

Verovatnoća i statistika
za inženjere i studente tehnike

četvrto izmenjeno i dopunjeno izdanje

Univerzitetski udžbenik na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu
(odlukom NNV broj 133/4 od 1. marta 2016.)

Milan Merkle

VEROVATNOĆA I STATISTIKA

za inženjere i studente tehnike

četvrto izmenjeno i dopunjeno izdanje

Beograd, 2016.

Profesor dr Milan Merkle

VEROVATNOĆA I STATISTIKA
ZA INŽENJERE I STUDENTE TEHNIKE

Četvrto izmenjeno i dopunjeno izdanje

Recenzenti

Prof. dr Željko Đurović, Elektrotehnički fakultet u Beogradu
Prof. dr Slobodanka Janković, Matematički fakultet u Beogradu

Izdavač

AKADEMSKA MISAO
Primorska 21, Beograd

Štampa

Planeta print, Beograd

Tiraž

300 primeraka

ISBN 978-86-7466-594-7

Napomena: Fotokopiranje ili umnožavanje u bilo kom obliku ili ponovno objavljivanje sadržaja ove knjige - u celini ili u delovima - nije dozvoljeno bez izričite saglasnosti i pismenog odobrenja autora i izdavača.

Sadržaj

Oznake	<i>xi</i>
1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće	1
1.1 Uvod	2
1.2 Statistički eksperiment	2
1.3 Aksiome teorije verovatnoće	5
1.4 Statističko određivanje verovatnoće	6
1.5 Jednakoverovatni ishodi	7
1.6 Geometrijska verovatnoća	9
1.7 Osobine verovatnoće	10
1.8 Slučajan izbor	14
1.9 Primena kombinatorike u verovatnoći	16
1.10 Slučaj neprebrojivog skupa Ω	26
1.11 Zadaci	30
2 Uslovna verovatnoća i nezavisnost	33
2.1 Uslovna verovatnoća	34
2.2 Formula totalne verovatnoće i Bayesova formula	41
2.3 Zadaci	49
3 Slučajne promenljive i njihove raspodele	53
3.1 Uvod	54
3.2 Funkcija raspodele	57
3.3 Neprekidne slučajne promenljive	63
3.4 Slučajni vektori	67
3.5 Nezavisnost slučajnih promenljivih	70
3.6 Funkcije slučajnih promenljivih i slučajnih vektora	74
3.6.1 Preslikavanja slučajnih promenljivih (74)	
3.6.2 Višedimenzionalni slučaj: Preslikavanja slučajnih vektora (78)	
3.6.3 Varijacioni niz (81)	
3.7 Zadaci	82

4 Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih	85
4.1 Matematičko očekivanje.....	86
4.2 Varijansa.....	90
4.3 Normalna (Gaussova) raspodela.....	93
4.4 Kovarijansa i koeficijent korelacije.....	97
4.5 Dvodimenzionalna normalna raspodela.....	101
4.6 Matrica kovarijanse.....	103
4.7 Višedimenzionalna normalna raspodela.....	105
4.8 Momenti.....	106
4.9 Kvantili.....	109
4.10 Informacija i entropija.....	112
4.11 Zadaci.....	119
5 Karakteristične funkcije	123
5.1 Definicija i osobine karakteristične funkcije.....	124
5.2 Karakteristične funkcije slučajnih vektora.....	130
5.3 Zadaci.....	131
6 Granične teoreme	133
6.1 Vrste konvergenције u teoriji verovatnoće.....	134
6.2 Nejednakost Čebiševa i zakoni velikih brojeva.....	137
6.3 Centralna granična teorema.....	142
6.4 Empirijske funkcije raspodele i njihova konvergenција.....	148
6.5 Zadaci.....	151
7 Neke važne raspodele	155
7.1 Dopune o normalnoj raspodeli.....	156
7.2 Hi kvadrat raspodela.....	157
7.3 Studentova t raspodela.....	160
7.4 F raspodela.....	163
7.5 Beta raspodela.....	165
7.6 Veze između raspodela.....	166
8 Ocenjivanje parametara raspodele	169
8.1 Uvod.....	170
8.2 Ocene matematičkog očekivanja i varijanse.....	173
8.2.1 Tačkaste ocene (173) 8.2.2 Intervali poverenja (175)	
8.3 Ocene verovatnoće.....	180
8.3.1 Primena centralne granične teoreme (veliki uzorak) (180) 8.3.2 Egzak-	
tan metod (182)	

8.4	Ocene parametra Poissonove raspodele	184
8.4.1	Tačkaste ocene (184)	
8.4.2	Primena centralne granične teoreme (veliki uzorak) (184)	
8.4.3	Egzaktan metod (185)	
8.5	Ocene kvantila	186
8.5.1	Tačkaste ocene (186)	
8.5.2	Intervali poverenja (187)	
8.6	Metod momenata	188
8.7	Metod maksimalne verodostojnosti	189
8.8	Intervali verodostojnosti	193
8.9	Zadaci	194
9	Testiranje parametarskih hipoteza	197
9.1	Testovi hipoteza u statistici	198
9.2	Testiranje hipoteza o vrednostima parametara	204
9.3	Hipoteze o koeficijentu korelacije	207
9.4	Hipoteze o razlici parametara	208
9.4.1	Razlika srednjih vrednosti (aproksimativan metod za velike uzorke) (209)	
9.4.2	T-test za razliku srednjih vrednosti (egzaktan metod za dve normalne raspodele sa istom varijansom) (210)	
9.4.3	Količnik dve varijanse normalnih raspodela (212)	
9.5	Zadaci	213
10	Neparametarski testovi	215
10.1	Testiranje hipoteza o raspodeli	216
10.1.1	Uvodni pojmovi (216)	
10.1.2	Hi kvadrat test: Testiranje hipoteze o raspodeli sa fiksiranim parametrima (217)	
10.1.3	Hi kvadrat test: Testiranje hipoteze o raspodeli sa neodređenim parametrima (220)	
10.1.4	Metod najmanjeg hi kvadrata (222)	
10.1.5	Test Kolmogorova i Smirnova (222)	
10.2	Testiranje saglasnosti primenom hi kvadrat testa	224
10.2.1	Hi kvadrat test kao univerzalni test saglasnosti (224)	
10.2.2	Testiranje nezavisnosti (225)	
10.3	Zadaci	227
11	Uslovne raspodele	229
11.1	Uslovne raspodele u odnosu na događaj	230
11.2	Uslovne raspodele u odnosu na slučajnu promenljivu	232
11.3	Bajesovska paradigma	238
11.4	Uslovno matematičko očekivanje	239
11.5	Uslovna varijansa	240
11.6	Predikcija	242
11.7	Zadaci	245

12 Linearna regresija	247
12.1 Zavisnost između dve slučajne promenljive	248
12.1.1 Uvod (248) 12.1.2 Regresiona prava (250) 12.1.3 Opšta linearna regresija (252)	
12.2 Zavisnost između slučajne i kontrolisane promenljive	253
12.2.1 Uvod (253) 12.2.2 Opšta linearna regresija sa kontrolisanom promenljivom (253) 12.2.3 Regresiona prava: Ocene parametara i intervali poverenja (256) 12.2.3 Provera saglasnosti regresionog modela sa podacima (260) 12.2.4 Nelinearna regresija i višestruka linearna regresija (261)	
12.3 Zadaci	263
13 Slučajni procesi	265
13.1 Uvod	266
13.2 Markovski procesi	269
13.3 Stacionarni procesi	273
13.4 Zadaci	276
14 Monte Carlo metodi	277
14.1 Uvod	278
14.2 Generisanje i testiranje pseudoslučajnih brojeva	278
14.3 Generisanje raspodela	280
14.3.1 Generisanje diskretnih raspodela (280) 14.3.2 Generisanje neprekidnih raspodela (282)	
14.4 Primene simulacije u statistici	285
14.5 Zadaci	288
15 Mešoviti zadaci	289
Dodaci	303
A Matematičke dopune	304
B Rešenja, uputstva i rezultati odabranih zadataka	307
C Pregled važnijih raspodela	322
D Statističke tablice	324
Registar pojmova	327
Literatura	336