b>	<b>Primitivna funkcija i neodređeni integral</b> .....	273
	Definicija primitivne funkcije (273) Veza između određenog i neodređenog	

integrala (274) Osobine neodređenog integrala i metodi integracije (275)	
Metodi integracije određenog integrala (278)	
<b>5.4 Nesvojstveni integral</b> .....	280
<b>5.5 Integracija nekih klasa funkcija</b> .....	283
Racionalne funkcije (284) Neke „iracionalne“ funkcije (285) Trigonometrijske funkcije (287) Integrali koji nisu elementarne funkcije (287)	
<b>5.6 Dužina luka krive i ostale primene</b> .....	289
Dužina luka krive (289) Ostale primene (291)	
<b>5.7 Zadaci</b> .....	295
Definicija određenog integrala (295) Primitivna funkcija i neodređeni integral (296) Smena promenljive u neodređenom integralu (299) Transformacije podintegralne funkcije (302) Parcijalna integracija (306) Integrali racionalnih funkcija (308) Integrali nekih „iracionalnih“ funkcija (314) Integrali trigonometrijskih funkcija (316) Integracija određenih integrala (322) Nesvojstveni integrali (332) Primene određenog integrala (336)	
<b>6 Redovi</b> .....	343
<b>5.1 Uvod i osnovni pojmovi</b> .....	344
<b>6.2 Pozitivni redovi</b> .....	349
<b>6.3 Redovi sa članovima proizvoljnog znaka</b> .....	357
Alternativni redovi (357) Redovi sa opštim članom oblika $a_n b_n$ (358)	
Apsolutna konvergencija (360)	
<b>6.4 Funkcionalni redovi</b> .....	363
Uvod (363) Uniformna konvergencija nizova funkcija (363) Uniformna konvergencija redova (368)	
<b>6.5 Stepeni redovi</b> .....	371
Definicija i osobine stepenih redova (371) Maclaurinovi redovi (376)	
<b>6.6 Zadaci</b> .....	381
Osnovni pojmovi (381) Pozitivni redovi (384) Redovi sa članovima proizvoljnog znaka (389) Apsolutna konvergencija (392) Uniformna konvergencija nizova funkcija (394) Uniformna konvergencija redova (396) Stepeni redovi (399) MacLaurinovi redovi (401)	
<b>7 Diferencijalne jednačine</b> .....	411
<b>7.1 Uvodni pojmovi i diferencijalne jednačine prvog reda</b> ...	412
Uvodni pojmovi (412) Jednačina koja razdvaja promenljive (414) Homogena jednačina (416) Linearna jednačina prvog reda (418) Bernoullijeva jednačina (419) Jednačine Lagrangea i Clairauta (420) Riccatijeva jednačina (422) Jednačina u totalnom diferencijalu (423)	
<b>7.2 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda</b> .....	428
Homogena jednačina (428) Nehomogena jednačina (433) Jednačina sa konstantnim koeficijentima (436) Eulerova diferencijalna jednačina (440)	
<b>7.3 Nepotpune jednačine</b> .....	440
<b>7.4 Zadaci</b> .....	443
Uvodni pojmovi (443) Diferencijalne jednačine prvog reda (443) Linearne diferencijalne jednačine višeg reda (456)	

<b>8 Razni zadaci</b> .....	467
<b>8.1 Nizovi</b> .....	468
<b>8.2 Funkcije, izvodi i integrali</b> .....	471
<b>8.3 Redovi</b> .....	479
Brojni redovi (479) Stepeni redovi (480)	
<b>8.4 Diferencijalne jednačine</b> .....	481
Diferencijalne jednačine prvog reda (481) Diferencijalne jednačine višeg reda (482)	
<b>8.5 Mešoviti zadaci</b> .....	487
<b>Registar imena</b> .....	493
<b>Registar pojmova</b> .....	495



# Oznake

- ! Važno (na margini). Označava važne formule i tvrđenja.
- ¡ Klizavo (na margini). Ovim znakom obeležavaju se mesta gde se lako i često greši.
- ♣ Ideja (na margini). Ovim znakom obeležavamo mesta na kojima se uvodi nova ideja.
- 759.\*** Teži zadatak.
- 117.** Teorijski zadatak.
- Znak za kraj dokaza, teoreme, definicije ili primera.
- $\mathbb{N}$  Skup prirodnih brojeva.
- $\mathbb{Q}$  Skup racionalnih brojeva.
- $\mathbb{Z}$  Skup celih brojeva.
- $\mathbb{R}$  Skup realnih brojeva.
- $\mathbb{C}$  Skup kompleksnih brojeva.
- $\emptyset$  Prazan skup.
- $\{x | P(x)\}$  Skup svih  $x$  (iz nekog skupa) koji imaju osobinu  $P$ . Na primer,  $\{x | 1 < x < 2\}$  je skup svih brojeva između 1 i 2.
- $(a, b)$  Interval (otvoreni interval), skup  $\{x | a < x < b\}$ .
- $[a, b]$  Segment (zatvoreni interval), skup  $\{x | a \leq x \leq b\}$ .
- $(a, b]$  Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup  $\{x | a < x \leq b\}$ .
- $[a, b)$  Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup  $\{x | a \leq x < b\}$ .
- $x \mapsto f(x)$  Oznaka za funkciju koja  $x$  preslikava u  $f(x)$ , na primer, funkcija  $x \mapsto \sin x$ .
- $[x]$  Ceo deo broja  $x$ . Na primer,  $[3.67] = 3$ ,  $[-8.01] = -9$ . Simbol  $[\dots]$  u tekstu označava samo ovu funkciju i ne koristi se u značenju zagrada.
- $\operatorname{sgn} x$  Znak broja  $x$ , signum. Ako je  $x > 0$ , tada je  $\operatorname{sgn} x = 1$ , za  $x < 0$  je  $\operatorname{sgn} x = -1$  i  $\operatorname{sgn} 0 = 0$ .
- NZS  $(m, n)$  Najmanji zajednički sadržalac prirodnih brojeva  $m$  i  $n$ .
- $\log x$  Logaritam broja  $x$  za osnovu  $e$ .
- $n!$   $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ .
- $(2n)!!$   $= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$ .
- $(2n+1)!!$   $= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$ .
- $\binom{a}{n}$   $= \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}$ .

Ostale matematičke oznake objašnjene su na mestu gde se po prvi put pojavljuju.